



الجامعة الأسمرية الإسلامية كلية
العلوم - قسم الرياضيات

حل بعض المعادلات الإهليجية باستعمال طريقة الفروق المنتية وطريقة العنصر المنتهي ومقارنتهما

نعيمة مفتاح سالم ابهور

إشراف

أ.د. عمر علي العيان

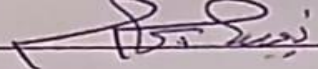
أستاذ الرياضيات - كلية العلوم - زليتن

قدمت هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات الإجازة العالية (الماجستير) في العلوم التطبيقية بقسم الرياضيات بكلية
العلوم بالجامعة الأسمرية الإسلامية

العام الجامعي: 2025-2026

إقرار

أقر أنا نعيمة مفتاح سالم ابجور بأن ما اشتملت عليه الرسالة إنما هو نتاج جهدي الخاص، باستثناء ما تمت الإشارة إليه حيثما ورد، وأن هذه الرسالة ككل لم يقدم من قبل لنيل أي درجة علمية، أو بحث علمي لدى أي مؤسسة تعليمية أو بحثية أخرى، وللجامعة حق توظيف الرسالة والاستفادة منها مصدراً مرجعياً للمعلومات، لأغراض الاطلاع أو الإعارة أو النشر بما لا يتعارض وحقوق الملكية الفكرية المقررة بالتشريعات النافذة.

التوقيع: 

التاريخ: 20 26 10 5 120 م



نموذج د. ع. (31)

التاريخ: / /
الموافق: ١٢/١١/٢٠٢٥ م

قرار لجنة مناقشة رسالة الإجازة العالية (الماجستير)

عملاً بقرار السيد/ رئيس الجامعة رقم (912) لسنة 2025م، الصادر في 27 / 10 / 2025م، القاضي بتشكيل لجنة لمناقشة رسالة علمية للحصول على درجة الإجازة العالية (الماجستير) في تخصص الرياضيات المقدمة من الطالبة: نعيمة مفتاح إبحور، كلية العلوم وعنوانها: حل بعض المعادلات الاهليجية باستعمال طريقة الفروق المنتهية وطريقة العنصر المنتهي و مقارنتها وتتكون اللجنة من الاساتذة:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------|
| 1. أ.د. عمر علي العيان | الجامعة: الاسمرية الاسلامية | مشرفا ومقررا. |
| 2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب | الجامعة: الاسمرية الاسلامية | عضوا داخليا. |
| 3. أ.د. خالد علي العرفي | الجامعة: المرقب | عضوا خارجيا. |

عقدت اللجنة جلسة علنية علي تمام الساعة 11:00 من صباح يوم الخميس الموافق 11 / 12 / 2025م بقاعة الاجتماعات في الكلية لمناقشة الرسالة وتقويم مستواها العلمي والمنهج الذي اتبعته الباحثة والمصادر التي استخدمتها في دراستها، وقررت ما يلي:

بعد اتمام الطالبة نعيمة مفتاح إبحور لمتطلبات الدراسات العليا واجتياز امتحاناتها ومناقشة رسالتها وتقويمها تقرر: إجازتها بملاحظات وتمنح الطالبة فرصة للتعديل و الأخذ بالملاحظات خلال شهر من تاريخ المناقشة.

توقيع أعضاء لجنة المناقشة:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------|
| 1. أ.د. عمر علي العيان | الجامعة: الاسمرية الاسلامية | التوقيع: |
| 2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب | الجامعة: الاسمرية الاسلامية | التوقيع: |
| 3. أ.د. خالد علي العرفي | الجامعة: المرقب | التوقيع: |

توقيع أعضاء اللجنة بعد التعديل والأخذ بالملاحظات - بتاريخ / / 20م.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------|
| 1. أ.د. عمر علي العيان | الجامعة: الاسمرية الاسلامية | التوقيع: |
| 2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب | الجامعة: الاسمرية الاسلامية | التوقيع: |
| 3. أ.د. خالد علي العرفي | الجامعة: المرقب | التوقيع: |

يعتمد:

رئيس الجامعة



عميد الكلية



بعد من عشرة (10) نسخ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسُ مَسَ ضِيَاءً ۖ وَالْقَمَرَ نُورًا ۖ وَقَدَرَهُمْ نَازِلًا لِّتَعْلَمُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ
وَالْأَرْضَ لِحِسَابٍ ۖ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ ۗ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ
يَعْلَمُونَ)

[سورة يونس - الآية: 5]

الإهداء

الى ملاكي في الحياة الى معنى الحنان والتفاني الى بسمه الحياة وسر الوجود الى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي

"امي الغالية"

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار ... إلى من علمني العطاء دون انتظار ... إلى من أحمل اسمه بكل افتخار ... أرجو من الله أن يمد في

عمرك لترى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم اهتدي بها اليوم

وفي الغد وإلى الأبد "أبي

الغالي "

إلى من بهم أكبر وعليهم أعتد ... إلى شموع تنير ظلمة حياتي ... إلى من بوجودهم أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها إلى من عرفت

معهم معنى الحياة.

"إخوتي الأعزاء"

إلى كل الأهل والأقارب والأحباب إلى

كل الأصدقاء

إلى الذين حملتهم ذاكرتي ولم تحملهم منكرتي أهدي هذا

العمل

الشكر والتقدير

الحمد لله الذي أنار لي درب العلم والمعرفة وأعانني ووفقتني في إنجاز هذا العمل واعترافاً بفضلته علينا وعملاً بقوله صلى الله عليه وسلم:
" من صنع إليكم معروفاً فكافئوه فإن لم تجدوا ما تكافئونه به فادعوا له حتى تروا أنكم كافأتموه" أتوجه بالشكر والعرفان
إلى المشرف الأستاذ الدكتور عمر العيان على توجيهاته ونصائحه القيمة والثمينة طوال مراحل إنجاز هذا العمل
وإلى الأساتذة الكرام أعضاء لجنة المناقشة على تكريمهم وتفضلهم بقبول مناقشة هذا البحث شاكره كل ما يقدمونه من ملاحظات قيمة حول هذا
البحث

كما لا يفوتني أن أشكر كل من قدم لي يد العون من قريب أو بعيد لأنجز هذا العمل المتواضع سواء بنصائحه وتوجيهاته أو بدعواته وأمنيته،
دون أن أنسى كل من كان سبباً في تعليمي بدءاً بمعلمي وأساتذتي ووصولاً إلى
زملائي الأعزاء.

المحتويات

| | |
|---|--------|
| فهرس الجداول..... | و |
| فهرس الأشكال..... | ز |
| قائمة الاختصارات..... | ي دليل |
| المصطلحات العلمية..... | ك |
| الملخص..... | ف |
| المقدمة..... | 1 |
| الفصل الأول:تعريفات ومفاهيم أساسية..... | 3 |
| 1.1. المقدمة..... | 4 |
| 2.1. المفاهيم الأساسية..... | 4 |
| 3.1. نظريات هامة..... | 17 |
| الفصل الثاني:الطرق التحليلية لحل بعض المعادلات الإهليجية..... | 19 |
| 1.2. المقدمة..... | 20 |
| 2.2. طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلات الإهليجية المتجانسة..... | 20 |
| 1.2.2. معادلة لابلاس مع شروط حدية متجانسة..... | 20 |
| 2.2.2. معادلة لابلاس مع شروط حدية غير متجانسة..... | 43 |
| 3.2. طريقة الدوال الذاتية لحل المعادلات التفاضلية الإهليجية غير المتجانسة في بعدين..... | 61 |
| 1.3.2. معادلة بواسون مع شروط حدية متجانسة..... | 61 |
| 2.3.2. معادلة بواسون مع شروط حدية غير متجانسة..... | 72 |
| الفصل الثالث:الطرق العددية لحل بعض المعادلات الإهليجية..... | 78 |
| 1.3. المقدمة..... | 79 |
| 2.3. طريقة الفروق المنتهية..... | 79 |
| 1.2.3. حل معادلة بواسون في بعدين باستخدام طريقة الفروق المنتهية..... | 79 |
| 3.3. طريقة العنصر المنتهي..... | 128 |
| 1.3.3. حل معادلة لابلاس في بعدين باستخدام طريقة العنصر المنتهي..... | 128 |
| 2.3.3. حل معادلة لابلاس في بعدين باستخدام طريقة العنصر المنتهي..... | 151 |
| الباب ال رابع: مقارنة الطرق العددية بالحل التحليلي..... | 165 |
| 1.4. مقدمة..... | 166 |
| 2.4. أمثلة عددية..... | 166 |
| الاستنتاج..... | 185 |
| التوصيات..... | 187 |

| | |
|-----------|------------------|
| 188 | المصادر والمراجع |
| 193 | Abstract |

فهرس الجداول

- الجدول (1.3): الترقيم المحلي والترقيم العام لعناصر الشبكة المثلثية..... 133
- الجدول (2.3): عناصر مصفوفة المعاملات العامة للمثال (11.3)..... 137
- الجدول (3.3): يوضح القيم العددية للعقد المحققة للشروط الحدية في المثال (11.3)..... 138
- الجدول (4.3): يوضح عناصر المصفوفة C_{vv} للمثال (11.3)..... 139
- الجدول (5.3): يوضح عناصر المصفوفة C_{vn} للمثال (11.3)..... 140
- الجدول (6.3): عناصر مصفوفة المعاملات العامة للمثال (12.3)..... 142
- الجدول (7.3): عناصر المصفوفة C_{vv} للمثال (12.3)..... 143
- الجدول (8.3): يوضح عناصر المصفوفة C_{vn} للمثال (12.3)..... 143
- الجدول (9.3): قيم النقاط الحدية بعد تطبيق الشروط الحدية..... 144
- الجدول (10.3): يبين الترقيم العام والترقيم المحلي لعقد العناصر المثلثية في المثال (13.3)..... 146
- الجدول (11.3): يوضح مصفوفة المعاملات العامة للمثال (13.3)..... 147
- الجدول (13.3): يبين عناصر المصفوفة C_{vn} 149
- الجدول (14.3): القيم الحدية بعد تطبيق الشروط الحدية..... 150
- الجدول (15.3): يبين الترقيم العام والترقيم المحلي لكل عقدة في العناصر المثلثية للمثال (14.3)..... 154
- الجدول (16.3): يبين الترقيم العام والترقيم المحلي لكل عقدة في العناصر المثلثية للمثال (16.3)..... 160
- الجدول (17.3): يبين قيم العقد الحدية بعد تطبيق الشروط الحدية..... 161
- الجدول (1.4): يوضح مقارنة النتائج العددية بالحل التحليلي..... 167
- الجدول (2.4): مقارنة نتائج الطرق العددية بالحل التحليلي للمثال (2.4)..... 169
- الجدول (3.4): يبين مقارنة النتائج العددية بالحل التحليلي وحساب الخطأ..... 172
- الجدول (4.4): مقارنة الحل العددي بالحل التحليلي للمثال (4.4)..... 175
- الجدول (5.4): يبين مقارنة بين الحلول العددية والحل التحليلي للمثال..... 178
- الجدول (6.4): مقارنة الحلول التقريبية بالحل التحليلي..... 181

فهرس الأشكال

- الشكل (1.2): يوضح معادلة لابلاس مع شروط ديرشيلت الحدية 21
- الشكل (2.2): يوضح معادلة لابلاس مع شروط حدية متجانسة على الجوانب العمودية 31
- الشكل (3.2): يوضح معادلة لابلاس مع شروط نيومان الحدية 32
- الشكل (4.2): يوضح معادلة لابلاس مع الشروط الحدية المختلطة 42
- الشكل (5.2): طريقة حل معادلة لابلاس مع شروط ديرشيلت غير المتجانسة 44
- الشكل (6.2): طريقة حل معادلة لابلاس مع شروط نيومان غير المتجانسة 52
- الشكل (7.2): يبين طريقة حل معادلة لابلاس مع شروط حدية المختلطة غير المتجانسة 58
- الشكل (1.3): المستقيمات الرأسية والمستقيمات الأفقية ونقاط الشبكة 80
- الشكل (2.3): تقسيم الفترة على محور X بطول h 80
- الشكل (3.3): تقسيم الفترة على محور Y بطول k 81
- الشكل (4.3): يوضح الشكل النجمي 82
- الشكل (5.3): يوضح معادلة لابلاس مع الشروط الحدية في المثال (3.1) 83
- الشكل (6.3): تقسيم المنطقة بمستقيمات رأسية وأفقية والحصول على شبكة للمثال (3.1) 84
- الشكل (7.3): يوضح معادلة بواسون مع الشروط الحدية للمثال (2.3) 88
- الشكل (9.3): معادلة بواسون مع شروط ديرشيلت في مثال (3.3) 92
- الشكل (10.3): نقاط الشبكة الداخلية المطلوبة في المثال (3.3) 93
- الشكل (11.3): معادلة بواسون مع شروط ديرشيلت في مثال (4.3) 95
- الشكل (13.3): معادلة بواسون وشروط ديرشيلت الحدية في المثال (5.3) 98
- الشكل (14.3): النقاط الداخلية المطلوبة في المثال (5.3) 98
- الشكل (15.3): معادلة لابلاس مع شروط ديرشيلت غير المتجانسة في مثال (6.3) 100
- الشكل (16.3): يوضح النقاط الداخلية المطلوبة في المثال (6.3) 100
- الشكل (17.3): معادلة لابلاس مع شروط ديرشيلت غير المتجانسة في مثال (7.3) 103
- الشكل (18.3): يوضح النقاط الداخلية المطلوبة للمثال (7.3) 103
- الشكل (19.3): يوضح المنطقة المستطيلة Ω 106

- الشكل (20.3): يبين العقدة الوهمية 108
- الشكل (21.3): يوضح تقريب النقاط الحديدية على الجانب الأيسر للمستطيل 109
- الشكل (22.3): يوضح طريقة تقريب النقاط الحديدية أعلى المستطيل 110
- الشكل (23.3): يوضح طريقة تقريب النقاط الحديدية أسفل المستطيل 110
- الشكل (24.3): معادلة لابلاس مع شروط نيومان في المثال (8.3) 111
- الشكل (25.3): يوضح النقاط الداخلية والحديدية المطلوبة في المثال (8.3) 112
- الشكل (26.3): معادلة بواسون مع شروط نيومان في المثال (9.3) 120
- الشكل (27.3): يبين النقاط الداخلية والحديدية المطلوبة في المثال (9.3) 120
- الشكل (28.3): معادلة لابلاس مع شروط حديدية مختلطة في المثال (10.3) 124
- الشكل (29.3): يبين النقاط الداخلية والحديدية المطلوبة في المثال (10.3) 124
- الشكل (30.3): يوضح تقطيع المنطقة إلى شبكة من المثلثات 129
- الشكل (31.3): الترفيم المحلي للعنصر الأول 130
- الشكل (32.3): العقدة المحلية رقم 1 131
- الشكل (33.3): شبكة العناصر المثلثية للمثال (11.3) 133
- الشكل (34.3): العقد الداخلية المطلوبة في المثال (12.3) 142
- الشكل (35.3): يوضح تقطيع المنطقة إلى شبكة من المثلثات في المثال (13.3) 146
- الشكل (36.3): يبين التقطيع المثالي للمنطقة المستطيلة للمثال (14.3) 153
- الشكل (37.3): يبين التقطيع المثالي للمنطقة المستطيلة للمثال (16.3) 160
- الشكل (1.4): الحل التحليلي لمعادلة لابلاس في المثال (1.4) 168
- الشكل (2.4): مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي للمثال (1.4) 168
- الشكل (3.4): الحل التحليلي لمعادلة لابلاس في المثال (2.4) 171
- الشكل (4.4): مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي 171
- الشكل (5.4): الحل التحليلي لمعادلة لابلاس في المثال (3.4) 174
- الشكل (6.4): مقارنة بين الحلول التقريبية والحل التحليلي للمثال (3.4) 174
- الشكل (7.4): الحل التحليلي لمعادلة بواسون في المثال (4.4) 177
- الشكل (8.4): مقارنة الحلول التقريبية بالحل التحليلي للمثال (4.4) 177
- الشكل (9.4): الحل التحليلي لمعادلة بواسون في المثال (5.4) 180

- الشكل (10.4): مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي للمثال (5.4) 180
- الشكل (11.4): يبين الحل التحليلي لمعادلة بواسون في المثال (6.4) 183
- الشكل (12.4): مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي للمثال (6.4) 183

قائمة الاختصارات

| Abbreviation | Meaning |
|---------------------|--------------------------------|
| BC | Boundary Conditions |
| EFM | Eigen Functions Method |
| FDM | Finite Difference Method |
| FEM | Finite Element Method |
| GEM | Gaussian Elimination Method |
| PDE | Partial Differential Equation |
| SVM | Separation of Variables Method |

دليل المصطلحات العلمية

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات العلمية التي وردت في هذه الرسالة، مرتبة وفق حروف الهجاء العربية وما يقابلها

باللغة الانكليزية.

أولاً: عربي - إنجليزي

(أ)

| | |
|-------------------------|----------------|
| Left edge | الحد الأيسر |
| Bottom edge | الحد السفلي |
| Upper edge | الحد العلوي |
| Particular solution | الحل الخاص |
| Exact solution | الحل الفعلي |
| General solution | الحل العام |
| Singular solution | الحل المفرد |
| Absolute error | الخطأ المطلق |
| Relative error | الخطأ النسبي |
| Compatibility condition | الشرط التوافقي |

(ب)

| | |
|-----------------------------------|-----------------------|
| Forward differences approximation | تقريب الفروق الأمامية |
| Back differences approximation | تقريب الفروق الخلفية |
| Central differences approximation | تقريب الفروق المركزية |
| Global numbering | ترقيم عام |
| Local numbering | ترقيم محلي |

(ج)

| | |
|--------|-----|
| Linear | خطي |
|--------|-----|

د)ـ

| | |
|------------------------|--------------|
| Even function | دالة زوجية |
| Odd function | دالة فردية |
| Degrees of freedom | درجة الحرية |
| Shape functions | دوال الشكل |
| Eigen functions | دوال ذاتية |
| Orthogonally functions | دوال متعامدة |

د)ـ

| | |
|-------|------|
| Order | رتبة |
|-------|------|

ش)ـ

| | |
|-------------------------------|---------------------|
| Grid | شبكة |
| Dirichlet boundary conditions | شروط ديرشليت الحدية |
| Neumann boundary conditions | شروط نيومان الحدية |
| Robin boundary conditions | شروط روبن الحدية |

ط)ـ

| | |
|--------------------------------|-----------------------|
| Finite element method | طريقة العنصر المنتهي |
| Finite differences method | طريقة الفروق المنتهية |
| Gauss elimination method | طريقة جاوس للحذف |
| Separation of variables method | طريقة فصل المتغيرات |

ع)ـ

| | |
|------------|------------|
| Ghost node | عقدة وهمية |
|------------|------------|

م)ـ

| | |
|------------------|------------------|
| Homogeneous | متجانس |
| Load vector | متجه حمولة |
| Taylor series | متسلسلة تايلور |
| Fourier series | متسلسلة فوريير |
| Maclaurin series | متسلسلة ماكلورين |

| | |
|--------------------------------|-------------------------|
| Sturm Liouville problem | مسألة ستورم ليوفيل |
| Stiffness matrix | مصفوفة الصلابة |
| Global coefficients matrix | مصفوفة المعاملات العامة |
| Augment matrix | مصفوفة موسعة |
| Elliptic Equation | معادلة إهليجية |
| Partial differential equation | معادلة تفاضلية جزئية |
| Ordinary differential equation | معادلة تفاضلية عادية |
| Hyperbolic Equation | معادلة زائديه |
| Parabolic Equation | معادلة مكافئيه |
| Coefficients | معاملات |

(ن)

| | |
|---|-------------------------------------|
| Green s' theorem | نظرية غرين |
| Superposition principal theorem | نظرية مبدأ التركيب |
| Double Fourier sine series representation theorem | نظرية متسلسلة فوريير المضاعفة للجيب |
| Existence and Uniqueness theorem | نظرية الوجود والوحدانية |

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات العلمية التي تم استخدامها في هذه الرسالة، مرتبة وفق حروف الهجاء

الإنجليزية وما يقابلها باللغة العربية.

ثانياً: انجليزي -عربي

(A)

| | |
|----------------|--------------|
| Absolute error | الخطأ المطلق |
| Augment matrix | مصفوفة موسعة |

(B)

| | |
|--------------------------------|----------------------|
| Back differences approximation | تقريب الفروق الخلفية |
| Bottom edge | الحد السفلي |

(C)

| | |
|-----------------------------------|-----------------------|
| Central differences approximation | تقريب الفروق المركزية |
|-----------------------------------|-----------------------|

| | |
|-------------------------|----------------|
| Coefficients | معاملات |
| Compatibility condition | الشرط التوافقي |

)I(

| | |
|---|-------------------------------------|
| Degrees of freedom | درجة الحرية |
| Dirichlet boundary conditions | شروط ديرشليت الحدية |
| Double Fourier sine series representation theorem | نظرية متسلسلة فوريير للجيب المضاعفة |

)E(

| | |
|----------------------------------|-------------------------|
| Eigen functions | دوال ذاتية |
| Elliptic Equation | معادلة إهليجية |
| Even function | دالة زوجية |
| Exact solution | الحل الفعلي |
| Existence and Uniqueness theorem | نظرية الوجود والوحدانية |

)F(

| | |
|-----------------------------------|-----------------------|
| Finite differences method | طريقة الفروق المنتهية |
| Finite element method | طريقة العنصر المنتهي |
| Forward differences approximation | تقريب الفروق الأمامية |
| Fourier series | متسلسلة فوريير |

)G(

| | |
|----------------------------|-------------------------|
| Gauss elimination method | طريقة جاوس للحذف |
| General solution | الحل العام |
| Ghost node | عقدة وهمية |
| Global coefficients matrix | مصفوفة المعاملات العامة |
| Global numbering | ترقيم عام |
| Green s' theorem | نظرية غرين |
| Grid | شبكة |

)H(

| | |
|---------------------|---------------|
| Homogeneous | متجانسة |
| Hyperbolic Equation | معادلة زائديه |

)L(

| | |
|-----------------|--------------|
| Linear | خطي |
| Left edge | الحد الأيسر |
| Load vector | متجه الحمولة |
| Local numbering | ترقيم محلي |

)M(

| | |
|------------------|------------------|
| Maclaurin series | متسلسلة ماكلورين |
|------------------|------------------|

)N(

| | |
|-----------------------------|--------------------|
| Neumann boundary conditions | شروط نيومان الحدية |
|-----------------------------|--------------------|

)O(

| | |
|--------------------------------|----------------------|
| Odd function | دالة فردية |
| Order | رتبة |
| Ordinary differential equation | معادلة تفاضلية عادية |
| Orthogonally functions | دوال متعامدة |

)P(

| | |
|-------------------------------|----------------------|
| Parabolic Equation | معادلة مكافئه |
| Partial differential equation | معادلة تفاضلية جزئية |
| Particular solution | الحل الخاص |

)R(

| | |
|---------------------------|------------------|
| Relative error | الخطأ النسبي |
| Robin boundary conditions | شروط روبن الحدية |

)S(

| | |
|--------------------------------|---------------------|
| Separation of variables method | طريقة فصل المتغيرات |
| Shape functions | دوال الشكل |
| Singular solution | الحل المفرد |
| Stiffness matrix | مصفوفة الصلابة |
| Sturm Liouville problem | مسألة ستورم ليوفيل |

)U)

| | |
|------------|-------------|
| Upper edge | الحد العلوي |
|------------|-------------|

الملخص

معظم الظواهر الفيزيائية والهندسية يتم التعبير عليها بمعادلات تفاضلية جزئية وتفهم هذه المسائل، لابد من حل تلك المعادلات، لكن عملية الحصول على الحل الفعلي ليست دوماً بالمسألة البسيطة؛ لذلك كان من الضروري تقريب هذه المعادلات عددياً.

في هذا البحث درسنا المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية التآقصة من الرتبة الثانية بحيث تم التركيز على معادلة بواسون ومعادلة لابلاس في البعد الثاني كنموذج لوصف تلك الظواهر، واستطعنا إيجاد الحل الفعلي للمعادلات المدروسة باستخدام طريقة فصل المتغيرات في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية المتجانسة، وطريقة الدوال الذاتية في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية غير المتجانسة وفي هذه الحالة قمنا بمقارنة الحل الفعلي والحل العددي الناتج عن تطبيق طريقتي الفروق المنتهية والعنصر المنتهي. أجريت المقارنة بواسطة الجداول العددية وباستخدام الرسوم البيانية أيضاً، والجدير بالذكر أن بعض هذه المعادلات وردت في المراجع، بحيث تم حلها باستخدام هذه الطرق أو طرائق أخرى، ولكن بأسلوب مختصر وغير واضح للقارئ، لذا قمنا بإعادة صياغة الحل وعرضه بأسلوب مبسط وتفصيلي يوضح آلية كل طريقة، ويساعد القارئ على الفهم.

من خلال الأمثلة المدروسة في هذا البحث وجدنا أن طريقة الفروق المنتهية وطريقة العنصر المنتهي كلاهما تكون متقاربة للحل التحليلي وذلك في حالة دراسة معادلة إهليجية متجانسة (لابلاس (في بعدين مع شروط حدية متجانسة وغير متجانسة من النوع الأول ومعرفّة على نطاق منتظم) مستطيل، مثلث، ...، أما في حالة دراسة معادلة إهليجية غير متجانسة (بواسون) في بعدين مع شروط حدية متجانسة وغير متجانسة من النوع الأول فإنّ طريقة العنصر المنتهي أفضل من طريقة الفروق المنتهية للحصول على حل مقرب للمعادلة الإهليجية غير المتجانسة (بواسون) وبأقل خطأ في حالة كون منطقة الحل للمعادلة الإهليجية غير المتجانسة (بواسون) ذات شكل هندسي منتظم) مستطيل، مثلث،).

الكلمات المفتاحية: طريقة الفروق المنتهية، طريقة العنصر المنتهي، معادلة بواسون في بعدين، معادلة لابلاس في بعدين.

المقدمة

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية من المواضيع المهمة في الرياضيات البحتة والتطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية والهندسية فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية والإنشائية من أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية (عبد، 2008).

وهناك عديد كبير من المسائل في الفيزياء والتكنولوجيا يمكن أن توصف باستخدام المعادلات التفاضلية الجزئية (معادلات الفيزياء الرياضية). وتوصف عمليات الحالة الثابتة ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة بمعادلات تفاضلية جزئية من النوع الإهليجي (الناقص)، ومن أهم الأمثلة على ذلك معادلة بواسون ومعادلة لابلاس، حيث تستخدم هذه المعادلات في حساب الجهد الكهربائي وانتشار الحرارة، وحيث أنه لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، ولكن توجد بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية تحت شروط معينة تسمى مسائل القيمة الحدية؛ لذلك يتم حل هذه المسائل في الغالب عددياً أي باستخدام طرق أكثر شمولية وسهولة.

ومن أشهر الطرق العددية طريقة الفروق المنتهية [FDM] Finite Differences Method التي ظهرت عام 1928 من خلال الورقة النظرية التي قدمها كورنت (Courant)، وفريدريتش (Friedrichs)، ولوي (Lewy)، وذلك لحل مسائل الفيزياء الرياضية المعقدة (Thomee, 2001). واستمر تطوير هذه الطريقة

إلى وقتنا الحاضر، ومن الطرق العددية المهمة أيضاً طريقة العنصر المنتهي Finite Element Method

[FEM] وتعود هذه الطريقة لعام 1909 عندما طُوّر ريتز طرائق الحل التقريبي لمسائل في ميكانيك المواد الصلبة، وفي عام 1943 زاد (Richard Courant) 1888-1972 من إمكانيات طريقة ريتز عن طريق إدخال دوال خطية خاصة معرفة على مناطق مثلثية، وفي الوقت الذي بدأت فيه هذه الطرق بالتطور بين فئات المهندسين والفيزيائيين، اهتم الرياضيون بإعطاء أساس رياضي راسخ لكل طريقة، فأجريت دراسات عديدة تم التركيز فيها على إيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية باستخدام أهم الطرق العددية [FDM] و [FEM]، ففي عام 1999 توصل الباحثون للحلول التقريبية لهذا النوع من المعادلات الجزئية (الناقصية) في الفضاء ثنائي البعد (أصلان، 2020).

ولم تتوقف الدراسات عند هذا الحد بل استمرت الأبحاث إلى وقتنا الراهن، ففي عام 2015 تم إيجاد الحلول التقريبية لمعادلة لابلاس في بعدين باستخدام طريقة الفروق المنتهية وطريقة العنصر المنتهي وتم الوصول إلى أنّ طريقة الفروق المنتهية هي الطريقة الأفضل في حالة المجال المدروس منتظم (أبو الرب، 2016)، وفي عام 2019 تم إيجاد الحلول التقريبية لمعادلة بواسون في بعدين باستخدام طريقة الفروق المنتهية وطريقة العنصر المنتهي مع الشروط الحدية من النوع الأول المتجانسة وتم الوصول إلى أنّ طريقة العنصر المنتهي

هي الطريقة الأفضل في حالة المجال المدروس منتظم أيضاً [Assefa&Guta,2019]، وهذا يتفق مع الدراسة التي أجراها Roslan و Hoe عام 2024 .

تم في هذا البحث دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية (الناقصية) مثل معادلة لابلاس ومعادلة بواسون (وهي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية) مع شروط حدية مختلفة؛ نظراً لما لها من استعمالات وتطبيقات في مجالات مختلفة مثل الكهربائية الساكنة وغيرها من المجالات.

درسنا مقارنة بعض الطرق العددية لمسألة القيمة الحدية لبعض المعادلات الجزئية الناقصية ونقسم البحث وفقاً للآتي: -

الفصل الأول: - عرضنا في هذا الفصل العديد من التعريفات والمفاهيم الأساسية المتعلقة بالبحث

الفصل الثاني: - يحتوي على بعض الطرق التحليلية لحل بعض المعادلات الناقصة ومن أبرز هذه الطرق طريقة فصل المتغيرات [SVM] Separation of Variables Method وطريقة الدوال الذاتية Eigen Functions Method [EFM] مدعمة هذه الطرق بالعديد من الأمثلة.

الفصل الثالث: - تم إيجاد الحل العددي لبعض المعادلات الناقصة باستخدام الطرق العددية كطريقة الفروق المنتهية [FDM] Finite Differences Method وطريقة العنصر المنتهي Finite Element Method [FEM] وسنوضح هذه الطرق بالعديد من الأمثلة المختلفة.

الفصل الرابع: - عملنا على مقارنة نتائج طريقة الفروق المنتهية لأمثلة معينة مع النتائج المتحصل عليها من طريقة العنصر المنتهي بواسطة برنامج الماتلاب مع الحل التحليلي.

الفصل الأول
المفاهيم الأساسية

Fundamental Concepts

Introduction

1.1 المقدمة

سننظر في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بالمعادلات التفاضلية الجزئية والتحليل العددي، والنظريات المتعلقة بالفصول القادمة.

Fundamental Concepts

2.1 المفاهيم الأساسية

1.2.1 تعريف

تعرف المعادلة التفاضلية Differential Equation على أنها معادلة تحتوي على مشتقة أو أكثر للدالة المجهولة بالنسبة لمتغير مستقل واحد أو عدة متغيرات مستقلة، فإذا كانت المعادلة التفاضلية في متغير مستقل واحد ومشتقاته فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية Ordinary Differential Equation وإذا كانت المعادلة

التفاضلية في أكثر من متغير مستقل فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية Partial Differential Equation (البكور، 2019).

2.2.1 تعريف

المعادلة التفاضلية الجزئية Partial Differential Equation هي العلاقة بين الدالة المجهولة والمشتقات الجزئية لهذه الدالة $U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy}, \dots$

والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية هي

$$F(x, y, \dots, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, \dots) = 0$$

حيث F دالة كثيرة حدود، x, y متغيرات مستقلة، $U(x, y, \dots)$ متغير تابع (البكور، 2019).

3.2.1 تعريف

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية Linear Partial Differential Equation يكون فيها المتغير التابع وكل مشتقاته الجزئية في الصورة الخطية (أي أنها غير مضروبة ببعضها وجميعها مرفوعة لأس الواحد الصحيح)، والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية هي

$$Au_{xx}(x, y) + Bu_{xy}(x, y) + Cu_{yy}(x, y) + Du_x(x, y) + Eu_y(x, y) + Fu(x, y) = G(x, y) \quad (1.1)$$

حيث u متغير تابع و A, B, C, D, E, F, G ثوابت أو دوال في المتغيرين x, y (العويضي، زراع وعباس، 2005).

عدا ذلك تكون المعادلة التفاضلية الجزئية غير خطية.

ويمكن تصنيف المعادلة السابقة حسب المميز " $B^2 - 4AC$ " إلى: -

| | | |
|---------------------|---------------------|--------------------------------------|
| Elliptic Equation | " $B^2 - 4AC < 0$ " | • معادلة تفاضلية جزئية ذات نمط ناقص |
| Parabolic Equation | " $B^2 - 4AC = 0$ " | • معادلة تفاضلية جزئية ذات نمط مكافئ |
| Hyperbolic Equation | " $B^2 - 4AC > 0$ " | • معادلة تفاضلية جزئية ذات نمط زائدي |

(شفتنر، 2019).

4.2.1. تعريف

رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية Order of Partial Differential Equation هي رتبة أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية الجزئية
فمثلاً:

$$U_t = U_{xx}$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية.

$$U_t = U_{xxx} + \sin x$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثالثة (العويضي وآخرون، 2005).

5.2.1. تعريف

المعادلة التفاضلية الجزئية (1.1) تسمى معادلة تفاضلية جزئية متجانسة إذا كانت $G(x, y) = 0$ وغير متجانسة إذا كانت $\neq 0$
($G(x, y)$) العويضي وآخرون، 2005).

6.2.1. تعريف

إذا كانت A, B, C, D, E, F ثوابت في المعادلة (1.1) فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية خطية ذات معاملات ثابتة أما إذا كانت كل
المعاملات أو بعض منها دوال في x, y فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية خطية ذات معاملات متغيرة (العويضي وآخرون، 2005).

7.2.1. تعريف

إذا أعطيت معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة n فإن الحل الذي يحتوي على n من الدوال الاختيارية يسمى بالحل العام Solution
General، وأي حل مستخرج من الحل العام باختيار خاص للدوال الاختيارية يسمى
بالحل الخاص (Particular Solution) البكور، 2019).

8.2.1. تعريف

الحل الشاذ (المفرد) (Singular Solution): هو الحل الذي لا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار مناسب للدوال
الاختيارية (البكور، 2019).

9.2.1 تعريف

الشروط الحدودية Boundary Conditions للمعادلة التفاضلية الجزئية تعرف على النحو التالي:

1. شروط ديرشيلت الحدية (Dirichlet Boundary Conditions) وتعرف أيضا بالشروط الحدية من النوع الأول (: في هذه الحالة تعطى قيمة الدالة المجهولة u عند كل نقطة من النقاط الحدية ∂D للمنطقة المعطاة D .

2. شروط نيومان الحدية (Von- Neumann Boundary Conditions) وتعرف أيضا بالشروط الحدية من النوع الثاني (: عندما تعطى قيمة المشتقة الناطمية أو العمودية $\frac{\partial u}{\partial n}$ للدالة المجهولة u عند كل نقطة من النقاط الحدية ∂D .

3. شروط روبن الحدية (Robin Boundary Conditions) وتعرف أيضا بالشروط الحدية من النوع الثالث أو الشروط الحدية المختلطة (: في هذه الحالة تعطى قيمة التركيبة الخطية من الدالة المجهولة u والمشتقة الناطمية $\frac{\partial u}{\partial n}$ عند كل نقطة من النقاط الحدية ∂D (Kythe,2011).

10.2.1 تعريف

بفرض أن $X \subseteq R$ فإن الدالة f تكون:

1. دالة زوجية Even Function إذا كانت لها الخاصية :

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

2. دالة فردية Odd Function إذا كانت لها الخاصية:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X$$

11.2.1 تعريف

إذا كانت f دالة بحيث $f: D \rightarrow R$ ، وكانت $c \in D$ فإن الدالة f تكون متصلة عند النقطة c إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\sigma > 0$ بحيث

$$|x - c| < \sigma \quad \text{كلما كان} \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

حيث ϵ و σ أعداد حقيقية صغيرة موجبة، D مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية (Trench,2013).

12.2.1. تعريف

الدالة الحقيقية $f(x)$ مستمرة مقطعيًا في الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا كانت مستمرة عند كل نقطة في هذه الفترة ماعدا عدد منته من النقاط (سليمان، 2021).

13.2.1. تعريف

الدالة $f(x)$ تسمى دالة دورية إذا كان

$$f(x + K) = f(x)$$

لكل x ، K ثابت موجب ويسمى مقدار دورة الدالة (سليمان، 2021).

14.2.1. تعريف

إذا كانت f دالة دورية بمقدار $2L$ وكذلك f' و f'' دوال مستمرة مقطعيًا على الفترة $-L \leq x \leq L$ فإن متسلسلة فوريير للدالة $f(x)$ تعرف كما يلي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$$

حيث أن a_0, a_n, b_n تسمى بمعاملات فوريير Fourier Coefficients وتعطى بالعلاقة:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(\frac{n\pi}{L}x) dx , n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx , n = 1, 2, \dots \text{ (عبد، 2008).}$$

15.2.1. تعريف

1. إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة زوجية ودورية بمقدار 2π ، فإنه يمكن التعبير عنها بمتسلسلة فورييه بالشكل الآتي:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة فردية ودورية بدورة مقدارها 2π ، فإنه يمكن التعبير عنها بمتسلسلة فورييه بالشكل التالي:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (0 < x < L)$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \text{ (Asmar, 2005).}$$

مثال 1.2.1

أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(x) = x$ في الفترة $-1 \leq x \leq 1$.

الحل

من الواضح أن $L = 1$ ، والدورة $= 2$ وحيث أن الدالة $f(x) = x$ دالة فردية، بالتالي يمكن تمثيلها بمتسلسلة الجيب لفورييه كالتالي:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin \frac{n\pi}{1} dx$$

$$= \frac{-2n\pi \cos n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

إن متسلسلة فورييه لهذه الدالة هي

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(n\pi x)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin \pi x - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi x + \dots$$

(عبد، 2008)

16.2.1 تعريف

ليكن n, m أعداد صحيحة غير سالبة، تعرّف خاصية الدوال المتعامدة Orthogonally Functions properties كالتالي:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 2L & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 0 & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx = 0, \quad m, n \text{ لكل (Pinsky, 2011).}$$

17.2.1 تعريف

تسمى المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية مع شرطين حديين خطيين متجانسين بمسألة ستورم – ليوفيل *Problem Sturm-Liouville*، وتكتب على الصورة:

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + [q(x) + \lambda r(x) \frac{dy}{dx}] y = 0$$

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0$$

$$B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0$$

حيث q, p, r دوال حقيقية متصلة، p لها مشتقة متصلة، $r > 0$ لكل قيم x على الفترة $a \leq x \leq b$ ، بارامتر لا يعتمد على x ، A_1, A_2, B_1, B_2 ثوابت لا تساوي صفر في الوقت نفسه (العويضي وآخرون، 2005).

18.2.1. تعريف

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وجميع مشتقاتها متصلة عند النقطة a في الفترة $[x_0, x_1]$ ، فإن متسلسلة تايلور Taylor Series للدالة $f(x)$ عند النقطة a تعطى بالصورة التالية:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

مع ملاحظة أن متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ عند النقطة 0 تسمى بمتسلسلة ماكلورين Maclaurin Series وتعطى بالصيغة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

مثال (1.1)

أوجد الدالة التي تتقارب إليها متسلسلة تايلور التالية:

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots$$

من الواضح أن هذه المتسلسلة تتقارب إلى الدالة:

$$f(x) = \tan x$$

مثال (2.1)

أوجد الدالة التي تتقارب إليها متسلسلة تايلور التالية:

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

بإعادة كتابة المتسلسلة على الصورة:

$$f(x) = (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots) + (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots)$$

والتي تتقارب إلى الدالة

$$f(x) = \cos x + \sin x \text{ (Wazwaz, 2011).}$$

مثال (3.1)

أوجد الدالة التي تتقارب إليها متسلسلة تايلور التالية:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

من الواضح أن هذه المتسلسلة تتقارب إلى الدالة

$$f(x) = e^x \text{ (Wazwaz, 2011).}$$

ويمكن تعميم متسلسلة تايلور في متغير واحد إلى متسلسلة تايلور في متغيرين كالتالي

19.2.1 تعريف

إذا كانت $f(x, y)$ دالة في متغيرين x و y ، ولها مشتقات جزئية مستمرة فإن مفكوك متسلسلة تايلور لدالة

$f(x, y)$ عند النقطة (a, b) هو

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} [(x - a) f_x(a, b) + (y - b) f_y(a, b)] + \frac{1}{2!} [(x - a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x - a)(y - b) f_{xy}(a, b) + (y - b)^2 f_{yy}(a, b)] + \dots$$

20.2.1 تعريف

لتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة جبرية نقوم باستخدام أحد الفروق المنتهية الآتية

(Moin, 2010):

Forward Differences Approximation

1. تقريب الفروق الأمامية

لإيجاد تقريب الفرق الأمامي بالنسبة للمتغير x نستخدم مفكوك متسلسلة تايلور للدالة $f(x + h, y)$ حول النقطة (x, y) كالتالي

$$f(x + h, y) = f(x, y) + h f_x(x, y) + \frac{h^2}{2!} f_{xx}(x, y) + \dots$$

وبترتيب المعادلة يكون

$$f_x(x, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} - \frac{h}{2!} f_{xx}(x, y) + \dots$$

حيث h مقدار الإزاحة في اتجاه x ، والتي يمكن أن تكتب على الصورة

$$f_x(x, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} + O(h) \quad (2.1)$$

وهو ما يعرف بالفروق الأمامية لإيجاد المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمتغير x ، حيث $O(h)$ هو مقدار الخطأ وبإهمال هذا الخطأ فإننا نحصل على تقريب الفروق الأمامية للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمتغير x ، ويكون على الصورة

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Back Differences Approximation

2. تقريب الفروق الخلفية

بإيجاد مفكوك تايلور للدالة $f(x - h, y)$ حول النقطة (x, y) ، واتباع الخطوات السابقة فإننا نحصل على

$$f_x(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x - h, y)}{h} + O(h) \quad (3.1)$$

وهي الفروق الخلفية للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمتغير x ، وبإهمال الخطأ فإن

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x, y) - f(x - h, y)}{h}$$

وهو ما يعرف بتقريب الفروق الخلفية للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمتغير .

Central Differences Approximation

3. تقريب الفروق المركزية

بجمع المعادلتين (2.1) و(3.1) نحصل على

$$f_x(x, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h} + O(h)$$

وهو الفرق المركزي للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمتغير x ، وبإهمال الخطأ $O(h)$ الفرق المركزي للمشتقة نحصل على تقريب الجزئية الأولى بالنسبة للمتغير x ويكون

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}$$

21.2.1 تعريف

المشتقة الجزئية الثانية للدالة $f(x, y)$ عند النقطة (x, y) بالنسبة للمتغير x يمكن إيجادها باستخدام الفروق المركزية ومفكوك متسلسلة تايلور للدالتين $f(x + h, y)$ و $f(x - h, y)$ حول (x, y) كالتالي:

$$f(x + h, y) = f(x, y) + hf_x(x, y) + \frac{h^2}{2}f_{xx}(x, y) + \frac{h^3}{6}f_{xxx}(x, y) + O(h^4) \quad (4.1)$$

$$f(x-h, y) = f(x, y) - hf_x(x, y) + \frac{h^2}{2}f_{xx}(x, y) - \frac{h^3}{6}f_{xxx}(x, y) + O(h^4) \quad (5.1)$$

بجمع العلاقتين (4.1) و(5.1)، وإهمال الحدود من الدرجة الرابعة وما فوق بالنسبة لـ h نجد أن

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

حيث

$$[Aleyan,2020] \quad h \rightarrow 0 \quad O(h^2) \rightarrow 0$$

Gaussian Elimination Method

22.2.1. تعريف طريقة جاوس للحذف

تعرف طريقة جاوس للحذف بأنها إحدى الطرق المباشرة لإيجاد الحل للنظام المعادلات الخطية وذلك بتحويل هذا النظام إلى الشكل المثلثي العلوي عن طريق ما يعرف بعمليات الصف الأولية ومن ثم بالتعويض الخلفي، ويمكن كتابة هذه الخطوات كالتالي:

- وضع نظام المعادلات الخطية $AX = b$ على الصورة:

$$[A|b]$$

وتسمى بالمصفوفة الموسعة Augment Matrix، حيث A هي مصفوفة المعاملات، X هي مصفوفة المجاهيل، b هي مصفوفة الحدود المطلقة.

- الآن بإجراء عمليات الصف الأولية على هذه المصفوفة وهي:

1. ضرب أي صف في المصفوفة الموسعة في أي ثابت غير صفري. 2. تبديل أي صفين في المصفوفة الموسعة.

3. ضرب الصف i في المصفوفة الموسعة في أي ثابت $\alpha \neq 0$ وجمع الصف الناتج مع الصف k ، تبديل الصف k بالصف i ومن ثم الجديد، والصف i يسمى بالصف المتحور.

4. ونستمر في إجراء عمليات الصف الأولية حتى نحصل على المصفوفة المثلثية العليا.

• بعد الحصول على المصفوفة المثلثية العليا يتم التعويض الخلفي لإيجاد قيم المجاهيل المطلوبة

(Esfandiari,2017).

مثال (4.1)

باستخدام طريقة جاوس للحذف حل النظام الخطي التالي (Esfandiari,2017):

$$-1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3$$

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -1$$

$$-3x_1 + 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 6$$

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = -4$$

الحل

بكتابة هذا النظام على الصورة

$$AX = b$$

إذاً

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الموسعة تكون

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

الآن بإجراء عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة كالتالي:

1. بضرب الصف الأول في 2 وجمع الصف الناتج مع الصف الثاني، كذلك بضرب الصف الأول في (-3)،

وجمع الصف الناتج مع الصف الثالث، وأيضاً جمع الصف الأول مع الثالث نحصل على

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 10 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. بضرب الصف الثاني في (-3) وجمع الصف الناتج مع الصف الأخير، ثم ضرب الصف الثالث في 25، وجمع الصف الناتج مع

الصف الأخير نحصل على

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{-23}{7} & \frac{-69}{7} \end{array}$$

وبالتعويض الخلفي فإننا نحصل على قيم المجاهيل وهي

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 3$$

23.2.1. تعريف

تسمى القيمة المطلقة للخطأ أو الخطأ المطلق في التقريب بالخطأ المطلق *Absolute Error* ويحسب من العلاقة

$$|E| = |z - \bar{z}|$$

حيث z هو الحل المضبوط، \bar{z} هو الحل التقريبي (Leveque,2007).

24.2.1. تعريف

تعرف النسبة بين الخطأ المطلق والحل التقريبي بالخطأ النسبي *Relative Error*، ويحسب من العلاقة
(Leveque,2007):

$$|E| = \left| \frac{z - \bar{z}}{\bar{z}} \right|$$

25.2.1. تعريف

بفرض أن N بعد الفضاء الذي اخترنا العنصر منه، و K درجة كثيرة الحدود التي تم اختيارها على هذا العنصر، عندئذٍ تعرف

$$\frac{1}{K!N!} \text{ درجات الحرية Degrees of Freedom بأنها } (K+N)! \text{ مطيب، 2016).}$$

26.2.1. تعريف

يتم ايجاد دوال الشكل في حالة المثلث الخطي بثلاثة عقد بالشكل التالي نفرض أن الاحداثيات

الكارتيزية لعقد المثلث الثلاثة هي

$$A_1 = (x_i, y_i), \quad A_2 = (x_j, y_j), \quad A_3 = (x_k, y_k)$$

ولهذه العقد ثلاث درجات حرية حيث

$$p(A_1) = u_i, \quad p(A_2) = u_j, \quad p(A_3) = u_k$$

نختار كثيرة الحدود الملائمة لعدد درجات الحرية ولنكن

$$p = a_1 + a_2x + a_3y \quad (6.1)$$

وعند كل عقدة تكون

$$u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i$$

$$u_j = a_1 + a_2x_j + a_3y_j$$

$$u_k = a_1 + a_2x_k + a_3y_k$$

والتي يمكن أن تكتب على شكل مصفوفات

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نحصل على

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في المعادلة (6.1) نحصل على

$$p = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k$$

حيث

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2\Delta} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \\ N_j &= \frac{1}{2\Delta} [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] \\ N_k &= \frac{1}{2\Delta} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \\ 2\Delta &= (x_i - x_k)(y_i - y_k) - (x_j - x_k)(y_i - y_k) \end{aligned} \quad (7.1)$$

وتعرّف بدوال الشكل في الإحداثيات الديكارتية للمثلث الخطي بثلاث عقد (مطيبي، 2016).

Important Theorems

3.1 نظريات هامة

1.3.1 نظرية (Theorem superposition principle)

إذا كانت u_1 و u_2 حلان مستقلان للمعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة فإن التركيبة الخطية $u = c_1u_1 + c_2u_2$ حيث c_1 و c_2 ثوابت تكون أيضاً حل لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة. وإذا كان مجموع u_1 و u_2 يحقق الشروط الحدية الخطية المتجانسة فإن التركيبة الخطية $u = c_1u_1 + c_2u_2$ تحقق ذلك أيضاً (Asmer, 2005).

2.3.1 نظرية (Theorem double sine series representation)

نفرض أن $f(x, y)$ دالة معرفة لكل $0 < x < a$ و $0 < y < b$ ، فإن متسلسلة فورييه المضاعفة للجيب الدالة $f(x, y)$ هي

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

حيث B_{mn} معاملات متسلسلة فورييه المضاعفة للجيب وتعطى بالعلاقة التالية:

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy \quad (\text{Asmer, 2005}).$$

3.3.1 نظرية (Green s' Theorem)

بفرض أن Ω مجموعة متعددة الترابط ومحدودة، ونفرض أن الدالتان $u(x, y)$ و $v(x, y)$ دوال مستمرة ومشتقاتها من الرتبة الثانية مستمرة أيضاً على المنطقة Ω وعلى الحدية Γ وبالتالي فإن (Asmer, 2005):

$$\iint_{\Omega} u \nabla^2 v dx dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy$$

(Existence and Uniqueness of the Finite Difference Method for Dirichlet Problem)

4.3.1 نظرية

نفرض أن Ω منطقة محدودة ومترابطة ومنتظمة، وكانت معادلة بواسون معرفة على هذه المنطقة مع شروط ديرشليت الحدية أي أن

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & \text{on } \Omega, \\ Bc: u = g(x, y), & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad u = u(x, y)$$

حيث $f(x, y)$ و $g(x, y)$ دوال اختيارية ليست مستمرة بضرورة، بالتالي فإنه عند حل هذه المعادلة مع شروط ديرشيلت الحدية بطريقة الفروق المنتهية يكون لها حل وحيد وتعرف هذه النظرية بنظرية الوجود والوحدانية لحل مسألة ديرشيلت بطريقة الفروق المنتهية (Stanoyevitch, 2005).

5.3.1 نظرية (Existence and Uniqueness for the Poisson PDE with Neumann Boundary Conditions)

بفرض أنه لدينا معادلة بواسون معرفة على المنطقة الملساء والمحدودة Ω مع شروط نيومان الحدية غير المتجانسة أي أن

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & \text{on } \Omega, \\ Bc: \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y), & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad u = u(x, y)$$

حيث $f(x, y)$ دالة مشتقاتها الجزئية مستمرة مقطعيًا على المنطقة Ω ، $g(x, y)$ دالة مستمرة مقطعيًا على $\partial\Omega$ فإن معادلة بواسون يكون لها حل إذا فقط إذا كان تحقق الشرط:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} g(x, y) dS$$

ويسمى هذا الشرط بالشرط التوافقي Compatibility Condition.

ويكون هذا الحل غير وحيد ويتحدد بإضافة ثابت جمعي (Stanoyevitch, 2005).

الفصل الثاني

الطرق التحليلية لحل بعض المعادلات الإهليجية

Analytical Methods for Solving Some Elliptic Equations

1.2 المقدمة

Introduction

في هذا الفصل سندرس بعض الطرق التحليلية لحل بعض المعادلات الإهليجية المتجانسة وغير المتجانسة في بعدين مع شروط حدية شبه متجانسة وغير متجانسة، ومن أهم هذه الطرق:

Separation of Variables Method [SVM]

• طريقة فصل المتغيرات

Eigen Function's Expansion Method [EFM]

• طريقة مفكوك الدوال الذاتية

2.2. طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلات الإهليجية المتجانسة

Separation of Variables Method to Solve Homogeneous Elliptic equations [SVM]

تستخدم هذه الطريقة في حل المعادلات الإهليجية الخطية المتجانسة، مع شروط حدية متجانسة أو شبه متجانسة ومن خلال هذه الطريقة يتم تحويل المعادلة الجزئية المعطاة إلى معادلة تفاضلية عادية يسهل حلها.

1.2.2. معادلة لابلاس مع شروط حدية متجانسة

من أهم المعادلات الإهليجية الخطية المتجانسة معادلة لابلاس Laplace's equation والصورة العامة لهذه المعادلة في بعدين هي

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ في النطاق } D$$

$$B.C: u = 0 \text{ أو } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ أو } \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \text{ على } \partial$$

حيث

$$D = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

u هي الدالة المجهولة، α و b و a أعداد حقيقية، h دالة اختيارية

∂D هي مجموعة النقاط الحدية للمنطقة .

عند دراسة معادلة لابلاس مع شروط حدية متجانسة نحصل على الحل التافه أو الحل الصفري بالتالي لتغلب على هذه المشكلة يتم فرض أن أحد الشروط الأربعة غير صفري وتعتبر الشروط الحدية في هذه الحالة شبه متجانسة، وسيتم دراسة ثلاث حالات لمعادلة لابلاس مع شروط حدية شبه متجانسة كالآتي:

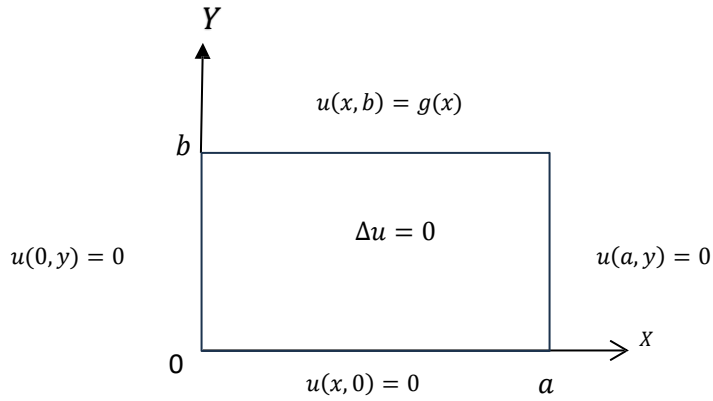
First: Dirichlet Boundary Conditions

أولاً: شروط ديرشليت الحدية

ندرس معادلة لابلاس التالية والموضحة بالشكل (1.2):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

حيث $a, b \in R$ و $g(x)$ دالة في المتغير .



الشكل (1.2): يوضح معادلة لابلاس مع شروط ديرشليت الحدية

الحل

نفرض أن الحل يكون على الشكل التالي:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

حيث $X(x)$ دالة في المتغير x و $Y(y)$ دالة في المتغير .

بتفاضل $u(x, y)$ بالنسبة للمتغير x مرتين نحصل على

$$u_{xx}(x, y) = X''(x)Y(y) \quad (1.2)$$

وبالمثل نفاضل $u(x, y)$ بالنسبة للمتغير y مرتين فنحصل على:

$$u_{yy}(x, y) = X(x)Y''(y) \quad (2.2)$$

بالتعويض بالمعادلتين (1.2) و (2.2) في معادلة لابلاس فتكون

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

الآن بقسمة هذه المعادلة على $X(x)Y(y)$ نجد أن

$$\frac{-X''(x)}{X(x)} = \frac{y''(y)}{Y(y)}$$

وحيث أن الجانب الأيسر يعتمد على المتغير x ، والجانب الأيمن يعتمد على المتغير y ، ولكي تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوي نفس الثابت وليكن K بحيث:

$$\frac{-X''(x)}{X(x)} = K \quad , \quad \frac{y''(y)}{Y(y)} = K$$

وباستخدام طريقة فصل المتغيرات فإننا نحصل على المعادلات العادية الآتية:

$$X''(x) + KX(x) = 0 \quad (3.2)$$

$$Y''(y) - KY(y) = 0 \quad (4.2)$$

الآن نوجد الحل للمعادلتين العاديتين (3.2) (4.2)، بتطبيق الشروط الحدية المعطاة أي أن

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0$$

هذا يعني أن

$$Y(0) = 0$$

كذلك

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0$$

يؤدي إلى

$$X(0) = 0$$

أيضاً الشرط الحدي

$$u(a, y) = X(a)Y(y) = 0$$

يعني أن

$$X(a) = 0$$

لدينا ثلاث حالات للثابت .

• الحالة الأولى: عندما $= 0$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية العادية (3.2) يكون

$$X''(x) = 0$$

بالتكامل نحصل على

$$X'(x) = c$$

وبالتكامل مرة أخرى

$$X(x) = cx + d$$

ومن الشروط الحدودية

$$X(0) = c(0) + d = 0$$

نعني أن

$$d = 0$$

$$X(a) = ca + 0 = 0$$

$$ca = 0$$

حيث $a \neq 0$ فإن

$$c = 0$$

وهذا يعني أن

$$X(x) = 0$$

إذاً في هذه الحالة نحصل على الحل الصفري.

• الحالة الثانية: عندما $K > 0$ ، نفرض أن $K = \lambda^2$ حيث $\lambda \in R$

المعادلة التفاضلية العادية (3.2) تصبح كالتالي:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

وحلها العام هو

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

وبتطبيق الشروط الحدية $X(a) = 0$, $X(0) = 0$ نحصل على

$$X(0) = A \cos(\lambda 0) + B \sin(\lambda 0) = 0$$

ومنها يكون

$$A = 0$$

والحل العام يكون

$$X(x) = B \sin(\lambda x)$$

$$X(a) = B \sin(\lambda a) = 0$$

حيث

$$B \neq 0$$

إذاً

$$\sin(\lambda a) = 0$$

ومنها

$$\lambda a = n\pi$$

فتكون

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}$$

وهي القيم الذاتية المناظرة للدوال الذاتية $\sin\left(x\right)$ حيث $n = 1, 2, \dots$

إذاً

$$K = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n \geq 1$$

وبذلك فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول للمعادلة (2.2) أي أن

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad , n \geq 1$$

• الحالة الثالثة: عندما $K < 0$ ، نفرض أن $-\lambda^2 =$

بالتعويض عن قيمة K في المعادلة (3.2)

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة يكون

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

وبتطبيق الشرط الحدي $X(0) = 0$

نجد أن

$$X(0) = Ae^0 + Be^0 = 0$$

ومنها

$$A = -B$$

وبالتعويض عن قيمة B في الحل العام يكون

$$X(x) = A(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$$

وبتطبيق الشرط الحدي

$$X(a) = 0$$

نجد أن

$$X(a) = A(e^{\lambda a} - e^{-\lambda a}) = 0$$

وحيث أن

$$e^{\lambda a} - e^{-\lambda a} \neq 0$$

فإن

$$A = 0$$

ومنها

$$B = 0$$

هذا يعني أن

$$X(x) = 0$$

وهو الحل الصفري.

إذاً حل المعادلة (3.2) يكون على الصورة

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

الآن بالتعويض في المعادلة (4.2) عن $K = \lambda^2$ نحصل على

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$Y(y) = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}$$

وبتطبيق الشرط الحدودي

$$Y(0) = 0$$

نجد أن

$$Y(0) = C_1 e^{(0)\lambda} + C_2 e^{-\lambda(0)} = 0$$

ومنها

$$C_2 = -C_1$$

وبالتعويض في الحل العام يكون

$$Y(y) = C_2(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$$

ويمكن أن يكتب على الصورة

$$Y(y) = C \sinh \lambda y$$

حيث

$$C = 2C_1$$

وذلك باستخدام العلاقات الأتية

$$e^{\lambda y} = \cosh \lambda y + \sinh \lambda y$$

$$e^{-\lambda y} = \cosh \lambda y - \sinh \lambda y$$

ولكن

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}$$

هذا يعني أن هناك عدد لانتهائي من الحلول، بالتالي فإن حل المعادلة (4.2) يكون على الصورة التالية

$$Y_n(y) = C_n \sinh \frac{n\pi}{a} y$$

وبضرب الحلول غير التافهة لمعادلة لابلاس مع شروط ديرشليت الحدية شبه المتجانسة

$$u_n(x, y) = A_n \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sinh \left(\frac{n\pi}{a} y \right)$$

حيث $n \geq 1, A_n = B_n C$

وباستخدام نظرية (1.3.1) فإن

$$u(x, y) = A_1 \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) \sinh \left(\frac{\pi}{a} y \right) + A_2 \sin \left(\frac{2\pi}{a} x \right) \sinh \left(\frac{2\pi}{a} y \right) + \dots$$

أي أن

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sinh \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \quad (5.2)$$

ولإيجاد قيمة الثابت A_n في المعادلة (5.2)، فإننا نستخدم الشرط الأخير

$$u(x, b) = g(x)$$

إذا

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = g(x)$$

وباستخدام متسلسلة الجيب لفورييه فإن:

$$A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, n = 1, 2, \dots \quad (\text{Asmer, 2005}) \quad (6.2)$$

مثال 1.2)

أوجد حلًا لمعادلة لابلاس (Karunanithi & Jeevitha, 2017):

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3$$

بحق الشروط الحدية التالية

$$u(0, y) = 0, \quad u(3, y) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 3) = 100$$

الحل

حل معادلة لابلاس مع شروط ديرشليت الحدية يعطى بالعلاقة (5.2)، وبتطبيق الشرط الحدودي الأخير لإيجاد A_n ، حيث

$$g(x) = 100, \quad a = b = 3$$

بالتالي فإن

$$A_n = \frac{2}{3 \sinh\left(\frac{n\pi 3}{3}\right)} \int_0^3 100 \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) dx = \frac{400}{(2K-1)\pi \sinh(2K-1)\pi}$$

حيث

$$\int_0^3 \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) dx = \begin{cases} 0 & n = 2K \\ \frac{6}{n\pi} & n = 2K - 1 \end{cases}$$

وبالتعويض عن قيمة A_n في الصورة العامة للحل يكون

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2K-1)\pi}{3}x\right) \sinh\left(\frac{(2K-1)\pi}{3}y\right)}{(2K-1) \sinh(2K-1)\pi}$$

$$u(x, y) = \frac{400 \sin \frac{\pi x}{3} \sinh \frac{\pi y}{3}}{\pi \sinh \pi} + \frac{400 \sin \pi x \sinh \pi y}{3\pi \sinh 3\pi} + \dots$$

مثال (2.2)

أوجد حل لمعادلة لابلاس مع الشروط الحدية (Asmer, 2005):

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq y \leq 2 \\ B.C: & \quad u(x, 0) = 0, & \quad u(x, 2) = x \\ & \quad u(0, y) = 0, & \quad u(1, y) = 0 \end{aligned}$$

الحل

نلاحظ أنّ

$$a = 1, b = 2, g(x) =$$

نعلم أنّ حل معادلة لابلاس في هذه الحالة يعطى بالعلاقة (5.2)، وبتطبيق الشرط الحدودي الأخير؛ لإيجاد قيمة A_n نجد أنّ

$$A_n = \frac{2}{\sinh(2n\pi)} \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi \sinh(2n\pi)}$$

إذاً

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sinh(2n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)$$

$$u(x, y) = \frac{2 \sin(\pi x) \sinh(\pi y)}{\pi \sinh 2\pi} - \frac{\sin(2\pi x) \sinh(2\pi y)}{\pi \sinh 4\pi} + \dots$$

وهو حل لمعادلة لابلاس تحت الشروط المعطاة.

مثال (3.2)

أوجد حلاً لمعادلة لابلاس التالية (Chopade&Rastogi, 2018):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B. c: \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 10$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0$$

الحل

حل معادلة لابلاس في هذه الحالة يعطى بالعلاقة (5.2)، وتطبيق الشرط الحدي الثاني لإيجاد A_n ، حيث

$$g(x) = 10, \quad a = b = 1$$

وعليه فإن

$$A_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 10 \sin(n\pi x) dx = \frac{20}{n\pi \sinh(n\pi)} (1 - (-1)^n)$$

حيث

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{2}{n\pi} & n = 2k - 1 \end{cases}$$

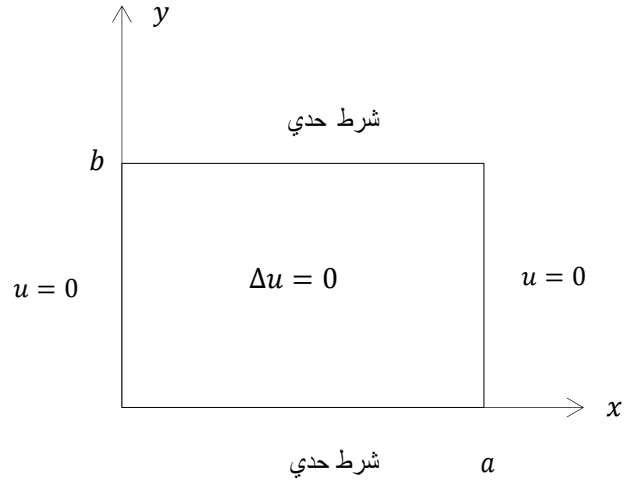
وبالتعويض عن قيمة A_n في العلاقة (5.2) نحصل على الحل العام ويكون

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40 \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)}{n\pi \sinh(n\pi)}, \quad n = 2k - 1$$

ملاحظة (1.2)

إذا كان $u(x, y) = X(x)Y(y)$ حل لمعادلة لابلاس في النطاق مع الشروط الحدية المتجانسة على الجوانب العمودية كما موضحه

في الشكل (2.2)



الشكل 2.2: يوضح معادلة لابلاس مع شروط حدية متجانسة على الجوانب العمودية

فإنَّ الحل العام لمعادلة لابلاس في هذه الحالة يكون على الصورة:

$$u(x, y) = u_n(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \left(A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \right)$$

حيث A_n و B_n ثوابت اختيارية ($n = 1, 2, \dots$) Asmer, 2005).

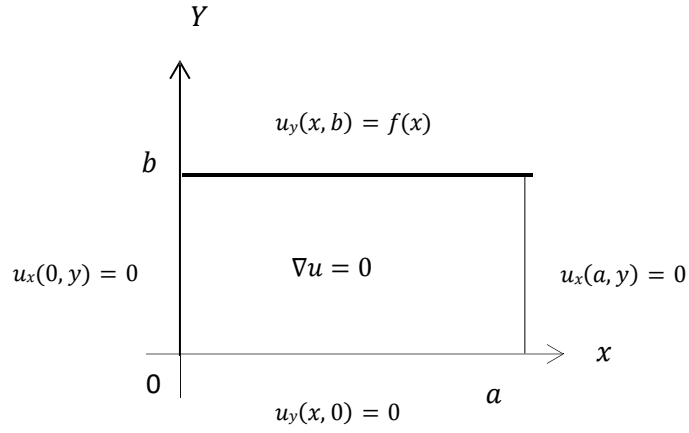
Second: Von-Neumann Boundary Condition:

ثانياً: شروط نيومان الحدية

ندرس معادلة لابلاس المعرفة على المنطقة الموضحة بالشكل 3.2) حيث:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 \leq x \leq a, & \quad 0 \leq y \leq b \\ B.C: u_x(0, y) &= 0, & u_x(a, y) &= 0 \\ u_y(x, 0) &= 0, & u_y(x, b) &= f(x) \end{aligned}$$

حيث $f(x)$ دالة في المتغير x ($a, b \in R$) Wazwaz, 2009).



الشكل (3.2): يوضح معادلة لابلاس مع شروط نيومان الحدية

الحل

قبل الشروع في عملية الحل يجب ملاحظة أن الشرط الضروري لحل المسائل من هذا النوع، هو أن تكامل الشرط الحدي غير المتجانس يتلاشى على الحدود وذلك استنادا للنظرية (5.3.1) أي أن:

$$\int_0^a f(x) dx = 0 \quad (7.2)$$

ويعني فيزيائيا أنه لا يوجد تدفق للحرارة وهي الحالة المستقرة التي ندرسها، أما في حالة تدفق الحرارة أي أن

$$\int_0^a f(x) dx \neq 0$$

فإنه لا يوجد حل لمسألة نيومان (Wazwaz, 2009).

الآن بفرض أن الشرط (7.2) متحقق، ونفرض أن الحل على الصورة التالية:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

حيث $X(x)$ دالة في المتغير x ، $Y(y)$ دالة في المتغير y .

وبتفاضل الدالة $u(x, y)$ بالنسبة لمتغير x نحصل على

$$u_{xx}(x, y) = X''(x)Y(y) \quad (8.2)$$

وبالمثل نفاضل الدالة $u(x, y)$ بالنسبة لمتغير y مرتين فنحصل على

$$u_{yy}(x, y) = Y''(y)X(x) \quad (9.2)$$

بالتعويض بالمعادلتين (8.2) و (9.2) في معادلة لابلاس

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0$$

بقسمة هذه المعادلة على $X(x)Y(y)$ نجد أن

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \quad (10.2)$$

وحيث أن الجانب الأيسر دالة في x ، والجانب الأيمن دالة في y ، بالتالي فإن هناك ثابت (K) بحيث:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K, \quad \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = K$$

ومن هنا نحصل على المعادلات العادية التالية:

$$X''(x) - KX(x) = 0 \quad (11.2)$$

$$Y''(y) + KY(y) = 0 \quad (12.2)$$

بتطبيق الشروط الحدية حيث

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

وبالتفاضل بالنسبة لمتغير

$$u_x(x, y) = X'(x)Y(y)$$

إذاً

$$u_x(0, y) = X'(0)Y(y) = 0$$

نعلم أن

$$Y(y) \neq 0$$

وعليه فإن

$$X'(0) = 0$$

كذلك الشرط الحدي

$$u_x(a, y) = 0$$

أي أنّ

$$u_x(a, y) = X'(a)Y(y) = 0$$

ومن هنا يكون

$$X'(a) = 0$$

وبالمثل الشرط

$$u_y(x, 0) = 0$$

يعني أنّ

$$u_y(x, 0) = X(x)Y'(0) = 0$$

ومن هنا يكون

$$Y'(0) = 0$$

بدراسة الحالات الثلاثة لـ K كالآتي:

الحالة الأولى: إذا كانت $K = 0$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية العادية (11.2) نحصل على

$$X''(x) = 0$$

بالتكامل

$$X'(x) = C$$

بالتكامل مرة أخرى نحصل على

$$X(x) = Cx + D$$

بتطبيق الشرط الحدي

$$X'(0) = 0$$

يكون

$$X'(0) = C = 0$$

ومن الشرط الحدي الثاني نجد أنَّ

$$X'(a) = C = 0$$

أي أنَّ $C = 0$ ، وهذا يعني أنَّ $X(x) = D$ ، وهو حل غير صفري.

وباتباع نفس الأسلوب لحل المعادلة (12.2)، فإننا نحصل على حل غير صفري أي أنَّ

$$Y(y) = H$$

ومنها يكون الحل العام على الصورة

$$u(x, y) = DH$$

حيث D, H ثابتان اختياريان.

الحالة الثانية: إذا كانت $K > 0$ ، نفرض أنَّ $K = \lambda^2$ ، حيث λ عدد حقيقي

بالتعويض في المعادلة (11.2) نجد أنَّ:

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$$

وحل هذه المعادلة هو

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

وبالتفاضل بالنسبة لمتغير x نجد أنَّ

$$X'(x) = \lambda Ae^{\lambda x} - \lambda Be^{-\lambda x}$$

وبتطبيق الشروط الحدية نحصل على

$$X'(0) = \lambda Ae^0 - \lambda Be^0 = \lambda(A - B) = 0$$

ومنها يكون

$$A = B$$

بالتعويض عن $A = B$ نجد أنّ

$$X'(a) = \lambda A e^{\lambda a} - \lambda A e^{-\lambda a} = \lambda A (e^{\lambda a} - e^{-\lambda a}) = 0$$

حيث أنّ

$$e^{\lambda a} - e^{-\lambda a} \neq 0$$

إذاً

$$\lambda A = 0$$

وعليه فإنّ

$$A = B = 0$$

وهذا يعني أنّ $X(x) = 0$ وهو الحل الصفري.

الحالة الثالثة: إذا كانت $K < 0$ ، نفرض أن $K = -\lambda^2$ ، حيث λ عدد حقيقي

بالتعويض في المعادلة (11.2) فإنّ:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

وحل هذه المعادلة هو

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)$$

$$X'(x) = \lambda c_1 \cos(\lambda x) - \lambda c_2 \sin(\lambda x)$$

بتطبيق الشرط الحدودي $X(0) = 0$ نحصل على

$$c_1 = 0 \text{ ومنها } \lambda c_1 = 0$$

إذاً

$$X(x) = c_2 \cos(\lambda x)$$

لإيجاد قيمة λ نعوض بالشرط الحدودي الثاني أي أنّ

$$X'(a) = -\lambda c_2 \sin(\lambda a) = 0, \quad \lambda c_2 \neq 0$$

ومن هنا نجد أنّ

$$\sin(\lambda a) = 0$$

وعليه فإنّ

$$\lambda a = n\pi$$

ومن هنا فإنّ

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \quad K = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n \geq 0$$

حيث أنّ λ هي القيم الذاتية المناظرة للدوال الذاتية $\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ ، وهذا يعني أنّ هناك عدد لا نهائي من الحلول

للمعادلة (11.2) والتي يمكن أن نكتب بالشكل التالي

$$X_n(x) = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

وبالتعويض عن قيمة $K = -\lambda^2$ في المعادلة (12.2) نجد أنّ

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$Y(y) = D_1 e^{\lambda y} + D_2 e^{-\lambda y}$$

وبتطبيق الشرط الحدي $Y(0) = 0$ نجد أنّ

$$Y'(y) = \lambda (D_1 e^{\lambda y} - D_2 e^{-\lambda y})$$

$$Y'(0) = \lambda (D_1(1) - D_2(1)) = \lambda (D_1 - D_2) = 0$$

حيث أنّ

$$\lambda \neq 0$$

وهذا يعني أن

$$D_1 = D_2$$

إذاً

$$Y(y) = D_1(e^{\lambda y} + e^{-\lambda y})$$

هو الحل العام للمعادلة (12.2) والتي يمكن كتابته على الشكل التالي

$$Y(y) = D \cosh \lambda y$$

وذلك باستخدام العلاقات التي تربط بين الدوال الأسية والدوال الزائدية حيث

$$D = 2D_1$$

نعلم أن

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}$$

وبالتعويض عن λ في الحل العام والتي تعني أن هناك عدد لانتهائي من الحلول التي تحقق المعادلة (12.2) نحصل على

$$Y_n(y) = D_n \cosh \frac{n\pi y}{a}, \quad n \geq 0$$

الآن بضرب الحلول غير الصفريية نجد أن

$$u_n(x, y) = C_n D_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n \geq 0$$

بفرض أن $B_n = C_n D_n$ بحيث يحقق الشروط الحدية المتجانسة، وبإعادة صياغة الحل فإننا نحصل على المعادلة

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

ويمكن أن نكتب المعادلة السابقة على الصورة الآتية

$$u(x, y) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.2)$$

حيث $B_0 = DH$ ، كذلك يمكن تحديد قيمة B_n من الشرط الحدودي $u_y(x, b) = f(x)$ كمايلي:

$$u_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

إذاً

$$u_y(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = f(x)$$

وهي متسلسلة جيب التمام لفورييه حيث

$$B_n = \frac{2}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (14.2)$$

نلاحظ أن الثابت B_0 يندم عند تطبيق الشرط الحدي $u_y(x, b) = f(x)$ ، وليس هناك شرط حدي يساعدنا في إيجاد قيمة هذا الثابت، بالتالي فإن هذا الثابت يكون اختياريًا. (Wazwaz, 2009)

مثال (4.2)

باستعمال طريقة فصل المتغيرات حل مسألة القيمة الحدية (Wazwaz, 2009):

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x, y < \pi \\ B.C: u_x(0, y) &= 0, & u_y(x, 0) &= 0 \\ u_x(\pi, y) &= 0, & u_y(x, \pi) &= \sinh \pi \cos x \end{aligned}$$

الحل

صيغة الحل لهذا النوع من المسائل تعطى بالعلاقة (13.2)، لكن قبل ذلك يجب التأكد من أن المسألة المعطاة قابلة للحل وذلك من خلال تحقق الشرط (7.2) أي أن

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\pi} \sinh \pi \cos x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \sinh \pi \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\
&= \sinh \pi (\sin \pi - \sin 0) = 0
\end{aligned}$$

إذا مسألة نيومان المعطاة قابلة للحل.

نوجد قيمة B_n من العلاقة (14.2) كالآتي:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi)} \int_0^{\pi} \sinh \pi \cos x \cos(nx) \, dx \\
&= \frac{2 \sinh \pi}{\pi \sinh(\pi)} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1
\end{aligned}$$

حيث أن

$$\int_0^{\pi} \cos x \cos(nx) \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

إذاً

$$u(x, y) = B_0 + \cos x \cosh y$$

وهو الحل العام لمعادلة لابلاس تحت شروط الحدية المعطاة.

مثال (5.2)

حل معادلة لابلاس الأتية (Asmer, 2005):

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi \\
B.C : u_x(0, y) &= 0, & u_x(\pi, y) &= 0 \\
u_y(x, 0) &= 0, & u_y(x, \pi) &= \frac{\pi}{2} - x
\end{aligned}$$

الحل

يجب التأكد أولاً من قابلية الحل

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{\pi}{2}(\pi) - \frac{(\pi)^2}{2} = 0$$

بالتالي فإن المسألة المعطاة قابلة للحل.

حيث أن صيغة الحل لهذا النوع من المعادلات تعطى بالعلاقة (13.2)، وبإيجاد قيمة B

حيث

$$a = b = \pi \quad , \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

إذاً

$$B_n = \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi)} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{4}{n^3\pi \sinh(n\pi)}$$

مع ملاحظة أن

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & n = 2k - 1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

وبالتعويض عن قيمة B_n فإننا نحصل على

$$u(x, y) = B_0 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x \cosh(2k-1)y}{(2k-1)^3 \sinh(2k-1)\pi}$$

$$u(x, y) = B_0 + \frac{4 \cos x \cosh y}{\sinh \pi} + \frac{4 \cos 3x \cosh 3y}{27 \sinh 3\pi} + \dots$$

Third: Robin (Mixed) Boundary Conditions

ثالثاً: شروط روبن (المختلطة) الحدية

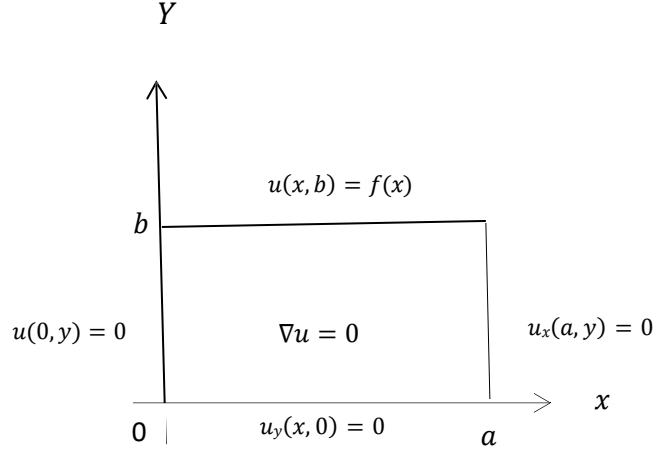
ندرس معادلة لابلاس مع الشروط الحدية المختلطة الموضحة في الشكل (4.2) كالتالي:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b$$

$$B.C : \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0$$

حيث $a, b \in R$ ، دالة $f(x)$ في المتغير .



الشكل (4.2): يوضح معادلة لابلاس مع الشروط الحدية المختلطة

الحل

باتباع نفس خطوات الحل للحالتين السابقتين فإن الحل العام لمعادلة لابلاس مع الشروط الحدية المختلطة شبه المتجانسة يكون على الصورة الآتية:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x \right) \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} y \right) \quad (16.2)$$

حيث

$$A_n = \frac{2}{a \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} b \right)} \int_0^a f(x) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x \right) dx \quad (17.2)$$

مثال (6.2)

أوجد حل معادلة لابلاس (الآتية) (Ghassemi, Panahi, & Kohansal, 2016):

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq y \leq 2 \\ B.C : u_y(x, 0) &= 0, & u_x(1, y) &= 0 \\ u(0, y) &= 0, & u(x, 2) &= 100 \end{aligned}$$

الحل

مما سبق حل هذه المعادلة يعطى بالعلاقة (16.2)، حيث

و بإيجاد قيمة A_n كالتالي: $a = 1, b = 2, f(x) = 100$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\cosh((2n-1)\pi)} \int_0^1 100 \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) dx \\ &= \frac{200}{\cosh(2n\pi - \pi)} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right) \\ &= \frac{400}{\pi(2n-1) \cosh(2\pi n - \pi)} \end{aligned}$$

بالتالي فإن حل معادلة لابلاس المعطاة يكون على الصورة

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400 \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) \cosh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}y\right)}{(2n-1)\pi \cosh(2\pi n - \pi)} \\ &= \frac{400 \sin \frac{\pi x}{2} \cosh \frac{\pi y}{2}}{\pi \cosh \pi} + \frac{400 \sin \frac{3\pi x}{2} \cosh \frac{3\pi y}{2}}{3\pi \cosh 3\pi} + \dots + \dots \end{aligned}$$

2.2.2 معادلة لابلاس مع شروط حدية غير متجانسة

سندرس ثلاث حالات لمعادلة لابلاس مع الشروط الحدية غير المتجانسة.

First: Dirichlet Boundary Conditions

أولاً: شروط ديرشليت الحدية

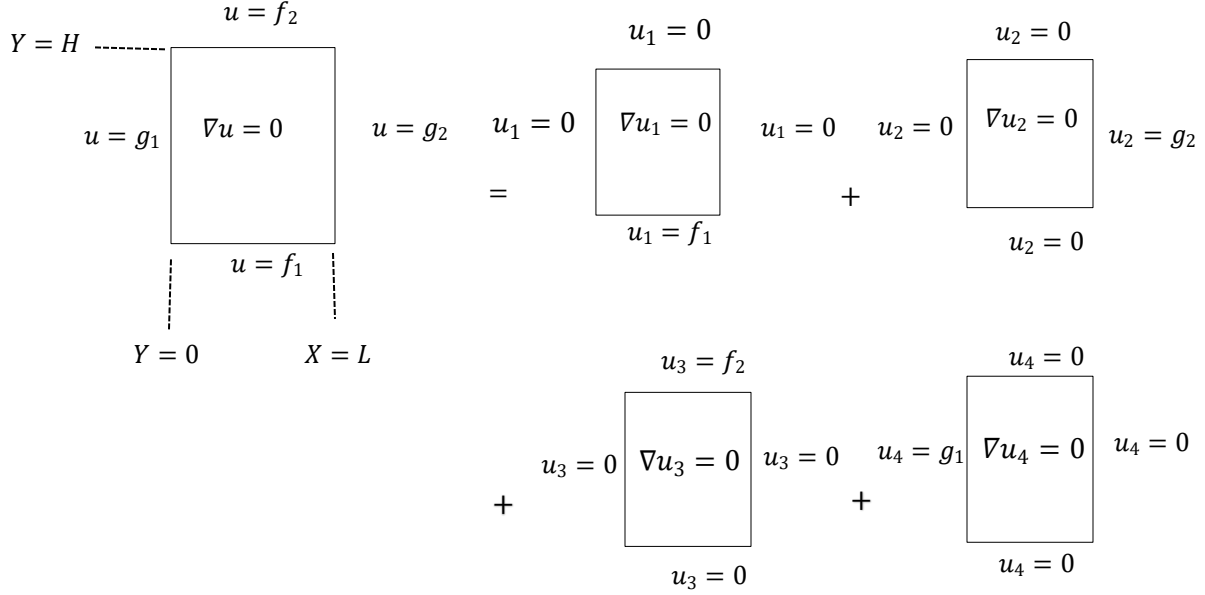
ندرس معادلة لابلاس الآتية (Asmer, 2005):

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\ B.C : u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, H) = f_2(x) \\ u(0, y) &= g_1(y), \quad u(L, y) = g_2(y) \end{aligned} \quad (18.2)$$

حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دوال في المتغير x ، و $g_1(y)$ و $g_2(y)$ دوال في المتغير y .

الحل

لحل هذه المعادلة يتم تقسيم المسألة الأصلية إلى أربعة مسائل جزئية كما في الشكل (5.2) الآتي



الشكل (5.2): طريقة حل معادلة لابلاس مع شروط ديرشليت غير المتجانسة

أي أن

$$u_1(L, y) = 0, u_1(0, y) = 0, u_1(x, H) = 0, u_1(x, 0) = f_1(x) \quad (i)$$

$$u_2(L, y) = g_2(y), u_2(0, y) = 0, u_2(x, H) = 0, u_2(x, 0) = 0 \quad (ii)$$

$$u_3(x, H) = f_2(x), u_3(x, 0) = 0, u_3(L, y) = 0, u_3(0, y) = 0 \quad (iii)$$

$$u_4(x, H) = 0, u_4(x, 0) = 0, u_4(L, y) = 0, u_4(0, y) = g_1(y) \quad (iiii)$$

وبحل هذه المسائل نحصل على حل المسألة الأصلية (18.2) أي أن:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y) \quad (19.2)$$

حيث أن كل $u_i(x, y)$ تحقق

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

الآن بحل هذه المسائل وبتابع طريقة فصل المتغيرات فإننا نحصل على الحل العام للمسألة (i) ويكون:

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi(H-y)}{L} \quad (20.2)$$

حيث أن

$$A_n = \frac{2}{L \sinh \frac{n\pi(H)}{L}} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (21.2)$$

وبخطوات مماثلة يتم إيجاد الحل العام للمسألة (ii) ويكون على الصورة:

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi x}{H} \quad (22.2)$$

حيث

$$B_n = \frac{2}{H \sinh \frac{n\pi L}{H}} \int_0^H g_2(y) \sin \frac{n\pi y}{H} dy \quad (23.2)$$

بنفس الأسلوب يتم إيجاد الحل العام للمعادلة (iii) ويكون على الصورة التالية:

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (24.2)$$

حيث

$$C_n = \frac{2}{L \sinh \frac{n\pi H}{L}} \int_0^L f_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (25.2)$$

وكذلك يتم إيجاد الحل العام للمسألة (iiii) والذي يعطى بالعلاقة:

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi y}{L} \sinh \frac{n\pi(L-x)}{H} \quad (26.2)$$

حيث

$$D_n = \frac{2}{L \sinh \frac{n\pi(L)}{H}} \int_0^H g_1(y) \sin \frac{n\pi y}{L} dy \quad (27.2)$$

بالتالي فإن الحل العام للمسألة (18.2) يعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi(H-y)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi x}{H} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi y}{L} \sinh \frac{n\pi(L-x)}{H}. \end{aligned} \quad (28.2)$$

مثال (7.2)

أوجد حلاً لمعادلة لابلاس الآتية (Agbezuge, 2006):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2$$

مع الشروط الحدية:

$$u(x, 0) = 50, \quad u(0, y) = 100$$

$$u(4, y) = 250, \quad u(x, 2) = 200$$

الحل

من الواضح أن الشروط الحدية المعطاة هي شروط ديرشليت غير المتجانسة، بالتالي فإن الحل العام يعطى بالعلاقة (28.2)، كذلك من المعطيات نجد أن

$$H = 2, \quad L = 4,$$

$$f_1(x) = 50, \quad f_2(x) = 200$$

$$g_1(y) = 100, \quad g_2(y) = 200$$

بإيجاد $u_1(x, y)$ من العلاقة (20.2)، والتي تتطلب إيجاد A_n وذلك بالتعويض عن

$$f_1(x) = 50$$

و $L = 4$ في العلاقة (21.2) ومنها نجد أن

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{4 \sinh \frac{n\pi(2)}{4}} \int_0^4 50 \sin \frac{n\pi x}{4} dx \\
&= \frac{100}{4 \sinh \frac{n\pi(2)}{4}} \int_0^4 \sin \frac{n\pi x}{4} dx \\
&= \frac{100}{n\pi \sinh \frac{n\pi(2)}{4}} (-\cos n\pi + \cos 0) \\
&= \frac{100(1 - (-1)^n)}{n\pi \sinh \frac{n\pi(2)}{4}} \\
&= \frac{200}{(2k-1)\pi \sinh \frac{(2k-1)\pi}{2}}
\end{aligned}$$

حيث

$$\int_0^4 \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{8}{n\pi} & n = 2k-1 \end{cases}$$

إذاً

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{200 \sin \frac{(2k-1)\pi x}{4} \sinh \frac{(2k-1)\pi(2-y)}{4}}{(2k-1)\pi \sinh \frac{(2k-1)\pi}{2}}$$

الآن نوجد $u_2(x, y)$ من العلاقة (22.2)، حيث $g_2(y) = 250$ و $H = 2$ بالتالي فإن:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{250}{\sinh 2n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi y}{2} dy \\
&= \frac{500}{n\pi \sinh 2n\pi} (-\cos n\pi + \cos 0) \\
&= \frac{500}{n\pi \sinh 2n\pi} (1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1000}{(2k-1)\pi \sinh 2\pi(2k-1)}$$

حيث

$$\int_0^2 \sin \frac{n\pi y}{2} dy = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi} & n = 2k-1 \end{cases}$$

وبذلك يكون

$$u_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1000 \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2k-1)\pi x}{2}}{(2k-1)\pi \sinh 2\pi}$$

كذلك نوجد $u_3(x, y)$ من خلال العلاقة (24.2) حيث $f_2(x) = 200$ و $L = 4$ أي أن

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{4 \sinh \frac{2n\pi}{4}} \int_0^4 200 \sin \frac{n\pi x}{4} dx \\ &= \frac{400}{n\pi \sinh \frac{n\pi}{2}} (-\cos n\pi + \cos 0) \\ &= \frac{400}{n\pi \sinh \frac{n\pi}{2}} (1 - (-1)^n) \\ &= \frac{800}{(2k-1)\pi \sinh \frac{(2k-1)\pi}{2}} \end{aligned}$$

إذاً

$$u_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{800 \sin \frac{(2k-1)\pi x}{4} \sinh \frac{(2k-1)\pi y}{4}}{(2k-1)\pi \sinh \frac{(2k-1)\pi}{2}}$$

ويتم إيجاد $u_4(x, y)$ وذلك بالتعويض عن $g_1(y) = 100$ و $H = 2$ و $L = 4$ في العلاقة (26.2) فنحصل على

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{2}{4 \sinh \frac{n\pi(4)}{2}} \int_0^2 100 \sin \frac{n\pi y}{4} dy \\
&= \frac{200}{n\pi \sinh(2n\pi)} (1 - (-1)^n) \\
&= \frac{400}{(2k-1)\pi \sinh(2(2k-1)\pi)}
\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$u_4(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{400 \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2k-1)\pi(4-x)}{2}}{(2k-1)\pi \sinh((2k-1)\pi)}$$

إذاً

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{200 \sin \frac{(2k-1)\pi x}{4} \sinh \frac{(2k-1)\pi(2-y)}{4}}{(2k-1)\pi \sinh \frac{(2k-1)\pi}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1000 \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2k-1)\pi x}{2}}{(2k-1)\pi \sinh 2n\pi} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{800 \sin \frac{(2k-1)\pi x}{4} \sinh \frac{(2k-1)\pi y}{4}}{(2k-1)\pi \sinh \frac{(2k-1)\pi}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{400 \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2} \sinh \frac{(2k-1)\pi(4-x)}{2}}{(2k-1)\pi \sinh((2k-1)\pi)}
\end{aligned}$$

وهو الحل العام لمعادلة لابلاس تحت الشروط المعطاة.

مثال (8.2)

أوجد حلاً لمعادلة لابلاس التالية (فيرس وباردن، 2001):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$

مع الشروط الحدية الآتية:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0$$

$$u\left(\frac{1}{2}, y\right) = 200y, \quad u\left(x, \frac{1}{2}\right) = 200x$$

الحل

باتباع الخطوات السابقة وتجزئة المسألة إلى مسائل متجانسة، بالتالي فإن الحل العام يعطى بالعلاقة (19.2) مع ملاحظة أن

$$u_1 = u_4 = 0$$

إذاً الحل العام لهذه المسألة يكون بالصورة التالية

$$u = u_2 + u_3 \quad (29.2)$$

باستخدام العلاقة (22.2) لإيجاد u_2 ، فإننا نحصل على

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200(-1)^{n+1} \sin 2n\pi y \sinh 2n\pi x}{n\pi \sinh n\pi}$$

ولكي يتم إيجاد u_3 فإننا نستخدم العلاقة (24.2)، ومنها نجد أن

$$u_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200(-1)^{n+1} \sin 2n\pi x \sinh 2n\pi y}{n\pi \sinh n\pi}$$

بالتعويض عن قيمة u_2 و u_3 في العلاقة (29.2) نحصل على الحل العام لهذه المسألة ويكون كالتالي

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200(-1)^{n+1} \sin 2n\pi y \sinh 2n\pi x}{n\pi \sinh n\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200(-1)^{n+1} \sin 2n\pi x \sinh 2n\pi y}{n\pi \sinh n\pi}$$

مثال (9.2)

أوجد حل معادلة لابلاس التالية (Sundaram, 2022):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B. C: \quad u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad u(0, y) = 2\sin(2\pi y)$$

$$u(1, y) = 2\sin(2\pi y), \quad u(x, 1) = \sin(2\pi x)$$

الحل

باتباع خطوات الحل السابقة واستخدام العلاقات (20.2)، (22.2)، (24.2)، (26.2) فإننا نحصل على الحل العام ويكون على

الصورة

$$u(x, y) = \frac{\sin(2\pi x) \cosh(\pi(2y - 1)) + 2 \sin(2\pi y) \cosh(\pi(2x - 1))}{\cosh(\pi)}$$

Second: Von-Neumann Boundary Conditions

ثانياً: شروط نيومان الحدية

ندرس معادلة لابلاس الأتية

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq H$$

والشروط الحدية

$$u_x(L, y) = g_1(y), \quad u_x(0, y) = g_2(y)$$

$$u_y(x, H) = f_1(x), \quad u_y(x, 0) = f_2(x)$$

حيث u_x و u_y هي المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين x و y على التوالي، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دوال في المتغير x ، $g_1(y)$ و $g_2(y)$ دوال في المتغير y (Buchanan, 2022).

الحل

نفرض أن المسألة المعطاة قابلة للحل أي أنها تحقق الشرط الوارد في النظرية (5.3.1)، ولحل هذه المسألة فإننا نتبع الخطوات المستخدمة في الحالة السابقة، وذلك بتجزئة هذه المسألة إلى أربع مسائل شبه متجانسة ونفرض أن كل منها يحقق الشرط (7.2) وتكون كالاتي

$$u_{1y}(x, 0) = 0, \quad u_{1y}(x, H) = f_1(x), \quad u_{1x}(0, y) = 0, \quad u_{1x}(L, y) = 0 \quad (i)$$

$$u_{2y}(x, 0) = 0, \quad u_{2y}(x, H) = 0, \quad u_{2x}(0, y) = 0, \quad u_{2x}(L, y) = g_1(y) \quad (ii)$$

$$u_{3y}(x, 0) = f_2(x), \quad u_{3y}(x, H) = 0, \quad u_{3x}(0, y) = 0, \quad u_{3x}(L, y) = 0 \quad (iii)$$

$$u_{4y}(x, 0) = 0, \quad u_{4y}(x, H) = 0, \quad u_{4x}(0, y) = g_2(y), \quad u_{4x}(L, y) = 0 \quad (iiii)$$

ويمكن أن توضح بالشكل (6.2) الاتي:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
u_y = f_2 \\
Y = H \\
u_x = g_1 \\
\nabla u = 0 \\
u_x = g_2 \\
u_y = f_1 \\
Y = 0 \\
X = L
\end{array}
=
\begin{array}{c}
u_{1y} = f_1 \\
u_{1x} = 0 \\
\nabla u_1 = 0 \\
u_{1y} = 0
\end{array}
+
\begin{array}{c}
u_{2y} = 0 \\
u_{2x} = g_1 \\
\nabla u_2 = 0 \\
u_{2y} = 0
\end{array}
+
\begin{array}{c}
u_{3y} = 0 \\
u_{3x} = 0 \\
\nabla u_3 = 0 \\
u_{3y} = f_4
\end{array}
+
\begin{array}{c}
u_{4y} = 0 \\
u_{4x} = g_2 \\
\nabla u_4 = 0 \\
u_{4x} = 0
\end{array}
\end{array}$$

الشكل 6.2: طريقة حل معادلة لابلاس مع شروط نيومان غير المتجانسة

ومن ثم نستخدم طريقة فصل المتغيرات لحل هذه المسائل، وجمع الحلول العامة لهذه المسائل نحصل على الحل العام للمسألة الأصلية والذي يعطى بالعلاقة (19.2) أي أن

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$$

حيث

$u_1(x, y)$ هو الحل العام للمسألة الجزئية الأولى ويكون على الصورة التالية

$$u_1(x, y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cosh \frac{n\pi y}{L} \quad (30.2)$$

مع ملاحظة أن A_0 ثابت اختياري، ويعطى A_n بالعلاقة

$$A_n = \frac{2}{n\pi \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right)} \int_0^L f_1(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, n > 0 \quad (31.2)$$

كذلك $u_2(x, y)$ هو الحل العام للمسألة الجزئية الثانية ويوصف بالعلاقة التالية

$$u_2(x, y) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi y}{H} \cosh \frac{m\pi x}{H} \quad (32.2)$$

B_0 ثابت اختياري، B_m تحسب من العلاقة

$$B_m = \frac{2}{m\pi \sinh \left(\frac{m\pi L}{H} \right)} \int_0^H g_1(y) \cos \left(\frac{m\pi y}{H} \right) dy, \quad m > 0 \quad (33.2)$$

وبالمثل $u_3(x, y)$ و $u_4(x, y)$ هما الحل العام للمسألتين الثالثة والرابعة ويعطى الحل العام لكل منهما الشكل الآتي

$$u_3(x, y) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cosh \frac{n\pi(H-y)}{L} \quad (34.2)$$

$$u_4(x, y) = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi y}{H} \cosh \frac{m\pi(L-x)}{H} \quad (35.2)$$

مع ملاحظة أن C_0 و D_0 ثابتان اختياريان C_n و D_m يتم إيجادها باستخدام العلاقات التالية

$$C_n = \frac{-2}{n\pi \sinh \left(\frac{n\pi H}{L} \right)} \int_0^L f_2(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (36.2)$$

$$D_m = \frac{-2}{m\pi \sinh \left(\frac{m\pi L}{H} \right)} \int_0^H g_2(y) \cos \left(\frac{m\pi y}{H} \right) dy \quad (37.2)$$

إذا بالتعويض في المعادلة (19.2) بالعلاقات (30.2)، (32.2)، (34.2)، (35.2) نحصل على الصورة العامة للحل العام لمعادلة

لابلاس في بعدين مع شروط نيومان الحدية غير المتجانسة، وتكون بالشكل التالي

$$u(x, y) = C + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cosh \frac{n\pi y}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi y}{H} \cosh \frac{m\pi x}{H} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cosh \frac{n\pi(H-y)}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi y}{H} \cosh \frac{m\pi(L-x)}{H}$$

حيث أن

C ثابت اختياري وهو مجموع الثوابت الاختيارية التي تظهر عند حل كل مسألة.

A_n و B_n و C_n و D_n تعطى بالعلاقات (31.2)، (33.2)، (36.2)، (37.2)

مثال 10.2)

أوجد حلاً لمعادلة لابلاس التالية (Turyń, 2013):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1$$

مع الشروط الحدية:

$$u_x(2, y) = 2y, \quad u_x(0, y) = 2y$$

$$u_y(x, 1) = x, \quad u_y(x, 0) = x$$

الحل

نلاحظ أنّ الشروط الحدية المعطاة هي شروط نيومان غير المتجانسة، وللحل هذا النوع من المسائل الحدية علينا أن نتحقق أولاً من قابليتها للحل وذلك من خلال التحقق من الشرط الضروري ويكون في هذه الحالة كالتالي

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\partial\Omega_3} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\partial\Omega_4} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

حيث $\partial\Omega_1$ ، $\partial\Omega_2$ ، $\partial\Omega_3$ ، $\partial\Omega_4$ هي حدود المستطيل من أعلى وأسفل ويمين ويسار على التوالي مع ملاحظة أنّ

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

الآن نعوض عن المشتقات الناطمية في العلاقة السابقة مع الأخذ في الاعتبار اتجاه كل مشتقة أي أنّ

$$\int_0^2 x dx - \int_0^2 x dx + \int_0^1 2y dy - \int_0^1 2y dy = 0$$

إذاً معادلة لابلاس مع الشروط الحدية المعطاة قابلة للحل.

الآن بتجزئة المسألة إلى أربعة مسائل جزئية ويجب أن تحقق كل مسألة الشرط الضروري للحل والذي يعطى بالعلاقة (7.2) (أي أن

$$u_{1y}(x, 0) = 0, u_{1y}(x, 1) = x, u_{1x}(0, y) = 0, u_{1x}(L, y) = 0$$

$$u_{2y}(x, 0) = 0, u_{2y}(x, 1) = 0, u_{2x}(0, y) = 0, u_{2x}(2, y) = 2y$$

$$u_{3y}(x, 0) = x, u_{3y}(x, 1) = 0, u_{3x}(0, y) = 0, u_{3x}(2, y) = 0$$

$$u_{4y}(x, 0) = 0, u_{4y}(x, 1) = 0, u_{4x}(0, y) = 2y, u_{4x}(2, y) = 0$$

باختبار المسألة الأولى نجد أن

$$\int_0^2 x dx = 2 \neq 0$$

مما سبق نلاحظ أن المسائل الجزئية غير قابلة للحل بطريقة فصل المتغيرات لعدم تحقق الشرط الضروري على الرغم من تحقق الشرط التوافقي للمسألة الأصلية، وفي مثل هذه الحالة يتم استخدام طرق تحليلية أكثر كفاءة وتعقيداً، أو يتم تعديل الشروط الحدية بحيث تحافظ على شرط التوافق بين المسائل الجزئية، وغالباً يتم اللجوء إلى الطرق العددية التي تمتاز بسهولة التعامل مع الشروط الحدية المعقدة وتحافظ على توافقها دون الحاجة لتعديلها.

مثال (11.2)

أوجد حلاً لمعادلة لابلاس التالية (Wazwaz,2009):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

مع الشروط الحدية التالية

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = 0$$

$$u_y(x, 0) = \cos x, \quad u_y(x, \pi) = \cos x \cosh \pi$$

الحل

من الواضح أن الشرط التوافقي متحقق وكذلك الشرط الضروري لتقابلية كل مسألة جزئية للحل متحقق وعليه فإن المسألة المعطاة قابلة للحل،
والحل العام لهذا النوع من المعادلات يعطى بالعلاقة (19.2)، بالتالي فإن

$$u_2(x, y) = u_4(x, y) = 0$$

ومن هنا فإن

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_3(x, y)$$

الآن بإيجاد $u_1(x, y)$ والتي تعطى بالعلاقة (30.2)، حيث

$$A_n = \frac{2}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \int_0^L f_1(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

كذلك

$$f_1(x) = \cosh \pi \cos x \text{ و } L = H = \pi$$

ومن هنا نجد أن

$$A_n = \frac{2 \cosh \pi}{n\pi \sinh(n\pi)} \int_0^\pi \cos x \cos nx \, dx = \frac{\cosh \pi}{\sinh(n\pi)}$$

مع ملاحظة أن

$$\int_0^\pi \cos x \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ \frac{\pi}{2} & n = 1 \end{cases}$$

بالتعويض عن قيمة A_n في العلاقة (30.2) نحصل على

$$u_1(x, y) = \frac{\cosh \pi \cos x \cosh y}{\sinh(\pi)}$$

وباتباع نفس الخطوات يمكننا الحصول على $u_3(x, y)$ باستخدام العلاقة (33.2) لكن هذا يتطلب إيجاد C_n ، وذلك باستخدام العلاقة

$$(36.2) \text{ والتعويض عن } f_2(x) = \cos x \text{ و } L = \pi \text{ ومنها يكون}$$

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{-2}{n\pi \sinh(n\pi)} \int_0^\pi \cos x \cos(nx) dx \\
&= \frac{-2}{\pi \sinh(\pi)} \left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{-1}{\sinh \pi}
\end{aligned}$$

مع ملاحظة أنّ

$$\int_0^\pi \cos x \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ \frac{\pi}{2} & n = 1 \end{cases}$$

بالتالي فإنّ

$$u_3(x, y) = \frac{-1}{\sinh \pi} \cos x \cosh(\pi - y)$$

الآن بجمع $u_1(x, y)$ و $u_3(x, y)$ نحصل على الحل العام على النحو التالي

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= C + \frac{\cosh \pi \cos x \cosh y}{\sinh(\pi)} - \frac{1}{\sinh \pi} \cos x \cosh(\pi - y) \\
&= C + \frac{(\cosh \pi \cos x \cosh y - \cos x \cosh \pi \cosh y + \cos x \sinh \pi \sinh y)}{\sinh(\pi)} \\
&= C + \frac{\cos x \sinh \pi \sinh y}{\sinh(\pi)} \\
&= C + \cos x \sinh y
\end{aligned}$$

Third: Robin (Mixed) Boundary Conditions

ثالثاً: شروط روبن (المختلطة) الحدية

بدراسة معادلة لابلاس مع الشروط الحدية المختلطة غير المتجانسة والتي تعطى بالشكل الآتي

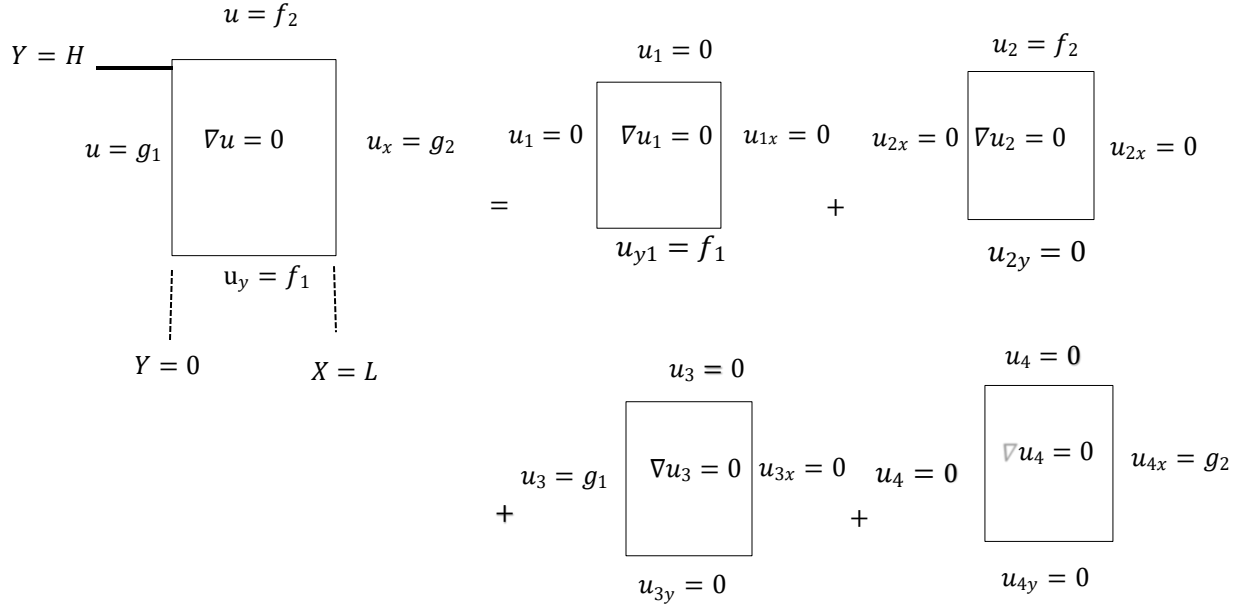
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$B.C : u_y(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u_x(a, y) = g_2(y)$$

حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دوال في المتغير x ، و $g_1(y)$ و $g_2(y)$ دوال في المتغير

الآن بتجزئة المسألة إلى أربع مسائل جزئية كما في الشكل (6.2) واتباع الخطوات السابقة ثم استعمال طريقة فصل المتغيرات فإننا نصل إلى الحل العام والذي يعطى بالصورة التالية:



(الشكل 7.2): يبين طريقة حل معادلة لابلاس مع شروط حدية المختلطة غير المتجانسة

وباتباع الخطوات السابقة ثم استعمال طريقة فصل المتغيرات فإننا نصل إلى الحل العام والذي يعطى بالعلاقة (19.2):

أي أنّ

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sinh \frac{(2n-1)\pi(y-b)}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cosh \frac{(2n-1)\pi y}{2a} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{(2n-1)\pi(x-a)}{2b} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b}
 \end{aligned} \quad (39.2)$$

حيث أنّ

$$A_n = \frac{4}{(2n-1)\pi \cosh \frac{(2n-1)\pi b}{2a}} \int_0^a f_1(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \quad (40.2)$$

$$B_n = \frac{2}{a \cosh \frac{(2n-1)\pi b}{2a}} \int_0^a f_2(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \quad (41.2)$$

$$C_n = \frac{2}{b \cosh \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \int_0^b g_1(y) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \quad (42.2)$$

$$D_n = \frac{4}{(2n-1)\pi \cosh \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \int_0^b g_2(y) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \quad (43.2)$$

مثال 12.2)

أوجد حلاً لمعادلة لابلاس التالية (Turyn, 2013) :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$B. c: u_y(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = 20$$

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(2, y) = 0$$

الحل

مما سبق حل هذه المسألة يعطى بالعلاقة (19.2)، أي أن

$$u = u_1 + u_2$$

مع ملاحظة أن

$$u_3 = u_4 = 0$$

الآن لكي يتم إيجاد u_1 من العلاقة (30.2)، علينا أولاً إيجاد A_n باستخدام المعادلة (31.2) حيث

$$a = 2, \quad u_y(x, 0) =$$

وعليه فإن

$$A_n = \frac{2}{(2n-1)\pi \cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}} \int_0^2 x \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} dx$$

$$= \frac{64(-1)^n}{(2n-1)^3 \pi^3 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}}$$

إذاً

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64(-1)^n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} \sinh \frac{(2n-1)\pi(y-1)}{4}}{(2n-1)^3 \pi^3 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}}$$

نوجد u_2 باستخدام العلاقة (32.2)، ولذلك يتعين علينا إيجاد B_2 وذلك من خلال العلاقة (33.2) مع ملاحظة أنّ

$$a = 1, u(x, 1) = 20$$

بالتالي فإنّ

$$B_2 = \frac{20}{\cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}} \int_0^2 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} dx$$

$$= \frac{80}{(2n-1)\pi \cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}}$$

إذاً

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{80 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} \cosh \frac{(2n-1)\pi y}{4}}{(2n-1)\pi \cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}}$$

وبالتعويض عن u_1 و u_2 في الصيغة العامة للحل التي تعطى بالعلاقة (39.2) نحصل على

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64(-1)^n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} \sinh \frac{(2n-1)\pi(y-1)}{4}}{(2n-1)^3 \pi^3 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{80 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} \cosh \frac{(2n-1)\pi y}{4}}{(2n-1)\pi \cosh \frac{(2n-1)\pi}{4}}$$

وهو الحل العام.

من المهم ملاحظة أن طريقة فصل المتغيرات تم استخدامها في حل المعادلات الإهليجية المتجانسة (لابلاس) فقط، ولا يمكن استخدامها في حالة المعادلات الإهليجية غير المتجانسة (بواسون)؛ لذلك نلجأ إلى طريقة أخرى تعرف بطريقة مفكوك الدوال الذاتية.

3.2 طريقة الدوال الذاتية لحل المعادلات التفاضلية الإهليجية غير المتجانسة في بعدين

Eigen Functions Method to Solve nonhomogeneous Elliptic Partial equations in 2D [EFM]

تستخدم طريقة الدوال الذاتية [EFM] في حل المعادلات الإهليجية غير المتجانسة، ومن أهم الأمثلة على هذا النوع من المعادلات معادلة بواسون في بعدين والتي تعرف بالشكل الآتي

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

$$B.C : u = h \text{ or } \frac{\partial u}{\partial n} = h \text{ or } \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = h \text{ on } \partial D$$

حيث

$$D = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

u دالة مجهولة، $h, a, b, \alpha \in R$ دالة اختيارية.

ولتوضيح طريقة الحل باستخدام مفكوك الدوال الذاتية ندرس الحالات التالية:

1.3.2 معادلة بواسون مع شروط حدية متجانسة:

تتضمن عدة حالات وذلك حسب نوع الشروط الحدية.

First: Dirichlet Boundary Conditions

أولاً: شروط ديرشليت الحدية

ندرس معادلة بواسون الآتية:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$B.C : u(a, y) = 0, \quad u(x, b) = 0,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

حيث أن المعادلة المعطاة غير متجانسة ولحل هذه المعادلة بطريقة الدوال الذاتية فإننا نتبع الآتي

الخطوة الأولى: نوجد الدوال الذاتية لمسألة القيم الذاتية التالية

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad (44.2)$$

باستخدام طريقة فصل المتغيرات نفرض أن

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

حيث $X(x)$ دالة في المتغير x و $Y(y)$ دالة في المتغير y ، وبالتعويض في المعادلة (44.2) عن قيمة ϕ فإن

$$\Delta(X(x)Y(y)) + \lambda(X(x)Y(y)) = 0$$

ومن هنا نحصل على

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda X(x)Y(y)$$

الآن بقسمة المعادلة على (XY) نجد أن

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad (45.2)$$

حيث إن كل حد يعتمد على ثابت λ نفرض أن

$$\lambda = \lambda_x + \lambda_y$$

λ_x هو ثابت الفصل الذي يعتمد عليه الجانب الأيسر، λ_y هو أيضاً ثابت فصل يعتمد عليه الجانب الأيمن في المعادلة (45.2).

إذاً بالتعويض عن λ في المعادلة (45.2) نحصل على

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -(\lambda_x + \lambda_y)$$

أي أن

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda_x$$

ومن هنا نجد أن

$$X''(x) = -\lambda_x X(x) \quad (i)$$

وبتحديد الشروط الحدية لكل معادلة كالاتي نعلم أنّ

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

حيث

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

إذاً

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0$$

والذي يعني أنّ

$$X(0) = 0$$

وكذلك

$$u(a, y) = X(a)Y(y) = 0$$

ومنها يكون

$$X(a) = 0$$

كذلك بالنسبة للمعادلة الأخرى

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda_y$$

والتي منها نحصل على

$$Y''(y) = -Y(y)\lambda_y \quad (ii)$$

وبتطبيق الشروط الحدية

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0$$

نجد أنّ

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0$$

تعني أن

$$Y(0) = 0$$

وأيضاً

$$u(x, b) = X(x)Y(b) = 0$$

تؤدي إلى

$$Y(b) = 0$$

الآن بحل هذه المعادلات، ودراسة الحالات الثلاثة لثابت λ إذا كانت $\lambda < 0$ فإن الحل العام للمعادلة (i)

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

وبتطبيق الشروط الحدية نجد أن

$$X(0) = c_1 = 0$$

ومنها

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x$$

وكذلك

$$X(a) = c_2 \sin \lambda a = 0, \quad c_2 \neq 0$$

يؤدي إلى

$$\lambda a = n\pi$$

بالتالي فإن

$$\lambda_n = \lambda = \frac{n\pi}{a}, \quad a \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

وحيث أن لكل قيمة ذاتية λ_n دالة ذاتية مناظره لها بالتالي فإن الحل يكون على الصورة

$$X_n(x) = C_n \sin \lambda_n x, \quad C_n = C_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

أي أن

$$X(x) = C_1 \sin \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_2 x + \dots$$

وذلك باستخدام مبدأ التركيب، ويمكن أن يكتب الحل على الصورة

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

وبنفس الطريقة نوجد الحل العام للمعادلة (ii) ويكون كالتالي

$$Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \frac{m\pi y}{b}$$

وبالتالي فإن حل مسألة القيمة الذاتية (44.2) هو

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad b_{nm} = C_n D_m$$

وهي الدوال الذاتية المطلوبة حيث

$$X_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{a} \right) x, \quad Y_m(y) = \sin \left(\frac{m\pi}{b} \right) y, \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

الخطوة الثانية: نفرض أن

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \quad (46.2)$$

حل لمعادلة بواسون يحقق الشروط الحدية المتجانسة وبالتعويض عن u في معادلة بواسون نجد أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 b_{nm} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} - \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 b_{nm} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) = f(x, y)$$

والتي يمكن أن نكتب على الصورة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -b_{nm} \left(\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) = f(x, y)$$

وباستخدام متسلسلة فورييه المضاعفة للجيب فإننا نحصل على

$$b_{nm} = \frac{-4}{ab\lambda_{nm}} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy \quad (47.2)$$

حيث

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (\text{Haberman, 2013}).$$

مثال (13.2)

حل معادلة بواسون الآتية (Asmer, 2005):

$$u_{xx} + u_{yy} = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{B.C: } u(1, y) = 0, \quad u(x, 1) = 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

الحل

لحل هذا النوع من المسائل الحدية نستخدم طريقة الدوال الذاتية، ومن خلال العلاقة (46.2)

حيث

$$a = b = 1, \quad f(x, y) = 1$$

الآن نوجد قيمة λ_{nm} من العلاقة (47.2)

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

$$\lambda_{nm} = (n\pi)^2 + (m\pi)^2$$

وبالتعويض بقيمة λ_{nm} لإيجاد b_{nm} نجد أن

$$\begin{aligned} b_{nm} &= \frac{-4}{(n\pi)^2 + (m\pi)^2} \int_0^1 \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) dx dy \\ &= \frac{-16}{\pi n m ((n\pi)^2 + (m\pi)^2)} \end{aligned}$$

حيث أن

$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) dx dy = \begin{cases} \frac{4}{nm\pi} & n = 2k - 1, \quad m = 2l - 1 \\ 0 & n = 2k, \quad m = 2l \end{cases}$$

وبالتعويض عن b_{nm} في الحل العام نحصل على

$$u(x, y) = \frac{-16}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\pi x \sin(2l-1)\pi y}{(2k-1)(2l-1)((2k-1)^2 + (2l-1)^2)}$$

مثال (15.2)

حل معادلة بواسون الآتية (Tanininah, 2021):

$$u_{xx} + u_{yy} = -8\pi^2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{B.C: } u(1, y) = 0, \quad u(x, 1) = 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

الحل

باتباع خطوات حل المثال السابق حيث أن

$$f(x, y) = -8\pi^2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y, \quad a = b = 1$$

بالتالي فإن

$$\begin{aligned} b_{nm} &= \frac{-4}{(n\pi)^2 + (m\pi)^2} \int_0^1 \int_0^1 -8\pi^2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) dx dy \\ &= \frac{32\pi^2}{(n\pi)^2 + (m\pi)^2} \int_0^1 \int_0^1 (\sin 2\pi x \sin 2\pi y) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) dx dy \\ &= \frac{32\pi^2}{32\pi^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

حيث أن

$$\int_0^1 \int_0^1 (\sin 2\pi x \sin 2\pi y) \sin(n\pi)x \sin(m\pi) dx dy = \begin{cases} \frac{1}{4} & n = m = 2 \\ 0 & n = m \neq 2 \end{cases}$$

إذاً الحل العام لمعادلة بواسون يكون على الصورة التالية

$$u(x, y) = \sin 2\pi x \sin 2\pi y$$

مثال (16.2)

أوجد حل معادلة بواسون التالية (Assef&Guta,2019):

$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B.C: u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = 0, \quad u(x, 1) = 0$$

الحل

باستخدام العلاقة (47.2) لإيجاد b_{nm} يكون

$$b_{nm} = \frac{-4}{(n\pi)^2 + (m\pi)^2} \int_0^1 \int_0^1 (-2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) dx dy$$
$$= \frac{8\pi^2}{2\pi^2} \left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

مع ملاحظة أن

$$\int_0^1 \sin(\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0.5 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

الآن بالتعويض عن قيمة b_{nm} في العلاقة (48.2) نحصل على الحل العام التالي

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Second: Von- Neumann Boundary Conditions

ثانياً: شروط نيومان الحدية

بدراسة معادلة بواسون مع شروط نيومان الحدية حيث تعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f(x, y), & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ B.C: u_y(x, 0) &= 0, & u_x(0, y) = 0 \\ u_x(a, y) &= 0, & u_y(x, b) = 0 \end{aligned}$$

الآن بحل مسألة القيمة الذاتية

$$\Delta\phi = -\lambda\phi$$

حيث أن

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

مع الشروط الحدية

$$X'(0) = X'(a) = 0$$

$$Y'(0) = Y'(b) = 0$$

وباستخدام طريقة فصل المتغيرات واتباع خطوات الحالة السابقة، فإننا نحصل على الحل العام لمعادلة بواسون مع شروط نيومان الحدية، والذي يعطى بالصورة التالية

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{nm} \cos \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y \quad (48.2)$$

حيث

$$C_{nm} = \frac{-4}{ab\lambda_{nm}} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \cos \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y dx dy \quad (49.2)$$

وأيضاً

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \text{ (Haberman, 2013)}$$

مثال (17.2)

أوجد حل معادلة بواسون التالية (Strikwerda, 2004):

$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

مع الشروط الحدية الآتية

$$B. C: u_x(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = 0$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 1) = 0$$

الحل

من الواضح أنّ هذه المعادلة مع الشروط المعطاة تحقق الشرط التوافقي، وبالتالي فإنّه وباستخدام العلاقة

(48.2) لإيجاد C_{nm} يكون

$$C_{nm} = \frac{-4}{(n\pi)^2 + (m\pi)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\pi x) \cos(\pi y)) \cos(n\pi x) \cos(m\pi y) dx dy$$
$$= \left(\frac{8\pi^2}{8\pi^2} \right) = 1$$

مع ملاحظة أنّ

$$\int_0^1 \cos(\pi x) \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ 0.5 & n = 1 \end{cases}$$

وأيضاً

$$\int_0^1 \cos(\pi y) \cos(m\pi y) dy = \begin{cases} 0 & m > 1 \\ 0.5 & m = 1 \end{cases}$$

الآن بالتعويض عن قيمة C_{nm} في العلاقة (48.2) نحصل على الحل العام التالي

$$u(x, y) = C + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

Third: Robin (Mixed) Boundary conditions

ثالثاً: شروط روبين (المختلطة) الحدية

ندرس معادلة بواسون مع الشروط الحدية المختلطة والمتجانسة، والتي تعطى بالشكل التالي

$$\Delta u = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$B.C: \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0$$

$$u_x(a, y) = 0, \quad u(0, y) = 0$$

وذلك بحل مسألة القيمة الذاتية التالية

$$\Delta \phi = -\lambda \phi$$

مع الشروط الحدية

$$X(0) = X'(a) = 0$$

$$Y(0) = Y'(b) = 0$$

باستخدام طريقة فصل المتغيرات واتباع خطوات الحالة السابقة فإننا نحصل على الدوال الذاتية وباستخدام هذه الدوال نوجد الحل العام لمعادلة بواسون، والذي يكون بالصيغة الآتية

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} \quad (50.2)$$

حيث

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{2b} \right)^2$$

وكذلك

$$D_{nm} = \frac{-4}{ab\lambda_{nm}} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} dx dy \quad (51.2)$$

2.3.2. معادلة بواسون مع شروط حدية غير متجانسة

تتضمن عدة حالات وذلك حسب نوع الشروط الحدية.

First: Dirichlet Boundary Conditions

أولاً: شروط ديرشيلت الحدية

ندرس معادلة بواسون الأتية:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

مع الشروط الحدية غير المتجانسة التالية

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y)$$

لكي يتم إيجاد الحل العام للمسائل من هذا النوع فإننا نقوم بتجزئة هذه المسألة إلى مسألتين كالتالي

$$\Delta v_1 = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$v_1(x, 0) = f_1(x), \quad v_1(x, b) = f_2(x)$$

$$v_1(0, y) = g_1(y), \quad v_1(a, y) = g_2(y)$$

وهي معادلة لابلاس مع شروط ديرشيلت غير المتجانسة، وقد تم فيما سبق إيجاد حلها العام $v_1(x, y)$ ، والذي يعطى بالعلاقة (28.2)، أما إذا كانت شروط ديرشيلت الحدية شبه متجانسة بالنسبة لمعادلة لابلاس فإننا نستخدم العلاقة (5.2) لإيجاد الحل العام $v_1(x, y)$.

أما المسألة الثانية هي معادلة بواسون مع شروط ديرشيلت المتجانسة، أي أن:

$$\Delta v_2 = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$v_2(x, 0) = 0, \quad v_2(x, b) = 0$$

$$v_2(0, y) = 0, \quad v_2(a, y) = 0$$

وحلها العام يعطى بالعلاقة (46.2).

وبالتالي فإن الحل العام لمعادلة بواسون مع شروط ديرشيلت غير المتجانسة هو

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y) \quad (52.2)$$

حيث أنّ

$v_1(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة لابلاس مع شروط ديرشيلت غير المتجانسة

$v_2(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة بواسون مع شروط ديرشيلت المتجانسة (Pikulin&Pohozaev, 2001)

مثال (18.2)

أوجد حلاً لمعادلة بواسون التالية (Dubin, 2003):

$$\Delta u = x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

مع الشروط الحدية الآتية

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = \sin 2\pi y$$

الحل

نعلم أنّ الحل العام لهذا النوع من المعادلات يعطى بالشكل الآتي

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y)$$

حيث أنّ

$v_1(x, y)$ في هذه الحالة هو الحل العام لمعادلة لابلاس مع شروط ديرشيلت شبه المتجانسة

$v_2(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة بواسون مع شروط ديرشيلت المتجانسة

من المعطيات نجد أنّ

$$g_2(y) = \sin 2\pi y, \quad H = 1$$

الآن نوجد $v_1(x, y)$ من خلال العلاقة (20.2) أي أنّ

$$v_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi x}{H}$$

ولكن

$$B_n = \frac{2}{H \sinh \frac{n\pi L}{H}} \int_0^H g_2(y) \sin \frac{n\pi y}{H} dy$$

إذاً

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 \sin 2\pi y \sin n\pi y dy \\ &= \frac{2}{\sinh 2\pi} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sinh 2\pi} \end{aligned}$$

مع ملاحظة أنّ

$$\int_0^1 \sin 2\pi y \sin n\pi y dy = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ 0.5 & n = 2 \end{cases}$$

ومنها يكون

$$v_1(x, y) = \frac{\sin 2\pi y \sinh 2\pi x}{\sinh 2\pi}$$

وبإيجاد الحل العام لمعادلة بواسون مع شروط ديرشليت المتجانسة نستخدم العلاقة (46.2)، حيث

$$\lambda_{nm} = (n\pi)^2 + (m\pi)^2, f(x, y) =$$

نعلم أنّ

$$v_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \left(\frac{n\pi}{a}\right) x \sin \left(\frac{m\pi}{b}\right) y$$

نوجد b_{nm} أولاً من العلاقة (47.2) كالتالي

$$\begin{aligned} b_{nm} &= \frac{-4}{(n\pi)^2 + (m\pi)^2} \int_0^1 \int_0^1 x \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) dx dy \\ &= \frac{-8(-1)^n}{nm\pi^2((n\pi)^2 + (m\pi)^2)}, \quad m = 2k - 1 \end{aligned}$$

إذاً

$$v_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-8(-1)^n}{nm\pi^2((n\pi)^2 + (m\pi)^2)} \sin(n\pi)x \sin(m\pi)y$$

بالتعويض في العلاقة (52.2) نحصل على الحل العام أي أنّ

$$u(x, y) = \frac{\sin 2\pi y \sinh 2\pi x}{\sinh 2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-8(-1)^n \sin n\pi x \sin m\pi y}{nm\pi^2((n\pi)^2 + (m\pi)^2)}$$

ملاحظة 2.2):

إذا كان لدينا نموذج رياضي يصف ظاهرة فيزيائية، بحيث يكون معادلة غير متجانسة مع شروط حدية غير متجانسة أيضاً، فإنه باستعمال قاعدة بناء الحلول يمكن تحليل هذه المسألة إلى مسائل جزئية، ثم حل هذه المسائل وجمع الحلول فإننا نحصل على حل المسألة الأصلية (Pikulín & Pohozaev, 2001).

Second: Von-Neumann Boundary Conditions

ثانياً: شروط نيومان الحدية

بدراسة معادلة بواسون مع شروط نيومان غير المتجانسة والتي تعطى بشكل الآتي

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$B.C: u_x(x, 0) = f_1(x), \quad u_x(a, y) = g_2(y)$$

$$u_y(x, b) = f_2(x), \quad u_y(0, y) = g_1(y)$$

من الملاحظة 2.2) واتباع خطوات الحالة الأولى فإن الحل العام لهذه المسألة يعطى بالصيغة التالية

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y)$$

حيث أنّ

$v_1(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة لابلاس مع شروط نيومان غير المتجانسة والذي يعطى بالعلاقة (38.2)،

أما إذا كانت شروط نيومان شبه متجانسة بالنسبة لمعادلة لابلاس فإننا نستخدم العلاقة (13.2) لإيجاد الحل العام.

$v_2(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة بواسون مع شروط نيومان المتجانسة والذي يعطى بالعلاقة (48.2).

Third: Robin (Mixed) Boundary Conditions

ثالثاً: شروط روبن (المختلطة) الحدية

ندرس معادلة بواسون مع الشروط الحدية المختلطة التالية

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$B. c: u_x(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u_y(a, y) = g_2(y)$$

الحل

من الملاحظة (2.2) واتباع خطوات الحالة الأولى فإن الحل العام لهذه المسألة يعطى بالصيغة التالية

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y)$$

حيث أن

$v_1(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة لابلاس مع شروط روبن غير المتجانسة والذي يعطى بالعلاقة (38.2)، أما إذا كانت شروط روبن شبه متجانسة بالنسبة لمعادلة لابلاس فإننا نستخدم العلاقة (16.2) لإيجاد الحل العام.

$v_2(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة بواسون مع شروط روبن المتجانسة والذي يعطى بالعلاقة (50.2).

مثال (15.2)

أوجد حلاً لمعادلة بواسون الأتية (Esfandiari, 2017):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.2xy, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$B. c: u_y(x, 0) = 1, \quad u(x, b) = 2x - 1$$

$$u(0, y) = 1, \quad u_x(a, y) = 2y$$

الحل

حل هذا النوع من المعادلات يكون على الصورة

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y)$$

حيث $v_1(x, y)$ هو الحل العام لمعادلة لابلاس مع الشروط الحدية غير المتجانسة أي أن

$$v_{1xx} + v_{1yy} = 0$$

وشروط الحدية

$$B. c: v_{1y}(x, 0) = 1, \quad v_1(x, b) = 2x - 1$$

$$v_1(0, y) = 1, \quad v_{1x}(a, y) = 2y$$

بإيجاد الحل العام لهذه المسألة والذي يعطى بالعلاقة (38.2) ويكون بالشكل الآتي

$$\begin{aligned} v_1(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{(2n-1)^2 \pi^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{3}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{6} \sinh \frac{(2n-1)\pi(y-2)}{6} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{48(-1)^n}{(2n-1)^2 \pi^2 \cosh \frac{2\pi(2n-1)}{3}} \right. \\ & \left. - \frac{4}{(2n-1)\pi \cosh \frac{2\pi(2n-1)}{3}} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{6} \cosh \frac{(2n-1)\pi y}{6} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi \cosh \frac{3\pi(2n-1)}{4}} \cosh \frac{(2n-1)\pi(x-3)}{4} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{4} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{64(-1)^n}{(2n-1)^2 \pi^2 \cosh \frac{3\pi(2n-1)}{4}} \right. \\ & \left. - \frac{128}{(2n-1)^3 \pi^3 \cosh \frac{3\pi(2n-1)}{4}} \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{4} \end{aligned}$$

والآن نوجد الحل العام $v_2(x, y)$ لمعادلة بواسون مع شروط روبن المتجانسة من خلال العلاقة (50.2)

ويكون

$$\begin{aligned} v_2(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{3 \left(\frac{36}{(2n-1)^2 \pi^2} + \frac{16}{(2m-1)^2 \pi^2} \right)} \left(\frac{8(-1)^m}{(2m-1)\pi} \right. \\ & \left. - \frac{16}{(2m-1)^2 \pi^2} \right) \frac{36}{5(2n-1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{6} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{4} \end{aligned}$$

وبجمع الحلين $v_2(x, y)$ و $v_1(x, y)$ نحصل على الحل العام المطلوب

الفصل الثالث

الطرق العددية لحل بعض المعادلات الإهليجية

**Numerical Methods for Solving Some Elliptic
Equations**

1.3. المقدمة

Introduction

خصصنا هذا الفصل لتطبيق بعض الطرق العددية على بعض المعادلات الإهليجية في بعدين، مع عرض مجموعة من الأمثلة، التي تختلف عن بعضها البعض في الشروط الحدية.

2.3. طريقة الفروق المنتهية

Finite Differences Method

الفروق المنتهية هي إحدى الطرق التقريبية وأبسط الطرق وأقدمها لحل المعادلات التفاضلية، وهي النهج المهيمن في التحليل العددي، وتستخدم عندما تكون المنطقة المدروسة منتظمة أو غير منتظمة، وركزنا في هذا الفصل على المناطق المنتظمة، وتعتمد طريقة الفروق المنتهية على تقسيم المنطقة المدروسة إلى مستطيلات أو مربعات تسمى شبكة (Mesh-Net أو Grid) وتكون الشبكة منتظمة كما في الشكل (1.3). أو محاطة بمنحني، ومن ثم إيجاد معادلات الفروق عند كل نقطة من نقاط الشبكة الداخلية بالتالي نحصل على نظام خطي يسهل حله.

1.2.3. حل معادلة بواسون في بعدين باستخدام طريقة الفروق المنتهية

سندرس إيجاد الحل التقريبي لمعادلة بواسون في بعدين باستخدام طريقة الفروق المنتهية تحت شروط حدية مختلفة.

أولاً: شروط ديرشليت الحدية

First: Dirichlet Boundary Conditions

لحل معادلة بواسون في بعدين باستخدام هذه الطريقة وتحت هذه الشروط علينا أولاً أن نستج صيغة لتقريب الفروق المركزية حيث نعرف معادلة بواسون في بعدين بالصورة التالية

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (1.3)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

$$\Omega = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$$

حيث $\partial\Omega$ النقاط الحدودية للمنطقة Ω ، ونفرض أن f, g دالتان مستمرتان على نطاقهما لكي نضمن وجود حل وحيد (فيرس وباردن، 2001).

الآن بتقسيم الفترتين (a, b) و (c, d) إلى n و m من الأجزاء المتساوية عرضها h و k على التوالي كالتالي

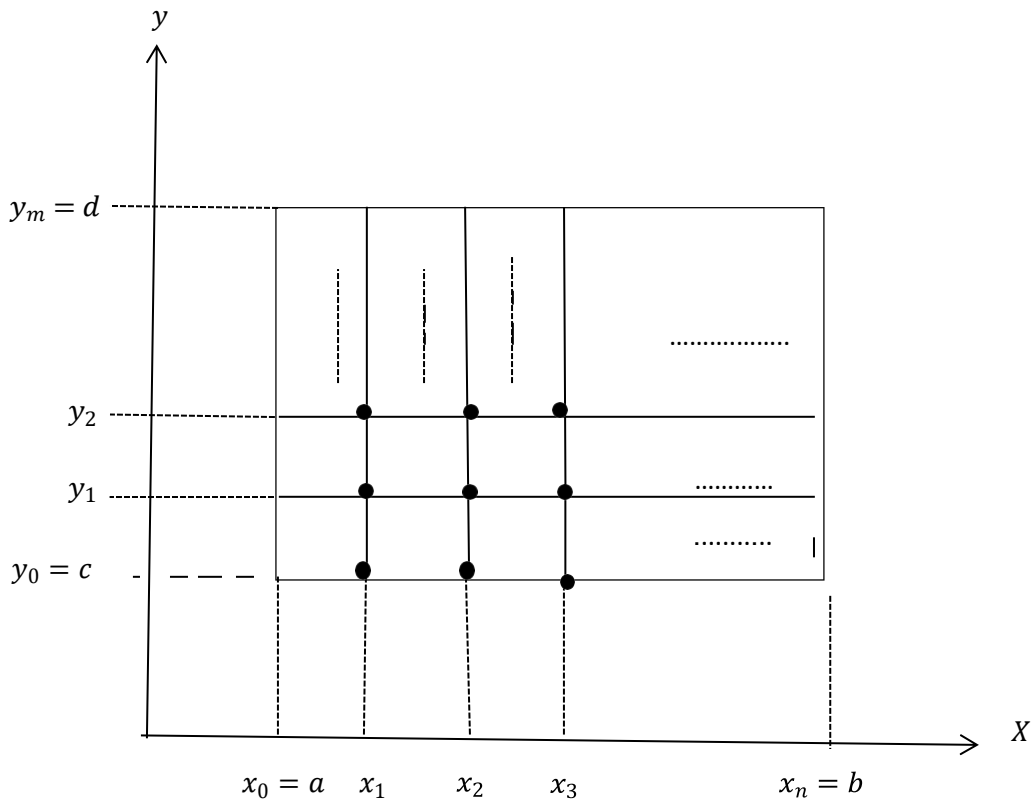
$$k = \frac{d-c}{m}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

حيث m و n أعداد صحيحة موجبة، ويرسم مستقيمت رأسية وأفقية من خلال النقاط (x_i, y_i) حيث

$$x_i = a + ih \quad \text{لكل } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

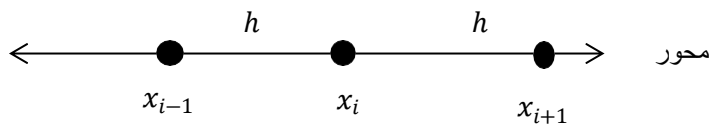
$$y_j = c + jk \quad \text{لكل } j = 0, 1, 2, \dots, m$$

مع ملاحظة أن x_i و y_j تسمى مستقيمت الشبكة وتقاطع هذه النقاط يسمى بنقاط الشبكة والتي يمكن توضيحها بالشكل (1.3).



الشكل (1.3): المستقيمت الرأسية والمستقيمت الأفقية ونقاط الشبكة

باستخدام النقاط الثلاثة x_{i-1} و x_i و x_{i+1} بحيث تكون المسافة بين هذه النقاط h على محور X كما في الشكل (2.3)



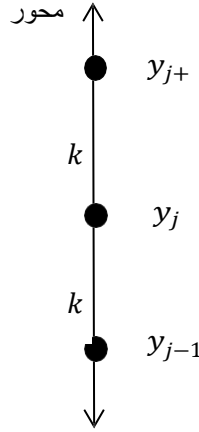
الشكل (2.3): تقسيم الفترة على محور X بطول h

وبإيجاد مفكوك متسلسلة تايلور للمتغير x حول x_i لتوليد صيغة الفرق المركزي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + O(h^2) \quad (2.3)$$

وهي صيغة الفرق المركزي لتقريب المشتقة الثانية مع خطأ من الرتبة الثانية $O(h^2)$.
وبنفس الأسلوب يتم استخدام النقطتين y_{j+1} و y_{j-1} بحيث تكون المسافة بين النقطة والأخرى تساوي k كما
في الشكل (3.3)، وذلك لإيجاد مفكوك متسلسلة تايلور في المتغير y حول y_j وتوليد صيغة الفرق المركزي كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} + O(k^2) \quad (3.3)$$



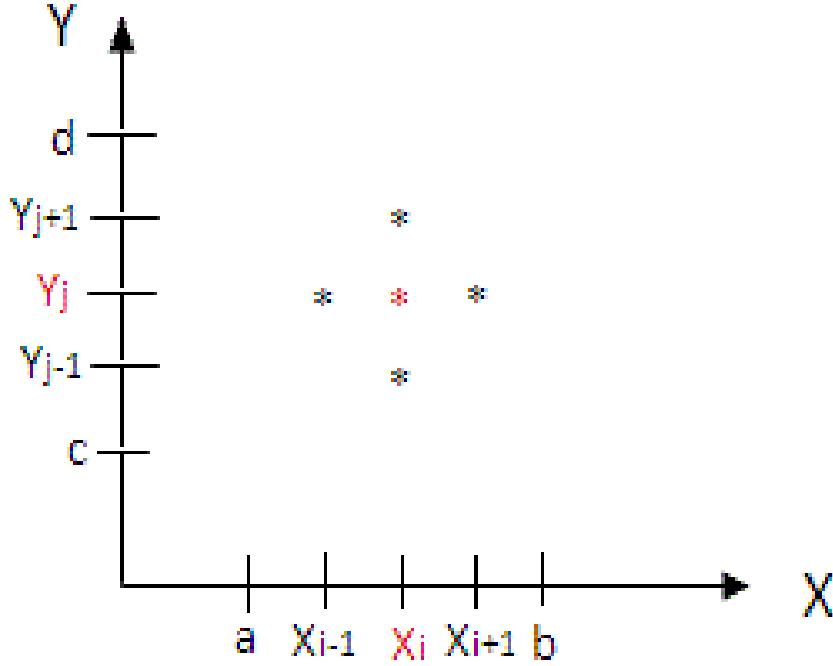
وبالتعويض بالمعادلتين (الشكل 3.3): تقسيم الفترة على محور Y بطول

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} + O(h^2 + k^2)$$

$$= f(x_i, y_j)$$

لكل $j = 1, \dots, (m - 1)$ و $i = 1, \dots, (n - 1)$

وبدمج الشكل (2.3) والشكل (3.3) فإننا نحصل على الشكل النجمي حول النقطة (x_i, y_j) (والموضح بالشكل (4.3))



الشكل (4.3): يوضح الشكل النجمي

الآن باستعمال التعبير $u_{i,j}$ بدلاً من $u(x_i, y_j)$ ، وهذا يمكننا من كتابة المعادلة السابقة على الصورة

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k} \right)^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = -h^2 f_{i,j} \quad (4.3)$$

لكل $i = 1, \dots, (n-1)$ و $j = 1, \dots, (m-1)$

وهي معادلة الفروق لتقريب معادلة بواسون مع الشروط الحدية الأتية:

$$j = 0, 1, \dots, m \quad \text{لكل} \quad u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j)$$

$$j = 0, 1, \dots, m \quad \text{لكل} \quad u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{لكل} \quad u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{لكل} \quad u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m)$$

والتي يمكن أن نكتب على الصورة التالية

$$j = 0, 1, \dots, m \quad \text{لكل} \quad u_{0,j} = g(x_0, y_j)$$

$$j = 0, 1, \dots, m \quad \text{لكل} \quad u_{n,j} = g(x_n, y_j)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{لكل} \quad u_{i,0} = g(x_i, y_0)$$

$$i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad \text{لكل} \quad u_{i,m} = g(x_i, y_m)$$

حيث $u_{i,j}$ تقرب $u(x_i, y_j)$ ، ويمكن إعادة ترميز نقاط التقاطع الداخلية من خلال العلاقة

$$u_L = u_{i,j} \text{ و } P_L = (x_i, y_j) \quad (5.3)$$

حيث $L = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ لكل $i = 1, \dots, n - 1$ و $j = 1, \dots, m - 1$

وفي حالة خاصة من معادلة بواسون عندما تكون $f(x, y) = 0$ أي في حالة معادلة لابلاس فإن معادلة الفروق المنتهية لتقريب المشتقات تؤول إلى الشكل التالي

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \left(\left(\frac{h}{k} \right)^2 \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = 0 \quad (6.3)$$

وبتطبيق معادلة الفروق عند النقاط الداخلية للشبكة في كلا الحالتين (معادلة لابلاس أو معادلة بواسون) نحصل على نظام خطي من الرتبة $(n - 1)(m - 1)$ (Abu al rub, 2015).

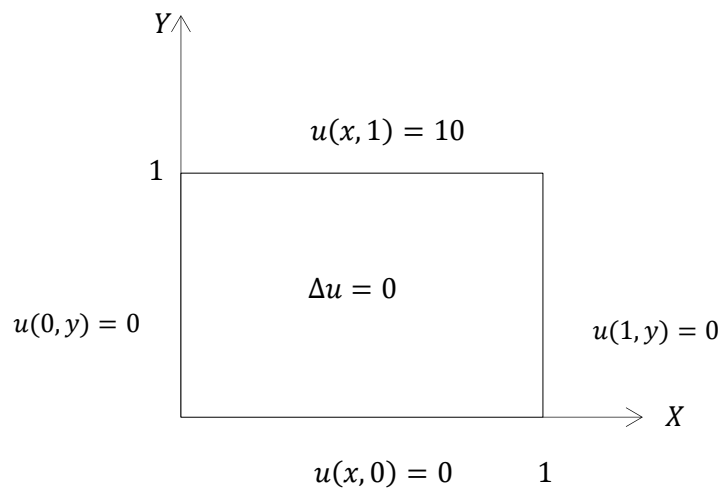
مثال 1.3

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس الموضحة بالشكل (5.3) (Chopade and Rastogi, 2018):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B.C: \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = 0, \quad u(x, 1) = 10$$



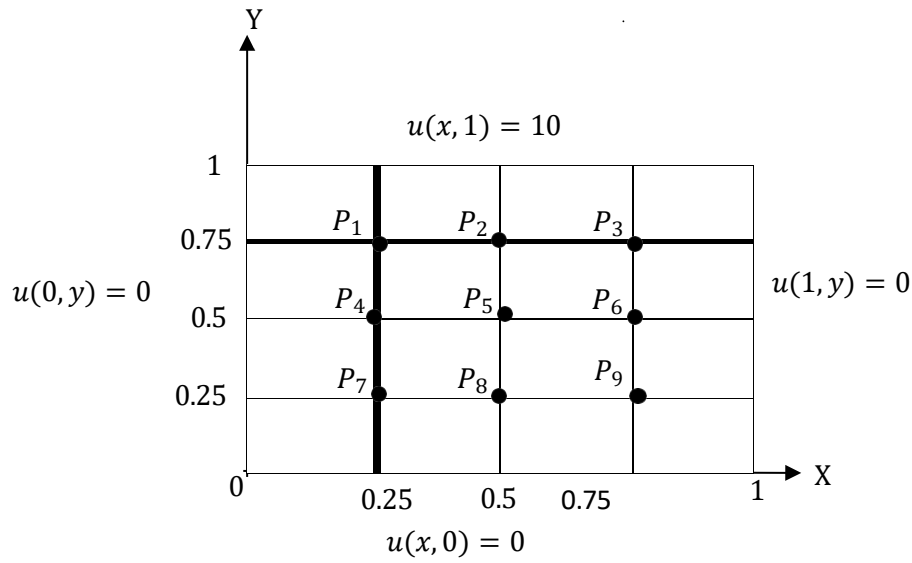
الشكل (5.3): يوضح معادلة لابلاس مع الشروط الحدية في المثال (3.1)

الحل

باختيار عددين صحيحين $m = 4$ بحيث يكون

$$k = \frac{d - c}{m} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ و } h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

وهذا يعني تجزئة الفترة $(0,1)$ (إلى 4 أجزاء متساوية على محور x ، وكذلك الفترة $(0,1)$) يتم تجزئتها إلى 4 أجزاء متساوية على محور y كما في الشكل (6.3).



الشكل (6.3): تقسيم المنطقة بمستقيمات رأسية وأفقية والحصول على شبكة للمثال (3.1)

الآن نعرف المستقيمات الأفقية والمستقيمات الرأسية للشبكة:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,3,4$$

$$y_j = c + jk, \quad j = 0,1,2,3,4$$

ومن هنا نجد أن

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$$

وكذلك

$$y_0 = 0, y_1 = 0.25, y_2 = 0.5, y_3 = 0.75, y_4 = 1$$

وباستعمال معادلة الفروق (6.3) لتقريب النقاط الداخلية أي أن

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \left(\left(\frac{h}{k} \right)^2 \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = 0$$

وبالتعويض عن قيم h و k نحصل على المعادلة

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0 \quad (7.3)$$

الآن بالتعويض عن قيم i و j كالتالي

$$\begin{aligned} 4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} &= 0, & i = 1, & j = 1 \\ 4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{0,2} - u_{1,3} - u_{1,1} &= 0, & i = 1, & j = 2 \\ 4u_{1,3} - u_{2,3} - u_{0,3} - u_{1,4} - u_{1,2} &= 0, & i = 1, & j = 3 \\ 4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} &= 0, & i = 2, & j = 1 \\ 4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{1,2} - u_{2,3} - u_{2,1} &= 0, & i = 2, & j = 2 \\ 4u_{2,3} - u_{3,3} - u_{1,3} - u_{2,4} - u_{2,2} &= 0, & i = 2, & j = 3 \\ 4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{2,1} - u_{3,2} - u_{3,0} &= 0, & i = 3, & j = 1 \\ 4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{2,2} - u_{3,3} - u_{3,1} &= 0, & i = 3, & j = 2 \\ 4u_{3,3} - u_{4,3} - u_{2,3} - u_{3,4} - u_{3,2} &= 0, & i = 3, & j = 3 \end{aligned}$$

الآن بتطبيق الشروط الحدية نجد أن

$$u_{0,1} = 0, u_{1,0} = 0, u_{2,0} = 0, u_{2,0} = 0$$

$$u_{3,0} = u_{0,3} = 0, u_{1,4} = u_{3,4} = 10, u_{2,4} = 10$$

وبإعادة ترميز نقاط الشبكة الداخلية $u_i = u(p_i)$ باستخدام العلاقة (5.3) يكون

$$u_{1,1} = u_7, \quad u_{1,2} = u_4, \quad u_{1,3} = u_1, \quad u_{2,1} = u_8$$

$$u_{2,2} = u_5, \quad u_{2,3} = u_2, \quad u_{3,1} = u_9, \quad u_{3,2} = u_6$$

$$u_{3,3} = u_3$$

وبالتعويض في معادلات الفروق نحصل على

$$4u_7 - u_4 - u_8 = 0, \quad i = 1, \quad j = 1$$

$$4u_8 - u_5 - u_7 - u_9 = 0, \quad i = 1, \quad j = 2$$

$$4u_8 - u_5 - u_7 - u_9 = 0, \quad i = 1, \quad j = 2$$

$$\begin{array}{ll}
4u_8 - u_5 - u_7 - u_9 = 0, & i = 1, \quad j = 2 \\
4u_9 - u_6 - u_8 = 0, & i = 1, \quad j = 3 \\
4u_4 - u_1 - u_5 - u_7 = 0, & i = 2, \quad j = 1 \\
4u_5 - u_1 - u_2 - u_6 - u_8 = 0, & i = 2, \quad j = 2 \\
4u_6 - u_3 - u_5 - u_9 = 0, & i = 2, \quad j = 3 \\
4u_1 - u_2 - u_4 = 10, & i = 3, \quad j = 1 \\
4u_2 - u_1 - u_3 - u_5 = 10, & i = 3, \quad j = 2 \\
4u_3 - u_2 - u_6 = 10, & i = 3, \quad j = 3
\end{array}$$

وبإعادة ترتيب المعادلات نحصل على معادلات الفروق عند كل نقطة داخلية P_i أي أنّ

$$P_1: 4u_1 - u_2 - u_4 = 10$$

$$P_2: 4u_2 - u_1 - u_3 - u_5 = 10$$

$$P_3: 4u_3 - u_2 - u_6 = 10$$

$$P_4: 4u_4 - u_1 - u_5 - u_7 = 0$$

$$P_5 : 4u_5 - u_1 - u_2 - u_6 - u_8 = 0$$

$$P_6: 4u_6 - u_3 - u_5 - u_9 = 0$$

$$P_7: 4u_7 - u_4 - u_8 = 0$$

$$P_8: 4u_8 - u_5 - u_7 - u_9 = 0$$

$$P_9: 4u_9 - u_6 - u_8 = 0$$

ومنها نحصل على النظام

$$AW = r$$

أي أنّ

$$\begin{array}{cccccccccccc}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 10 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 10 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 10 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_4 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_5 = & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_8 & 0 \\
[0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] & [u_9] & [0]
\end{array}$$

وبحل هذا النظام بطريقة جاوس للحذف [GEM] Gaussian Elimination Method نحصل على

$$\begin{array}{ll}
u_1 & 4.285714 \\
u_2 & 5.267857 \\
u_3 & 4.285714 \\
u_4 & 1.875000 \\
u_5 = & 2.500000 \\
u_6 & 1.875000 \\
u_7 & 0.714286 \\
u_8 & 0.982143 \\
[u_9] & [0.714286]
\end{array}$$

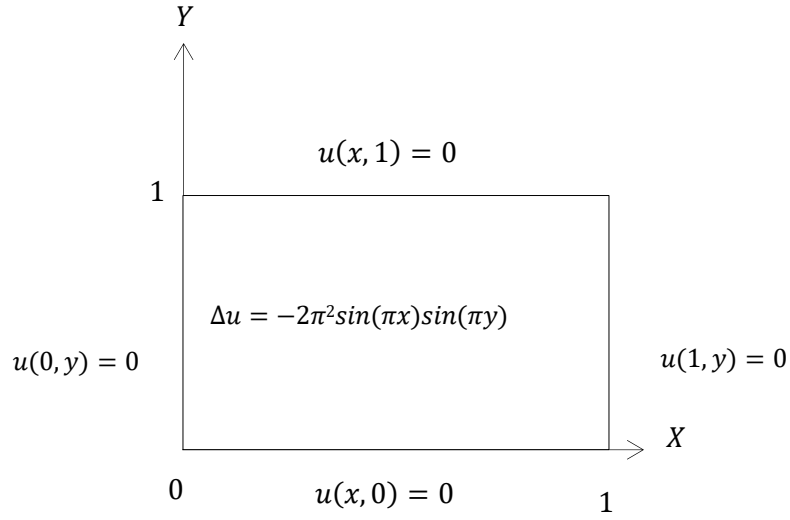
مثال (2.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة بواسون الأتية مع شروط ديرشليت المعطاة في الشكل (7.3) (Mekonnen&Guta,2019):

$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

$$\text{B.C: } u(x, 1) = 0, \quad u(1, y) = 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$



الشكل (7.3): يوضح معادلة بواسون مع الشروط الحدية للمثال (2.3)

الحل

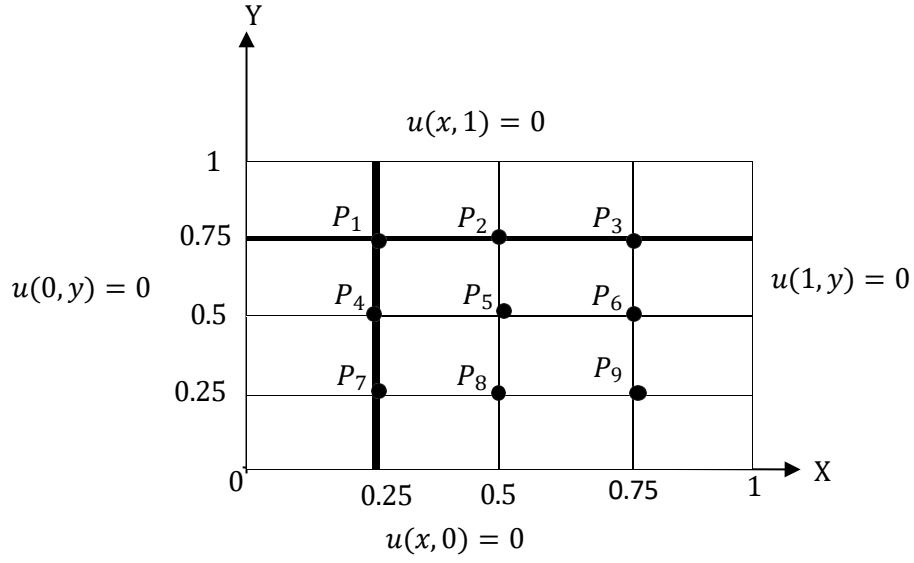
لتقريب الحل باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتبع الخطوات التالية: نختار عددين صحيحين

$n = m = 4$ ، ونعرف h و k كالتالي

$$k = \frac{d - c}{m} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \text{و} \quad h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

وهذا يعني تجزئة الفترة (0,1) إلى 4 أجزاء متساوية على محور x ، وكذلك الفترة (0,1) يتم تجزئتها إلى

4 أجزاء متساوية على محور y كما في الشكل (8.3).



الشكل 8.3: النقاط الداخلية المطلوبة في المثال 2.3 (الآن نعرف

المستقيمت الأفقية والمستقيمت الرأسية للشبكة:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,3,4$$

$$y_j = c + jk, \quad j = 0,1,2,3,4$$

ومنها نجد أن

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$$

وكذلك

$$y_0 = 0, y_1 = 0.25, y_2 = 0.5, y_3 = 0.75, y_4 = 1$$

وباستعمال معادلة الفروق (4.3) لتقريب النقاط الداخلية أي أن

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \left(\left(\frac{h}{k} \right)^2 \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = -h^2 f_{i,j}$$

وبالتعويض عن قيم h و k نحصل على المعادلة

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = -0.0625f_{i,j}$$

الآن بالتعويض عن قيم i و j كالتالي

$$4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} = -0.0625f_{1,1}, \quad i = 1, j = 1$$

$$4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{0,2} - u_{1,3} - u_{1,1} = -0.0625f_{1,2}, \quad i = 1, j = 2$$

$$\begin{aligned}
4u_{1,3} - u_{2,3} - u_{0,3} - u_{1,4} - u_{1,2} &= -0.0625f_{1,3}, & i = 1, j = 3 \\
4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} &= -0.0625f_{2,1}, & i = 2, j = 1 \\
4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{2,1} - u_{3,2} - u_{3,0} &= -0.0625f_{3,1}, & i = 3, j = 1 \\
4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{1,2} - u_{2,3} - u_{2,1} &= -0.0625f_{2,2}, & i = 2, j = 2 \\
4u_{2,3} - u_{3,3} - u_{1,3} - u_{2,4} - u_{2,2} &= -0.0625f_{2,3}, & i = 2, j = 3 \\
4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{2,2} - u_{3,3} - u_{3,1} &= -0.0625f_{3,2}, & i = 3, j = 2 \\
4u_{3,3} - u_{4,3} - u_{2,3} - u_{3,4} - u_{3,2} &= -0.0625f_{3,3}, & i = 3, j = 3
\end{aligned}$$

الآن بتطبيق الشروط الحدية نجد أن

$$\begin{aligned}
u_{0,1} &= 0, u_{1,0} = 0, u_{2,0} = 0 \\
u_{0,2} &= 0, u_{0,3} = 0, u_{3,0} = 0, u_{1,4} = 0, u_{2,4} = 0, u_{4,1} = 0 \\
u_{4,2} &= 0, u_{3,4} = 0, u_{4,3} = 0
\end{aligned}$$

وبإعادة ترميز نقاط الشبكة باستخدام العلاقة (5.3) يكون

$$\begin{aligned}
u_{1,3} &= u_1, & u_{2,3} &= u_2, & u_{3,3} &= u_3 \\
u_{1,2} &= u_4, & u_{2,2} &= u_5, & u_{3,2} &= u_6 \\
u_{1,1} &= u_7, & u_{2,1} &= u_8, & u_{3,1} &= u_9
\end{aligned}$$

وبالتعويض في معادلات الفروق نحصل على

$$\begin{aligned}
4u_7 - u_8 - u_4 &= 0.616850 \\
4u_4 - u_5 - u_1 - u_7 &= 0.872355 \\
4u_1 - u_2 - u_4 &= 0.616850 \\
4u_8 - u_9 - u_7 - u_5 &= 0.872355 \\
4u_9 - u_8 - u_6 &= 0.616850 \\
4u_5 - u_6 - u_4 - u_2 - u_8 &= 0.872355 \\
4u_2 - u_3 - u_1 - u_5 &= 0.616850 \\
4u_6 - u_5 - u_3 - u_9 &= 0.872355 \\
4u_3 - u_2 - u_6 &= 0.616850
\end{aligned}$$

وبإعادة ترتيب المعادلات عند كل نقطة داخلية P يكون

$$P_1: 4u_1 - u_2 - u_4 = 0.616850$$

$$P_2: 4u_2 - u_3 - u_1 - u_5 = 0.872355$$

$$P_3: 4u_3 - u_2 - u_6 = 0.616850$$

$$P_4: 4u_4 - u_5 - u_1 - u_7 = 0.872355$$

$$P_5: 4u_5 - u_6 - u_4 - u_2 - u_8 = 1.233701$$

$$P_6: 4u_6 - u_5 - u_3 - u_9 = 0.872355$$

$$P_7: 4u_7 - u_8 - u_4 = 0.616850$$

$$P_8: 4u_8 - u_9 - u_7 - u_5 = 0.872355$$

$$P_9: 4u_9 - u_8 - u_6 = 0.616850$$

بالتالي نحصل على النظام الخطي التالي

$$Aw = r$$

أي أنّ

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0.616850 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0.872355 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 0.616850 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_4 & 0.872355 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_5 & = 1.233701 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_6 & 0.872355 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_7 & 0.616850 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_8 & 0.872355 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 &] [u_9] & [0.616850 &] \end{bmatrix}$$

ولحل هذا النظام فإننا نستخدم طريقة جاوس للحذف [GEM]. Gaussian Elimination Method

وبتطبيق هذه الطريقة نحصل على

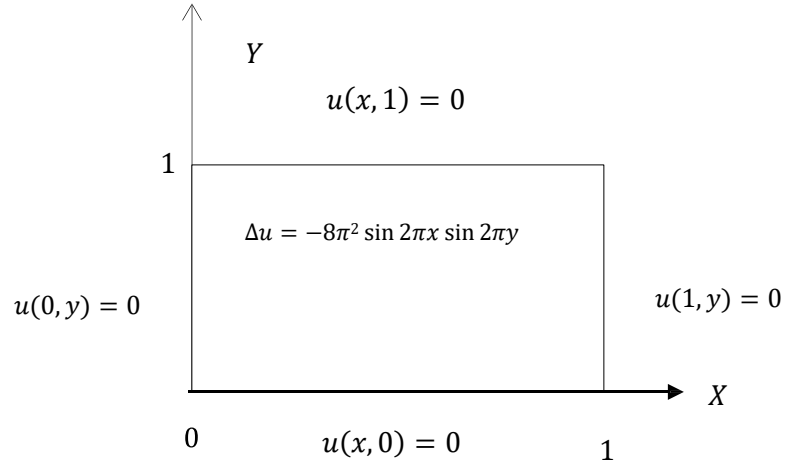
| | |
|---------|------------|
| u_1 | 0.526514 |
| u_2 | 0.744603 |
| u_3 | 0.526514 |
| u_4 | 0.744603 |
| u_5 | = 1.053028 |
| u_6 | 0.744603 |
| u_7 | 0.526514 |
| u_8 | 0.744603 |
| $[u_9]$ | [0.526514] |

مثال (3.3)

أوجد الحل التقريبي لمسألة ديرشيلت الحدية الموضحة بالشكل (9.3) لمعادلة بواسون الآتية:

$$u_{xx} + u_{yy} = -8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad \text{لكل } (x, y) \in \Omega$$

حيث $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ، $u = 0$ على $\partial\Omega$ (Tanininah , 2021).

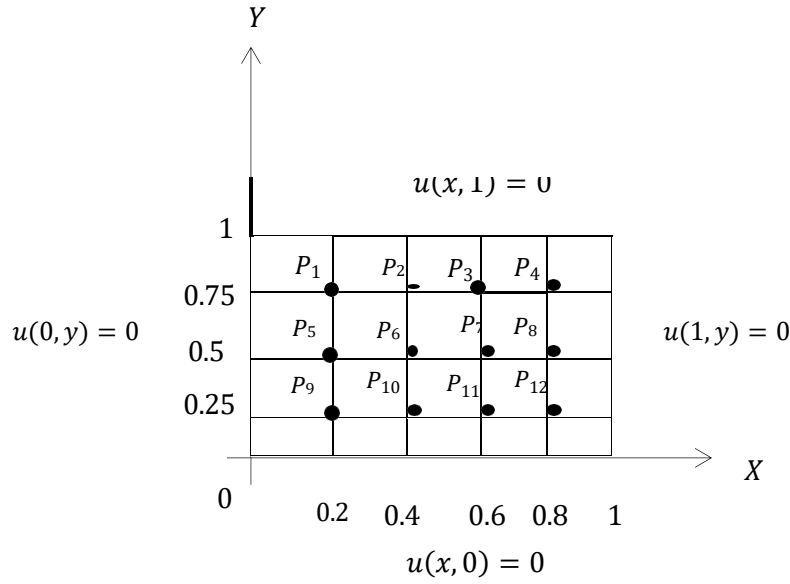


الشكل (9.3): معادلة بواسون مع شروط ديرشيلت في مثال (3.3)

الحل

لحل هذه المعادلة نختار $m = 4$ ، $n = 5$ ، ونجزئ الفترتين طول كل منهما

$$k = \frac{1}{4} , h = \frac{1}{5} \quad \text{على التوالي كما موضح بالشكل (10.3)}$$



الشكل 10.3: نقاط الشبكة الداخلية المطلوبة في المثال 3.3

وبالتعويض في معادلة الفروق 4.3) عن قيم $h = \frac{1}{5}$ ، $k = \frac{1}{4}$ فإننا نحصل على المعادلة التالية:

$$3.28u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - 0.64(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = 0.32\pi^2 \sin 2\pi x_i \sin 2\pi y_j$$

لكل $i = 1,2,3,4$ و $j = 1,2,3$

وبالتعويض بالشروط الحدودية وقيم، فإننا نحصل على المعادلات الآتية:

$$3.28u_{1,1} - u_{2,1} - 0.64u_{1,2} = 0.30434\pi^2$$

$$3.28u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - 0.64u_{2,2} = 0.18809\pi^2$$

$$3.28u_{3,1} - u_{4,1} - u_{2,1} - 0.64u_{3,2} = -0.18809\pi^2$$

$$3.28u_{4,1} - u_{3,1} - 0.64u_{4,2} = -0.30434\pi^2$$

$$3.28u_{1,2} - u_{2,2} - 0.64u_{1,3} - 0.46u_{1,1} = 0$$

$$3.28 u_{2,2} - u_{3,2} - u_{1,2} - 0.64u_{2,3} - 0.64u_{2,1} = 0$$

$$3.28u_{3,2} - u_{4,2} - u_{2,2} - 0.64u_{3,3} - 0.64u_{3,1} = 0$$

$$3.28u_{4,2} - u_{3,2} - 0.64u_{4,3} - 0.64u_{4,1} = 0$$

$$3.28u_{1,3} - u_{2,3} - u_{1,4} - 0.64u_{1,2} = -0.30434\pi^2$$

$$3.28u_{2,3} - u_{3,3} - 0.64u_{2,4} - 0.64u_{2,2} = -0.18809\pi^2$$

$$3.28u_{3,3} - u_{4,3} - u_{2,3} - 0.64u_{3,4} - 0.64u_{3,2} = 0.18809\pi^2$$

$$3.28u_{4,3} - u_{3,3} - 0.64u_{4,3} - 0.64u_{4,2} = 0.30434\pi^2$$

وبإعادة الترميز للنقاط الداخلية فإنَّ

$$u_{1,3} = u_1 \quad u_{2,3} = u_2 \quad u_{3,3} = u_3 \quad u_{4,1} = u_4$$

$$u_{1,2} = u_5 \quad u_{2,2} = u_6 \quad u_{3,2} = u_7 \quad u_{4,2} = u_8$$

$$u_{1,1} = u_9 \quad u_{2,1} = u_{10} \quad u_{3,1} = u_{11} \quad u_{4,1} = u_{12}$$

ونرتب المعادلات السابقة عند كل النقاط الداخلية P نحصل على

$$P_1: 3.28u_1 - u_2 - 0.64u_5 = -3.003697$$

$$P_2: 3.28u_2 - u_3 - u_1 - 0.64u_6 = -1.856387$$

$$P_3: 3.28u_3 - u_2 - u_4 - 0.64u_7 = 1.856387$$

$$P_4: 3.28u_4 - u_3 - 0.64u_8 = 3.003697$$

$$P_5: 3.28u_5 - u_6 - 0.64u_1 - 0.64u_9 = 0$$

$$P_6: 3.28u_6 - u_7 - u_5 - 0.64u_{10} - 0.64u_2 = 0$$

$$P_7: 3.28u_7 - u_6 - u_8 - 0.64u_3 - 0.64u_{11} = 0$$

$$P_8: 3.28u_8 - u_7 - 0.64u_4 - 0.64u_{12} = 0$$

$$P_9: 3.28u_9 - u_{10} - 0.64u_5 = 3.003697$$

$$P_{10}: 3.28u_{10} - u_{11} - u_9 - 0.64u_6 = 1.856387$$

$$P_{11}: 3.28u_{11} - u_{12} - u_{10} - 0.64u_7 = -1.856387$$

$$P_{12}: 3.28u_{12} - u_{11} - 0.64u_8 = -3.003697$$

وبحل هذا النظام بطريقة جاوس للحذف [GEM] نجد أنَّ:

$$\begin{aligned}
u_1 & -1.095398 \\
u_2 & -0.636500 \\
u_3 & 0.738609 \\
u_4 & 1.145381 \\
u_5 & 0.072654 \\
u_6 & 0.196403 \\
u_7 & = 0.086269 \\
u_8 & 0.033780 \\
u_9 & 1.161111 \\
u_{10} & 0.758249 \\
u_{11} & -0.656140 \\
[u_{12}] & [-1.109213]
\end{aligned}$$

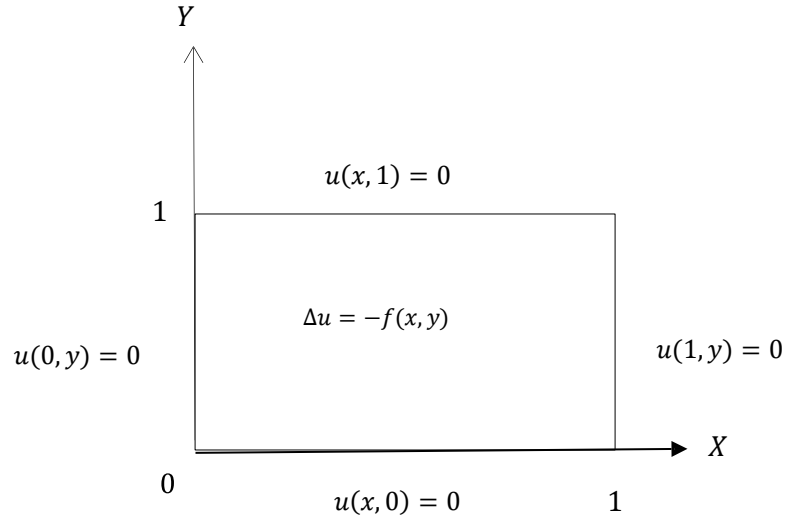
مثال (4.3)

أوجد الحل التقريبي لمسألة ديرشليت الحدية الموضحة بالشكل (11.3) لمعادلة بواسون الآتية:

$$u_{xx} + u_{yy} = -f(x, y) \text{ لكل } (x, y) \in \Omega \text{ حيث}$$

$$f(x, y) = (x^2 - 5x + 4)(y - 1)(ye^{-x-2y}) + 2x(x - 1)(2y^2 - 6y + 3)(e^{-x-2y})$$

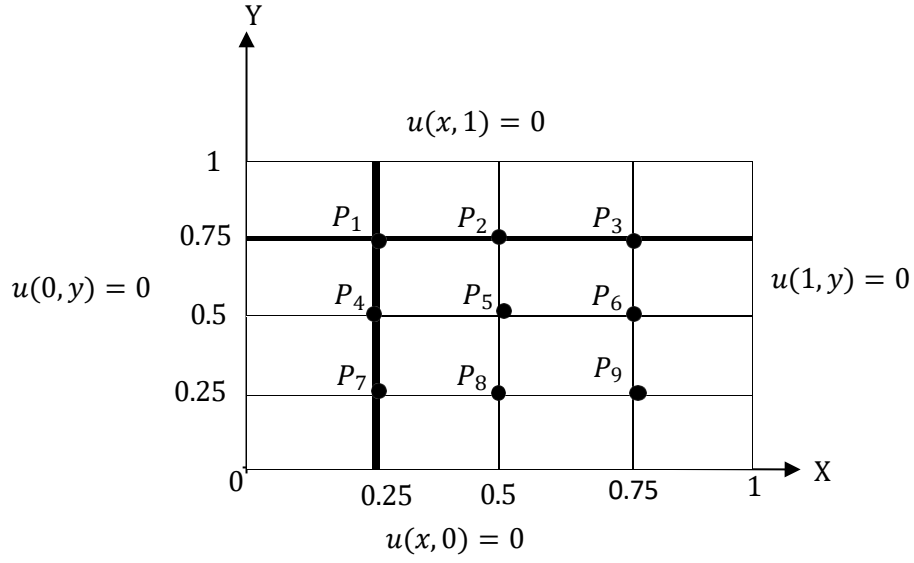
$$. \text{Roslan \& Hoe, 2024} (\partial\Omega \text{ على } u = 0, \Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\})$$



الشكل (11.3): معادلة بواسون مع شروط ديرشليت في مثال (4.3)

الحل

باختيار $n = m = 4$ وتقسيم المنطقة المدروسة نحصل على شبكة من النقاط الداخلية والحدية الموضحة بالشكل (12.3) التالي



الشكل 12.3: النقاط الداخلية المطلوبة في المثال 4.3

وباتباع خطوات المثال السابق واستخدام المعادلة 4.3) وبعد تطبيق الشروط الحدية، فإننا نحصل على النظام الخطي التالي:

$$P_1: 4u_1 - u_2 - u_4 = 0.004200$$

$$P_2: 4u_2 - u_3 - u_1 - u_5 = 0.001189$$

$$P_3: 4u_3 - u_2 - u_6 = 0.000007$$

$$P_4: 4u_4 - u_5 - u_1 - u_7 = 0.015948$$

$$P_5: 4u_5 - u_6 - u_4 - u_2 - u_8 = 0.009588$$

$$P_6: 4u_6 - u_5 - u_3 - u_9 = 0.004243$$

$$P_7: 4u_7 - u_8 - u_4 = 0.033559$$

$$P_8: 4u_8 - u_9 - u_7 - u_5 = 0.026226$$

$$P_9: 4u_9 - u_8 - u_6 = 0.013640$$

والذي يمكن كتابته على الصورة

$$\begin{array}{cccccccccc}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0.004200 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0.001189 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 0.000077 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_4 & 0.015948 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_5 = & 0.009588 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_6 & 0.004243 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_7 & 0.033559 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_8 & 0.026226 \\
[0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] & [u_9] & [0.013640]
\end{array}$$

وبحل هذا النظام نحصل على

$$\begin{array}{ll}
u_1 & 0.005589 \\
u_2 & 0.005689 \\
u_3 & 0.032823 \\
u_4 & 0.012346 \\
u_5 = & 0.012726 \\
u_6 & 0.007370 \\
u_7 & 0.015453 \\
u_8 & 0.015909 \\
[u_9] & [0.009230]
\end{array}$$

وهو الحل التقريبي مقرباً لأقرب ستة أرقام عشرية

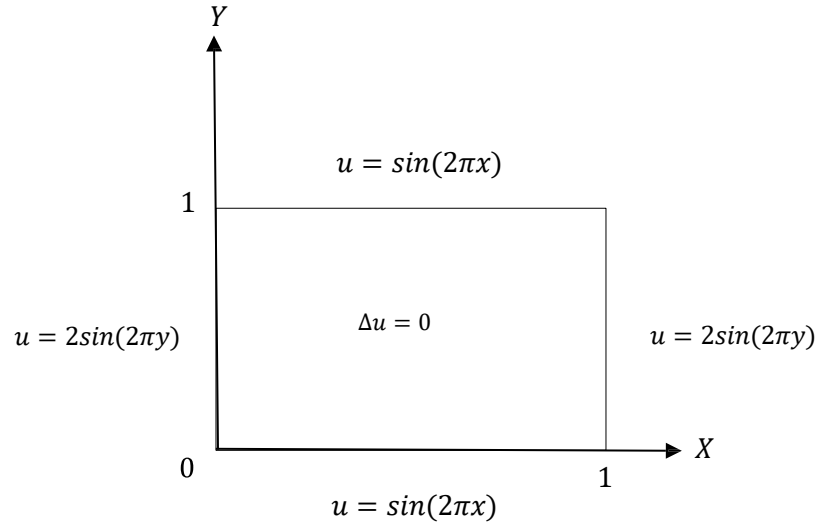
مثال (5.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس الآتية مع الشروط الحدية الموضحة بالشكل (13.3) (Sundaram,2022):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B. c: \quad u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad u(0, y) = 2\sin(2\pi y)$$

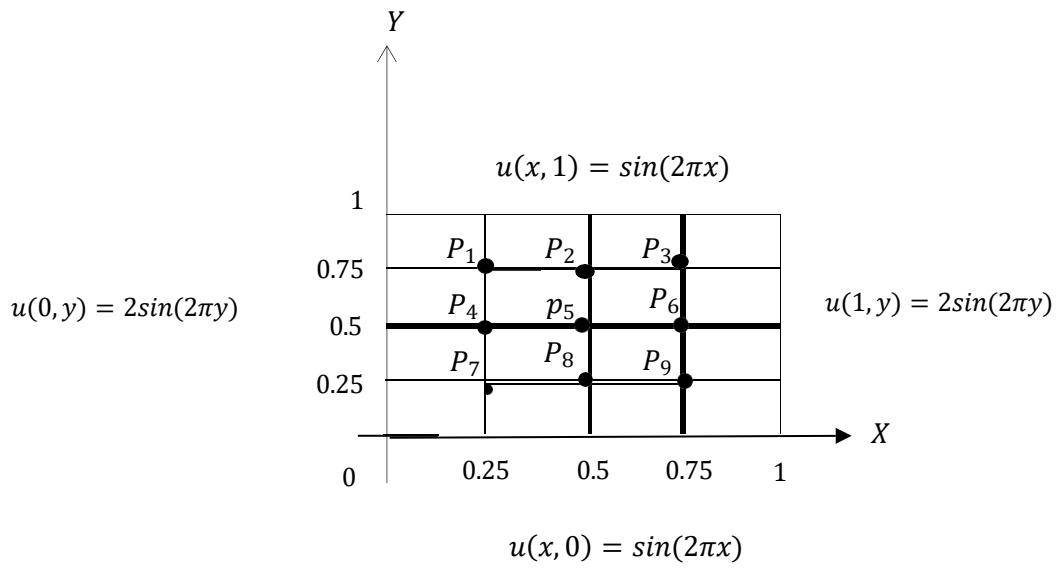
$$u(x, 1) = \sin(2\pi x), \quad u(1, y) = 2\sin(2\pi y)$$



الشكل (13.3): معادلة بواسون وشروط ديرشليت الحدية في المثال (5.3)

الحل

باتباع الخطوات السابقة واختيار الشكل $m = n = 4$ ومنها يكون $h = k = \frac{1}{4}$ ، ومن ثم تقسيم المنطقة كما في (14.3)



الشكل (14.3): النقاط الداخلية المطلوبة في المثال (5.3)

وباستخدام العلاقة (6.3) ومن ثم تطبيق الشروط الحدية نحصل على النظام الخطي التالي

$$\begin{array}{cccccccccc}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & -1 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & -3 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_4 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_5 & = 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_7 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_8 & 0 \\
[0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] & [u_9] & [1]
\end{array}$$

وبحل هذا النظام نجد أن

$$\begin{array}{ll}
u_1 & -0.285714 \\
u_2 & -0.285714 \\
u_3 & -0.857143 \\
u_4 & 0.142857 \\
u_5 & = 0 \\
u_6 & -0.142857 \\
u_7 & 0.857143 \\
u_8 & 0.285714 \\
[u_9] & [0.285714]
\end{array}$$

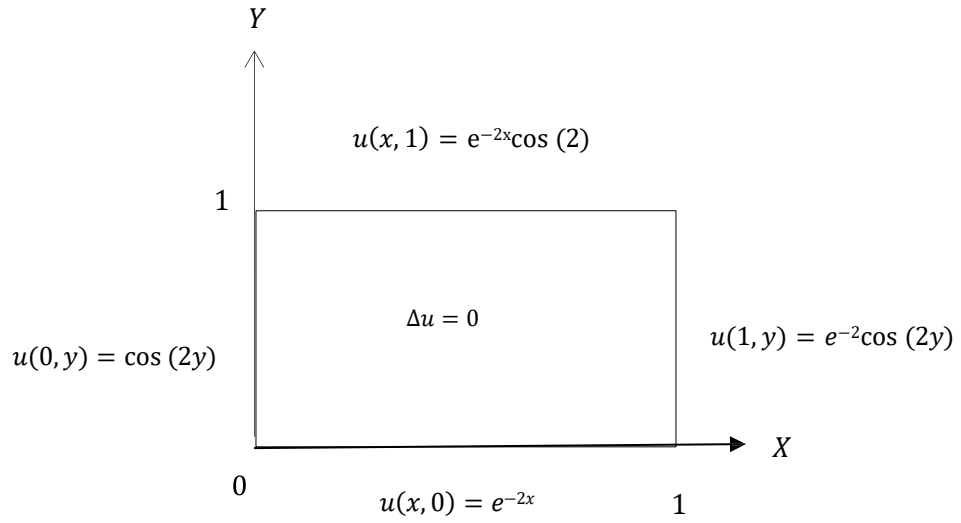
مثال (6.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس المعرفة على المنطقة الموضحة في الشكل (15.3) والتي تعطى بالشكل التالي (Kahlaf & Mhassin, 2021):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B. c: \quad u(x, 0) = e^{-2x}, \quad u(0, y) = \cos(2y)$$

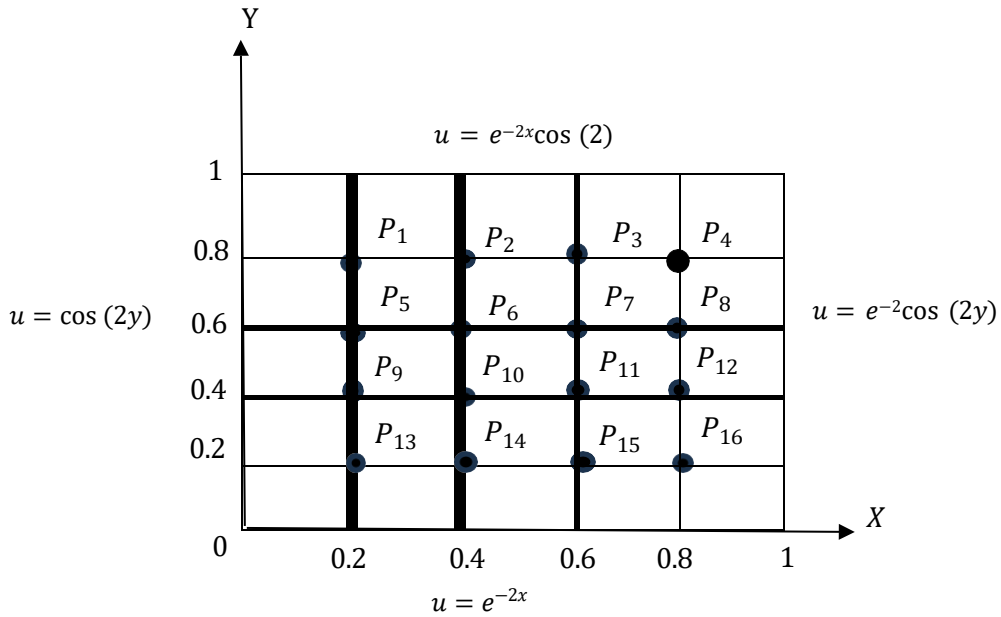
$$u(x, 1) = e^{-2x}\cos(2), \quad u(1, y) = e^{-2}\cos(2y)$$



الشكل (15.3): معادلة لابلاس مع شروط ديرشليت غير المتجانسة في مثال (6.3)

الحل

باختيار $n = 5$ ومنها $h = \frac{1}{5}$ نحصل على الشبكة الموضحة بالشكل (16.3)



الشكل (16.3): يوضح النقاط الداخلية المطلوبة في المثال (6.3)

وبالتعويض في معادلة الفروق (6.3)، ومن ثم تطبيق الشروط الحدية نحصل على النظام الخطي التالي

$$Aw = r$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4] \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ [u_{16}] \end{matrix}, \quad r = \begin{matrix} -0.308151 \\ -0.186987 \\ -0.125341 \\ -0.087970 \\ 0.362358 \\ 0 \\ 0 \\ 0.049040 \\ 0.696707 \\ 0 \\ 0 \\ 0.094289 \\ 1.591381 \\ 0.449329 \\ 0.301194 \\ [0.326548] \end{matrix}$$

وبحل هذا التّظام نحصل على

$$\begin{array}{r}
u_1 \\
u_2 \\
u_3 \\
u_4 \\
u_5 \\
u_6 \\
u_7 \\
u_8 \\
u_9 \\
u_{10} \\
u_{11} \\
u_{12} \\
u_{13} \\
u_{14} \\
u_{15} \\
[u_{16}]
\end{array}
=
\begin{array}{r}
-0.019197 \\
-0.012603 \\
-0.008340 \\
-0.005631 \\
0.243967 \\
0.164110 \\
0.110217 \\
0.073785 \\
0.468596 \\
0.314860 \\
0.211311 \\
0.141516 \\
0.618850 \\
0.415423 \\
0.278652 \\
[0.186680]
\end{array}$$

وهو الحل التقريبي لمعادلة لابلاس مقربا لأقرب ستة أرقام عشرية

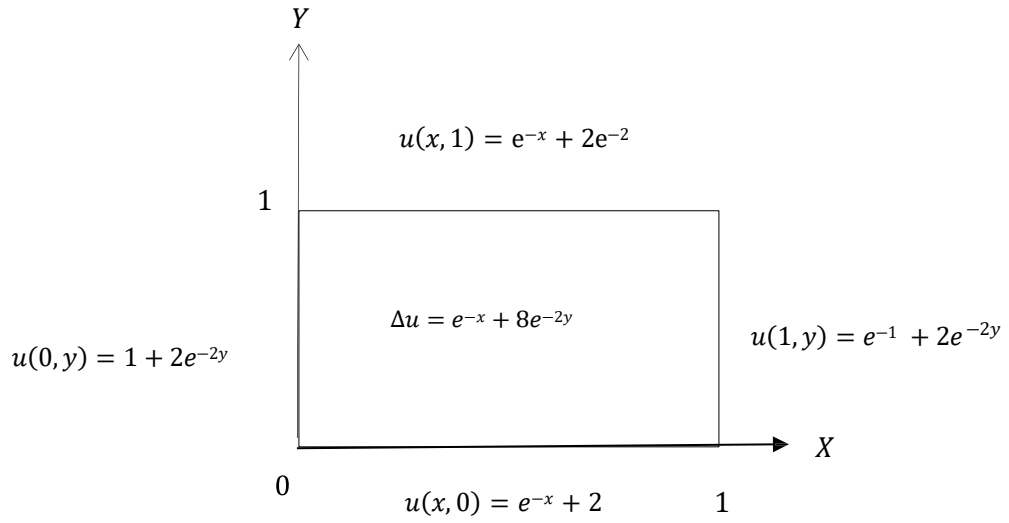
مثال (7.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة بواسون التالية مع الشروط الحدية الموضحة في الشكل (17.3) (Baharum&Hoe,2022):

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-x} + 8e^{-2y}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B. c: \quad u(x, 0) = 2 + e^{-x}, \quad u(0, y) = 1 + 2e^{-2y}$$

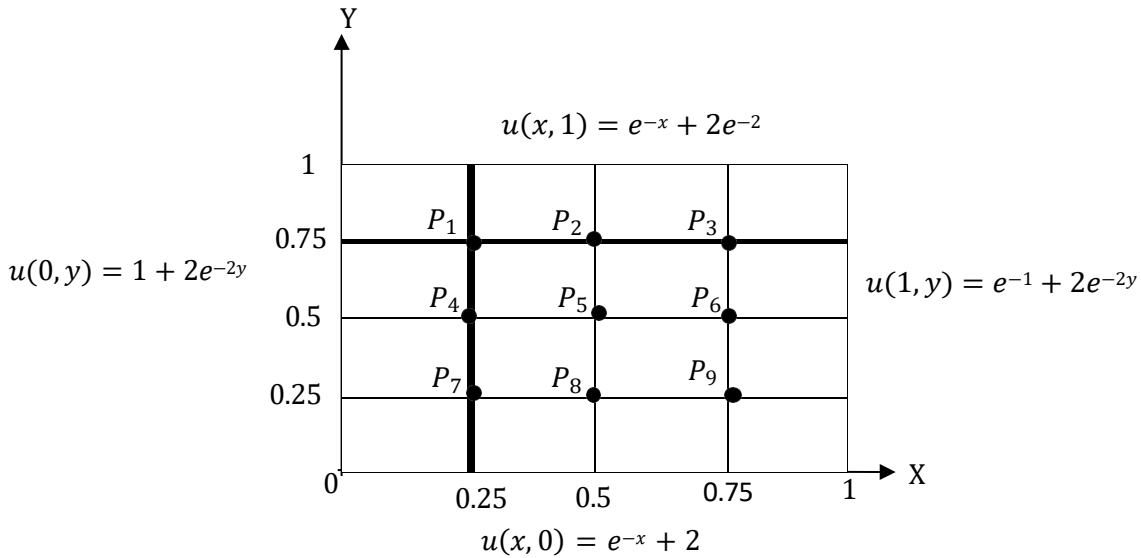
$$u(x, 1) = 2e^{-2} + e^{-x}, \quad u(1, y) = e^{-1} + 2e^{-2y}$$



الشكل 17.3(:معادلة لابلاس مع شروط ديرشليت غير المتجانسة في مثال 7.3)

الحل

باختيار $n = m = 4$ ومنها $h_x = \frac{1}{4}$ وبتقسيم المنطقة المعطاة والحصول على شبكة من النقاط الداخلية الواضحة في الشكل 18.3(، ومن ثم التعويض في معادلة الفروق التي تعطى بالعلاقة 4.3) نحصل على المعادلات الآتية:



الشكل 18.3(:يوضح النقاط الداخلية المطلوبة للمثال 7.3)

$$4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} = -0.0625f_{1,1}, \quad i = 1, j = 1$$

$$4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{0,2} - u_{1,3} - u_{1,1} = -0.0625f_{1,2}, \quad i = 1, j = 2$$

$$4u_{1,3} - u_{2,3} - u_{0,3} - u_{1,4} - u_{1,2} = -0.0625f_{1,3}, \quad i = 1, j = 3$$

$$4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} = -0.0625f_{2,1}, \quad i = 2, j = 1$$

$$4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{2,1} - u_{3,2} - u_{3,0} = -0.0625f_{3,1}, \quad i = 3, j = 1$$

$$4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{1,2} - u_{2,3} - u_{2,1} = -0.0625f_{2,2}, \quad i = 2, j = 2$$

$$4u_{2,3} - u_{3,3} - u_{1,3} - u_{2,4} - u_{2,2} = -0.0625f_{2,3}, \quad i = 2, j = 3$$

$$4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{2,2} - u_{3,3} - u_{3,1} = -0.0625f_{3,2}, \quad i = 3, j = 2$$

$$4u_{3,3} - u_{4,3} - u_{2,3} - u_{3,4} - u_{3,2} = -0.0625f_{3,3}, \quad i = 3, j = 3$$

الآن بإيجاد قيم f_{ij} حيث $i, j = 1, 2, 3$ كالتالي:

$$f_{1,1} = f(x_1, y_1) = f(0.25, 0.75) = e^{-0.25} + 8e^{-2(0.75)} = 2.563842$$

وبنفس الطريقة يتم إيجاد قيم f_{ij} الباقية وتكون كالتالي

$$f_{1,2} = 2.391572, \quad f_{1,3} = 2.257408, \quad f_{2,1} = 3.721836, \quad f_{2,2} = 3.549566$$

$$f_{2,3} = 3.415402, \quad f_{3,1} = 5.631046, \quad f_{3,2} = 5.458776, \quad f_{3,3} = 5.324612$$

وبتطبيق الشروط الحدية نجد أن

$$u_{0,1} = 1.049471, \quad u_{1,0} = 1.446260, \quad u_{0,2} = 0.872012, \quad u_{2,0} = 1.735789$$

$$u_{0,3} = 0.743031, \quad u_{3,0} = 2.213061, \quad u_{1,4} = 0.814140, \quad u_{4,1} = 2.778801$$

$$u_{2,4} = 1.103638, \quad u_{4,2} = 2.606531, \quad u_{3,4} = 1.580941, \quad u_{4,3} = 2.472366$$

وبالتعويض في المعادلات السابقة عن قيم f_{ij} والنقاط الحدية نحصل على الآتي:

$$P_1: 4u_1 - u_2 - u_4 = 2.335730$$

$$P_2: 4u_2 - u_3 - u_1 - u_5 = 0.722539$$

$$P_3: 4u_3 - u_2 - u_6 = 1.416043$$

$$P_4: 4u_4 - u_5 - u_1 - u_7 = 1.503174$$

$$P_5: 4u_5 - u_6 - u_4 - u_2 - u_8 = -0.221848$$

$$P_6: 4u_6 - u_5 - u_3 - u_9 = 0.890175$$

$$P_7: 4u_7 - u_8 - u_4 = 4.639922$$

$$P_8: 4u_8 - u_9 - u_7 - u_5 = 2.265357$$

$$P_9: 4u_9 - u_8 - u_6 = 3.720519$$

والذي يمكن كتابته على الصورة

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 2.335730 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0.722539 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 1.416043 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_4 & 1.503174 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_5 = & -0.221848 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_6 & 0.890175 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_7 & 4.639922 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_8 & 2.265357 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] & [u_9] & [3.720519] \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام يكون

$$\begin{aligned} u_1 & 1.226965 \\ u_2 & 1.054100 \\ u_3 & 0.920417 \\ u_4 & 1.518032 \\ u_5 = & 1.346476 \\ u_6 & 1.211526 \\ u_7 & 1.995512 \\ u_8 & 1.824095 \\ [u_9] & [1.689035] \end{aligned}$$

Second: Von-Neumann Boundary Conditions

ثانياً: شروط نيومان الحدية

لتقريب معادلة بواسون تحت شروط نيومان الحدية بطريقة الفروق المنتهية فإننا نتبع نفس الخطوات السابقة في حالة شروط ديرشليت الحدية باستثناء تقريب الشروط الحدية، ولتوضيح ندرس تقريب المشتقات على الجوانب الأربعة للمستطيل، ولكن قبل الشروع في هذه العملية يجب أن نعرّف معادلة بواسون مع الشروط الحدية لنيومان كالتالي:

تعطى شروط نيومان الحدية لمعادلة بواسون بالصورة الآتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

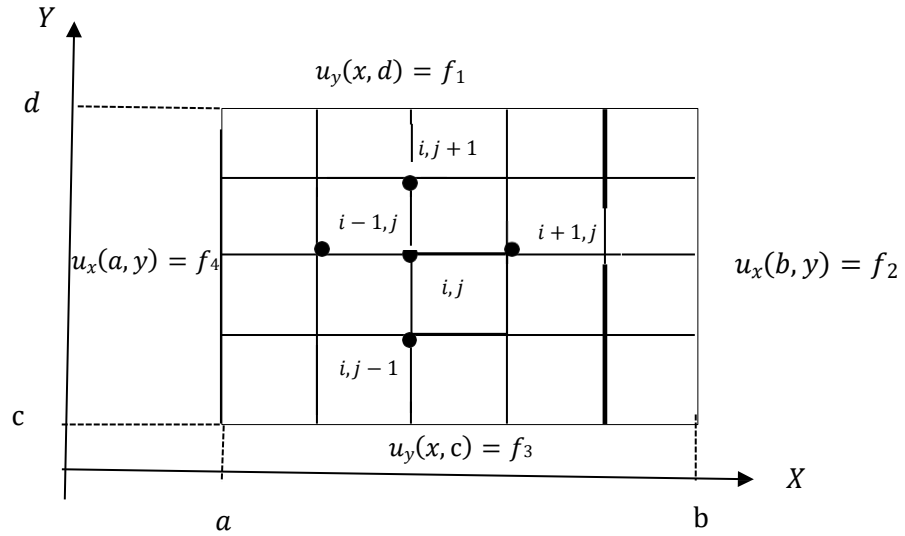
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, d) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = f_2(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, c) = f_3(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = f_4(y)$$

حيث

$$\Omega = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$$

وموضحة في الشكل التالي



الشكل (19.3): يوضح المنطقة المستطيلة Ω

وحيث أن معادلة الفروق المنتهية لتقريب معادلة بواسون تعطى بالعلاقة التالية

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \left(\left(\frac{h}{k} \right)^2 \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

الآن بتقريب شروط نيومان الحدية على كل جانب من المنطقة المستطيلة وذلك باستخدام الفروق المركزية

أي أن (Papanikos&Gousidou,2015):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, d) = \frac{u_{i,M+1} - u_{i,M-1}}{2k} = f_{i1}(x) \Rightarrow u_{i,M+1} = 2kf_{i1}(x) + u_{i,M-1} \quad (8.3)$$

$$j = M, i = 1, 2, \dots, N - 1 \text{ لأي}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = \frac{u_{N+1,j} - u_{N-1,j}}{2h} = f_{2j}(y) \Rightarrow u_{N+1,j} = 2hf_{2j}(y) + u_{N-1,j} \quad (9.3)$$

$$i = N, j = 1, 2, \dots, M - 1 \text{ لأي}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, c) = \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = f_{3i}(x) \Rightarrow u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kf_{3i}(x) \quad (10.3)$$

$$j = 0, i = 1, 2, \dots, N - 1 \text{ لأي}$$

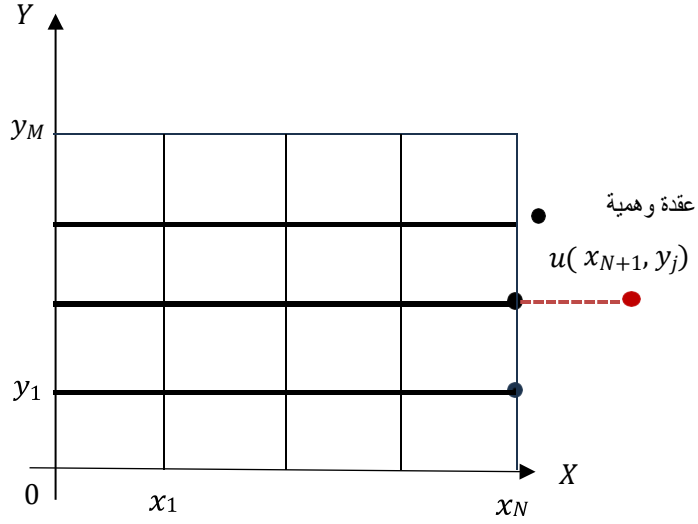
$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = f_{4j}(y) \Rightarrow u_{-1,j} = u_{1,j} - 2hf_{4j}(y) \quad (11.3)$$

$$j = 1, 2, \dots, M - 1, i = 0 \text{ لأي}$$

فمثلاً لإيجاد معادلة الفروق لمعادلة بواسون عند النقطة (x_N, y_j) يجب ادخال عقد إضافية على الشبكة الفروق وهي

$$(x_{N+1}, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, M$$

وتسمى هذه العقد بالعقد الوهمية (Ghosts Nodes) لأنها تقع خارج المنطقة Ω ، ويمكن أن توضح بالرسم كما في الشكل (20.3)



الشكل(20.3): يوضح العقد الوهمية

وبفرض أن $h = k$ فإن معادلة الفروق لمعادلة بواسون عند النقطة (x_N, y_j) تكون على الشكل:

$$4u_{N,j} - u_{N+1,j} - u_{N-1,j} - u_{N,j+1} - u_{N,j-1} = -h^2 f(x_N, y_j) \quad (12.3)$$

حيث أن $u_{N+1,j}$ غير معروفه فإننا نستخدم صيغة الفرق المركزي أي العلاقة (4.3) السابقة فنحصل على

$$\frac{u_{N+1,j} - u_{N-1,j}}{2h} = u_x(x_N, y_j) = f_{2j}$$

ومنها

$$u_{N+1,j} = u_{N-1,j} + 2hf_{2j}$$

وبالتعويض في المعادلة (12.3) عن $u_{N+1,j}$ نجد أن

$$4u_{N,j} - 2u_{N-1,j} - u_{N,j+1} - u_{N,j-1} = 2hf_{2j} - h^2 f(x_N, y_j) \quad (13.3)$$

ويتم اتباع نفس الأسلوب لبقية العقد الوهمية الأخرى التي تظهر عند تقريب الدالة u عند نقاط الشبكة الأخرى.

أما في حالة $h \neq k$ فإن صيغة التقريب لمعادلة بواسون التي تعطي بالعلاقة (13.3) تكون على الصورة

$$2\left(\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right)u_{N,j} - 2u_{N-1,j} - \left(\frac{h}{k}\right)^2(u_{N,j+1} - u_{N,j-1}) = 2hf_{2j} - h^2 f_{Nj} \quad (14.3)$$

وبالتعويض بقيم الشروط الحدية في معادلة الفروق فإننا نتحصل على نظام خطي على الصورة

$$Aw = r$$

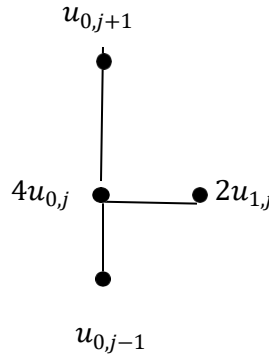
حيث المصفوفة A من الرتبة $(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$ ، والمصفوفة w من الرتبة $1 \times (N+1)(M+1)$.

وبحل هذا النظام نتحصل على حل تقريبي لمعادلة بواسون في بعدين تحت شروط نيومان الحدية.

كذلك يتم اتباع نفس الطريقة في حالة معادلة لابلاس باعتبارها حالة خاصة من معادلة بواسون أي أن بوضع $f(x_N, y_j) = 0$ في المعادلة (14.3)، كذلك يمكن اتباع نفس الأسلوب لتقريب هذا النوع من المعادلات الإهليجية وتقريب حدود المستطيل الأخرى، فمثلاً في حالة معادلة لابلاس يمكن إيجاد معادلات تقريب حدود المستطيل الأخرى (النقاط الحدية التي تقع على الحدود الأخرى للمستطيل)، وباختيار $h = k$ يكون:

1. الحد أو الجانب الأيسر (Left Edge)

يمكن توضيح الحد الأيسر بالرسم كما في الشكل (21.3):



الشكل (21.3): يوضح تقريب النقاط الحدية على الجانب الأيسر للمستطيل

باستخدام العلاقة (7.3) والعلاقة (11.3) فإن معادلة الفرق لتقريب النقاط الحدية على الجانب الأيسر للمستطيل تعطى بالعلاقة

$$4u_{0,j} - 2u_{1,j} - u_{0,j-1} - u_{0,j+1} = -2hf_{4j}(x) \quad (15.3)$$

لأي $j = 1, 2, \dots, M-1$ و $i = 0$

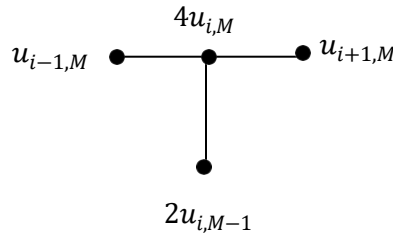
2. الحد العلوي (Top Edge)

لتقريب النقاط الحدية التي تقع على الحد العلوي للمستطيل الموضح بالشكل (22.3) نستخدم العلاقة (7.3) والعلاقة (8.3) ومنهما نحصل على

$$4u_{i,M} - u_{i-1,M} - u_{i+1,M} - 2u_{i,M-1} = 2hf_{1i} \quad (16.3)$$

$$j = M \text{ و } i = 1, 2, \dots, N - 1$$

وهي معادلة الفرق لتقريب النقاط الحدية الموجودة على الحد العلوي للمستطيل



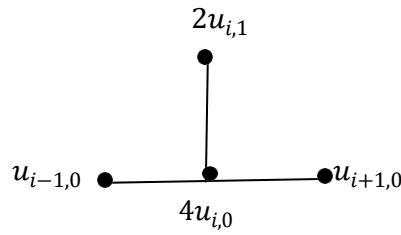
الشكل (22.3): يوضح طريقة تقريب النقاط الحدية أعلى المستطيل

3. الحد أو الجانب السفلي (Bottom Edge)

باستخدام العلاقة (7.3) والعلاقة (10.3) نحصل على معادلة تقريب النقاط الحدية للحد السفلي للمستطيل الموضح بالشكل (23.3) وتكون على الصورة

$$4u_{i,0} - u_{i-1,0} - u_{i+1,0} - 2u_{i,1} = -2hf_{3i} \quad (17.3)$$

$$j = 0 \text{ و } i = 1, 2, \dots, N - 1$$



الشكل (23.3): يوضح طريقة تقريب النقاط الحدية أسفل المستطيل

ملاحظة (1.3)

أثناء حل معادلة بواسون مع شروط نيومان بطريقة الفروق المنتهية فإن مصفوفة المعاملات A في النظام الخطي الناتج تكون شبه شاده أو شاده؛ وذلك لأن الحل في هذه الحالة ليس وحيداً ويتحدد بإضافة ثابت جمعي ولحل هذه المشكلة فإنه يتم إضافة شرط حدي ويكون:

1. جعل قيمة u تساوي صفراً عند نقطة معينة.
2. بفرض أن $\int_{\Omega} u dx = 0$ وهذا يكافئ $\sum_{i=1}^i u = 0$

بالتالي فإن النظام يصبح قابل للحل ونحصل على حل وحيد (Yoon, M., Yoon, G., & Min, C, 2016)

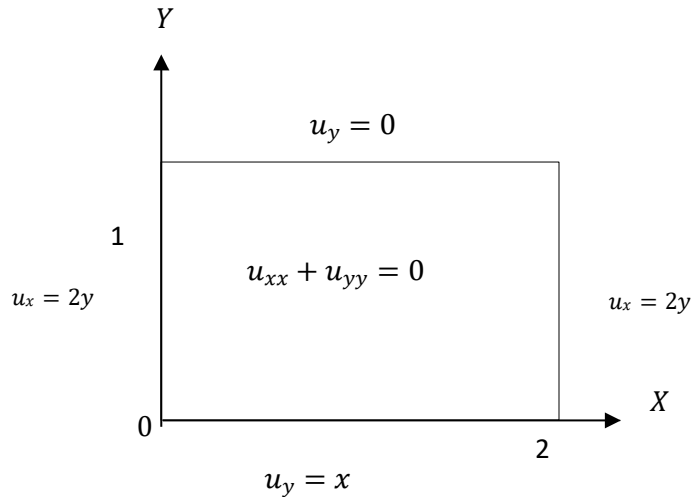
مثال (8.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس الآتية في المنطقة الموضحة بالشكل (24.3)

(Turyn, 2013):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

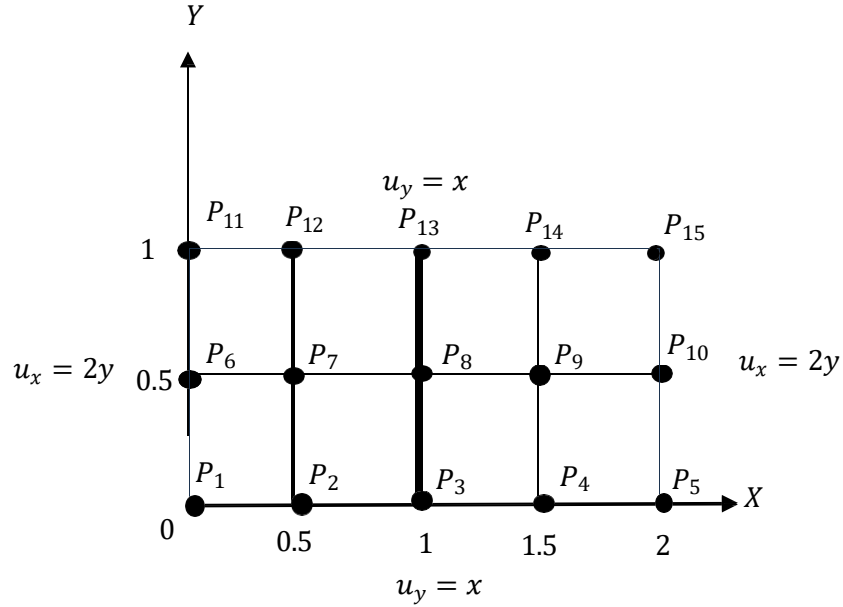
$$B.C: \begin{aligned} u_x(0, y) &= 2y, & u_x(2, y) &= 2y \\ u_y(x, 0) &= x, & u_y(x, 1) &= x \end{aligned}$$



الشكل (24.3): معادلة لابلاس مع شروط نيومان في المثال (8.3)

الحل

نختار عددين صحيحين كالتالي $M = 2$ ، $N = 4$ وكذلك $k = h = 0.5$ ، وبالتالي نحصل على شبكة من النقاط الداخلية والحدية كما موضح بالشكل (25.3)



الشكل (25.3): يوضح النقاط الداخلية والحدية المطلوبة في المثال (8.3)

وبتعريف المستقيمات الرأسية والأفقية كالتالي

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.5, \quad x_4 = 2$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5, \quad y_2 = 1$$

الآن نوجد معادلة الفروق لكل نقطة حدية أو داخلية والبدائية ستكون من الجانب السفلي للمستطيل بالتعويض في معادلة الفروق التي تعطى بالعلاقة (6.3) لتقريب النقطة الحدية الأولى $u_{0,0}$ التي تقع في الزاوية نحصل على المعادلة

$$4u_{0,0} - u_{1,0} - u_{-1,0} - u_{0,1} - u_{0,-1} = 0, \quad i = 0, \quad j = 0$$

وباستخدام صيغة الفرق المركزي لنقطين لإيجاد المشتقة عند النقطة $(0,0)$ ومن ثم اختزال العقد التخيلية

$u_{0,-1}$ و $u_{-1,0}$ يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \frac{u_{1,0} - u_{-1,0}}{2h} = f_4(y_0)$$

وحيث أن

$$k = 0.5 \text{ ، } f_4(y) = 2$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نحصل على

$$u_{1,0} = u_{-1,0}$$

وكذلك

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \frac{u_{0,1} - u_{0,-1}}{2k} = f_3(x_0)$$

وبالتعويض عن قيم $h = 0.5$ ، $f_3(x) = x$ يكون

$$u_{0,1} = u_{0,-1}$$

الآن بالتعويض في معادلة الفرق للنقطة $u_{1,0}$ نجد أنَّ

$$4u_{0,0} - 2u_{1,0} - 2u_{0,1} = 0, \quad i = 0, \quad j = 0$$

أو

$$2u_{0,0} - u_{1,0} - u_{0,1} = 0, \quad i = 0, \quad j = 0$$

وباستخدام العلاقة (17.3) لتقريب النقاط الحدية أسفل المستطيل نحصل على

$$4u_{1,0} - u_{2,0} - u_{0,0} - 2u_{1,1} = -2hf_1(0.5), \quad i = 1, \quad j = 0$$

$$4u_{2,0} - u_{3,0} - u_{1,0} - 2u_{2,1} = -2hf_1(1), \quad i = 2, \quad j = 0$$

$$4u_{3,0} - u_{4,0} - u_{2,0} - 2u_{3,1} = -2hf_1(1.5), \quad i = 3, \quad j = 0$$

بإيجاد قيم

$$f_1(0.5) = 0.5, \quad f_1(1) = 1, \quad f_1(1.5) = 1.5, \quad h = 0.5$$

وبالتعويض في معادلات الفرق السابقة يكون

$$4u_{1,0} - u_{2,0} - u_{0,0} - 2u_{1,1} = -0.5, \quad i = 1, \quad j = 0$$

$$4u_{2,0} - u_{3,0} - u_{1,0} - 2u_{2,1} = -1, \quad i = 2, \quad j = 0$$

$$4u_{3,0} - u_{4,0} - u_{2,0} - 2u_{3,1} = -1.5, \quad i = 3, \quad j = 0$$

لتقريب النقطة $u_{4,0}$ التي تقع في الزاوية اليمنى أسفل المستطيل نستخدم المعادلة (6.3) ويكون

$$4u_{4,0} - u_{5,0} - u_{3,0} - u_{4,1} - u_{4,-1} = 0, \quad i = 4, \quad j = 0$$

باستخدام صيغة الفرق المركزي للنقطتين لتقريب المشتقة عند النقطة $u_{4,0}$ نخلص من العقد التخيلية $u_{4,-1}$ و $u_{5,0}$ كالتالي

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(4,0)} = \frac{u_{5,0} - u_{3,0}}{2h} = f_1(y_0)$$

ومنها نحصل على

$$u_{5,0} = u_{3,0} + 2kf_1(y_0)$$

وكذلك

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(4,0)} = \frac{u_{4,1} - u_{4,-1}}{2k} = f_2(x_4)$$

ومنها يكون

$$u_{4,-1} = u_{4,1} - 2hf_2(x_4)$$

وبالتعويض عن قيم

$$f_2(y_0) = 0, \quad f_1(x_4) = 2, \quad k = h = 0.5$$

نحصل على

$$u_{5,0} = u_{3,0}$$

$$u_{4,-1} = u_{4,1} - 2$$

إذاً معادلة الفرق لتقريب النقطة $u_{4,0}$ تكون

$$4u_{4,0} - 2u_{3,0} - 2u_{4,1} = -2, \quad i = 4, \quad j = 0$$

أو

$$2u_{4,0} - u_{3,0} - u_{4,1} = -1, \quad i = 4, \quad j = 0$$

إذاً معادلات الفروق لتقريب النقاط الحدية أسفل المستطيل تكون

$$2u_{0,0} - u_{1,0} - u_{0,1} = 0, \quad i = 0, \quad j = 0$$

$$4u_{1,0} - u_{2,0} - u_{0,0} - 2u_{1,1} = -0.5, \quad i = 1, \quad j = 0$$

$$u_{2,0} - u_{3,0} - u_{1,0} - 2u_{2,1} = -1, \quad i = 1, \quad j = 0$$

$$u_{3,0} - u_{4,0} - u_{2,0} - 2u_{3,1} = -1.5, \quad i = 3, \quad j = 0$$

$$2u_{4,0} - u_{3,0} - u_{4,1} = -1, \quad i = 4, \quad j = 0$$

وبنفس الطريقة وباستخدام العلاقات (13.3) (15.3) (16.3) يتم ايجاد معادلات الفروق لتقريب النقاط الحدية على جوانب المستطيل الباقية وتكون على التوالي:

$$4u_{4,1} - 2u_{3,1} - u_{4,2} - u_{4,0} = 1, \quad i = 4, \quad j = 1$$

$$4u_{0,1} - 2u_{1,1} - u_{0,2} - u_{0,0} = -1, \quad i = 0, \quad j = 1$$

$$4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{0,2} - 2u_{1,1} = 0.5, \quad i = 1, \quad j = 2$$

$$4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{1,2} - 2u_{2,1} = 1, \quad i = 2, \quad j = 2$$

$$4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{2,2} - 2u_{3,1} = 1.5, \quad i = 3, \quad j = 2$$

الآن بتقريب النقاط الحدية في الزاوية اليمنى أعلى المستطيل وذلك باستخدام العلاقة (6.3) كالتالي:

$$4u_{4,2} - u_{5,2} - u_{3,2} - u_{4,3} - u_{4,1} = 0, \quad i = 4, \quad j = 2$$

وباستخدام صيغة الفرق المركزي للتقريب المشتقة عند النقطة $u_{4,2}$ وذلك للتخلص من العقد التخيلية $u_{5,2}$ و $u_{4,3}$ يكون

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(4,2)} = \frac{u_{5,2} - u_{3,2}}{2h} = f_2(y_2)$$

وبالتعويض عن قيم $f_2(y_2) = 2$ و $h = 0.5$ نحصل على

$$u_{5,2} = u_{3,2} + 2$$

وكذلك

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(4,2)} = \frac{u_{4,3} - u_{4,1}}{2k} = f_1(x_4)$$

وبالتعويض عن قيم $f_2(x_4) = 2$ و $h = 0.5$ نحصل على

$$u_{4,3} = u_{4,1} + 2$$

وبالتعويض عن قيم $u_{5,2}$ و $u_{4,3}$ في معادلة الفرق لتقريب الزاوية اليمنى للمستطيل نحصل على

$$4u_{4,2} - 2u_{3,2} - 2u_{4,1} = 4, \quad i = 4, \quad j = 2$$

أو

$$2u_{4,2} - u_{3,2} - u_{4,1} = 2, \quad i = 4, \quad j = 2$$

وبنفس الطريقة يتم إيجاد معادلة الفروق لتقريب النقطة الحدية في الزاوية اليسرى أعلى المستطيل وتكون بالشكل التالي

$$4u_{0,2} - 2u_{1,2} - 2u_{0,1} = -1, \quad i = 0, \quad j = 2$$

الآن نقرب النقاط الداخلية باستخدام العلاقة (6.3) نحصل على معادلات الفروق التالية

$$4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} = 0, \quad i = 1, \quad j = 1$$

$$4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} = 0, \quad i = 2, \quad j = 1$$

$$4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{2,1} - u_{3,2} - u_{3,0} = 0, \quad i = 3, \quad j = 1$$

بإعادة الترميز للمعادلات السابقة حيث

$$u_{0,0} = u_1, \quad u_{1,0} = u_2, \quad u_{2,0} = u_3, \quad u_{3,0} = u_4, \quad u_{4,0} = u_5$$

$$u_{0,1} = u_6, \quad u_{1,1} = u_7, \quad u_{2,1} = u_8, \quad u_{3,1} = u_9, \quad u_{4,1} = u_{10}$$

$$u_{0,2} = u_{11}, \quad u_{1,2} = u_{12}, \quad u_{2,2} = u_{13}, \quad u_{3,2} = u_{14}, \quad u_{4,2} = u_{15}$$

وبترتيب المعادلات نحصل على

$$2u_1 - u_2 - u_6 = 0$$

$$4u_2 - u_1 - u_3 - 2u_7 = -0.5$$

$$4u_3 - u_2 - u_4 - 2u_8 = -1,$$

$$4u_4 - u_3 - u_5 - 2u_9 = -1.5,$$

$$2u_5 - u_4 - u_{10} = -1$$

$$4u_6 - u_1 - 2u_7 - u_{11} = -1,$$

$$4u_7 - u_2 - u_6 - u_8 - u_{12} = 0,$$

$$4u_8 - u_3 - u_7 - u_9 - u_{13} = 0,$$

$$4u_9 - u_4 - u_8 - u_{10} - u_{14} = 0,$$

$$4u_{10} - u_5 - 2u_9 - u_{15} = 1,$$

$$4u_{11} - 2u_6 - 2u_{12} = -1$$

$$4u_{12} - 2u_7 - u_{11} - u_{13} = 0.5,$$

$$4u_{13} - 2u_8 - u_{12} - u_{14} = 1,$$

$$4u_{14} - 2u_9 - u_{13} - u_{15} = 1.5,$$

$$2u_{15} - u_{10} - u_{14} = 2$$

ويمكن كتابة هذا النظام على الصورة

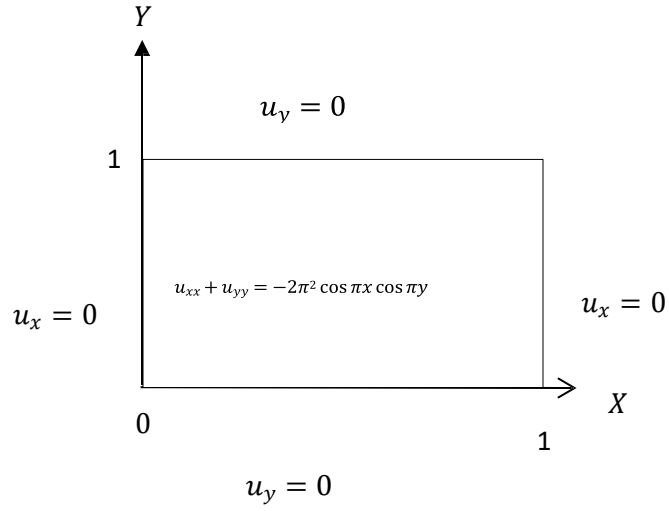
$$AW = r$$

حيث

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 \\
0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_4 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_5 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_6 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_7 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_8 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & u_9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & u_{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_{11} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & u_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & u_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_{14} \\
[0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2] & [u_{15}] \\
0 \\
-0.5 \\
-1 \\
-1.5 \\
-1 \\
-1 \\
0 \\
= 0 \\
0 \\
1 \\
-1 \\
0.5 \\
1 \\
1.5 \\
[2]
\end{array}$$

نلاحظ أنّ مصفوفة المعاملات تكون شبه شاده ومن خلال الملاحظة (1.3) يمكن إضافة شرط حدي وذلك بفرض أنّ متوسط قيم

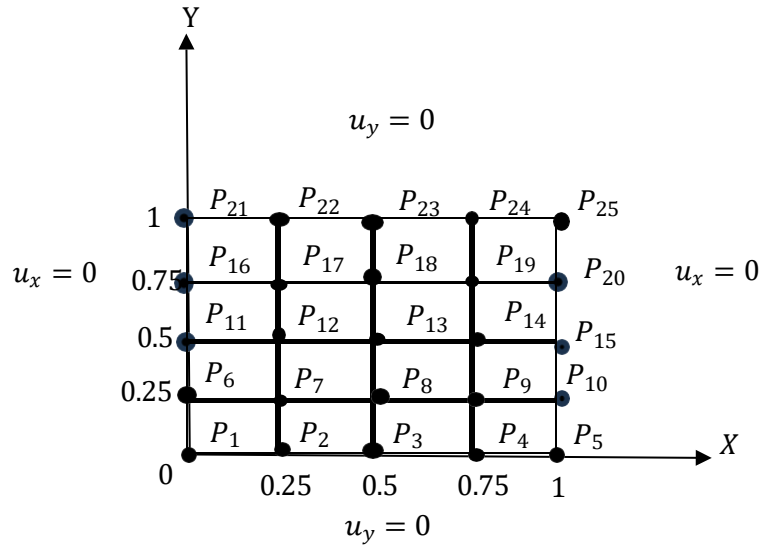
الحل يساوي صفراً وبالتالي يكون النظام على الصورة



الشكل 26.3: معادلة بواسون مع شروط نيومان في المثال (9.3)

الحل

باختيار $M = N = 4$ وعلية فإن $k = h = 0.25$ كما بالشكل (27.3):



الشكل 27.3: يبين النقاط الداخلية والحديّة المطلوبة في المثال (9.3)

باتباع خطوات المثال السابق وباستخدام المعادلة (4.3) لتقريب نقاط الحديّة التي في الزوايا، والعلاقات (13.3)، (15.3)، (16.3)، (17.3) لتقريب الجوانب الأخرى فإننا نحصل على النظام التالي

$$P_1: 4u_1 - 2u_2 - 2u_6 = 1.233701$$

$$P_2: 4u_2 - u_1 - u_3 - 2u_7 = 0.872358$$

$$P_3: 4u_3 - u_2 - u_4 - 2u_8 = 0$$

$$P_4: 4u_4 - u_3 - u_5 - 2u_9 = -0.872358$$

$$P_5: 4u_5 - 2u_4 - 2u_{10} = -1.233701$$

$$P_6: 4u_6 - u_1 - 2u_7 - u_{11} = 0.872358$$

$$P_7: 4u_7 - u_2 - u_6 - u_8 - u_{12} = 0.616850$$

$$P_8: 4u_8 - u_3 - u_7 - u_9 - u_{13} = 0$$

$$P_9: 4u_9 - u_4 - u_8 - u_{10} - u_{14} = -0.616850$$

$$P_{10}: 4u_{10} - u_5 - 2u_9 - u_{15} = -0.872358$$

$$P_{11}: 4u_{11} - u_6 - 2u_{12} - u_{16} = 0$$

$$P_{12}: 4u_{12} - u_7 - u_{11} - u_{13} - u_{17} = 0$$

$$P_{13}: 4u_{13} - u_8 - u_{12} - u_{14} - u_{18} = 0$$

$$P_{14}: 4u_{14} - u_9 - u_{13} - u_{15} - u_{19} = 0$$

$$P_{15}: 4u_{15} - u_{10} - 2u_{14} - u_{20} = 0$$

$$P_{16}: 4u_{16} - u_{11} - 2u_{17} - u_{21} = -0.872380$$

$$P_{17}: 4u_{17} - u_{12} - u_{16} - u_{18} - u_{22} = -0.616850$$

$$P_{18}: 4u_{18} - u_{13} - u_{17} - u_{19} - u_{23} = 0$$

$$P_{19}: 4u_{19} - u_{14} - u_{18} - u_{20} - u_{24} = 0.616850$$

$$P_{20}: 4u_{20} - u_{15} - 2u_{19} - u_{25} = 0.872358$$

$$P_{21}: 4u_{21} - 2u_{16} - 2u_{22} = -1.233701$$

$$P_{22}: 4u_{22} - 2u_{17} - u_{21} - u_{23} = -0.872358$$

$$P_{23}: 4u_{23} - 2u_{18} - u_{22} - u_{24} = 0$$

$$P_{24}: 4u_{24} - 2u_{19} - u_{23} - u_{25} = 0.872358$$

$$P_{25}: 4u_{25} - 2u_{20} - 2u_{24} = 1.233701$$

وحيث أن مصفوفة المعاملات ستكون شبه شاده وعليه سنضيف شرطاً خارجياً وهو جعل قيمة المتوسط لكل الحلول تساوي صفراً والذي يمكن كتابته على الصورة التالية

$$\sum_{i=1}^{25} u_i = 0$$

ومن ثم حل النظام بعد إضافة العلاقة السابقة كمعادلة أخيرة نحصل على

| | |
|------------|--------------|
| u_1 | 1.053029 |
| u_2 | 0.744604 |
| u_3 | 0 |
| u_4 | -0.744604 |
| u_5 | -1.053037 |
| u_6 | 0.744604 |
| u_7 | 0.526514 |
| u_8 | 0 |
| u_9 | -0.526514 |
| u_{10} | -0.744604 |
| u_{11} | 0 |
| u_{12} | 0 |
| $u_{13} =$ | 0 |
| u_{14} | 0 |
| u_{15} | 0 |
| u_{16} | -0.744604 |
| u_{17} | -0.526514 |
| u_{18} | 0 |
| u_{19} | 0.526514 |
| u_{20} | 0.744604 |
| u_{21} | -1.053029 |
| u_{22} | -0.744604 |
| u_{23} | 0 |
| u_{24} | 0.744604 |
| $[u_{25}]$ | [1.053029] |

وهو الحل التقريبي مقرباً لأقرب ستة أرقام عشرية.

Third: Robin (Mixed) Boundary Conditions

ثالثاً: شروط روبن (المختلطة) الحدية

ناقش حل معادلة بواسون التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = g_2(y)$$

حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دوال في المتغير x ، $g_1(y)$ و $g_2(y)$ دوال في المتغير y ، a, b أعداد حقيقية والنطاق معرف بالشكل التالي:

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

الحل

نعلم أن الشروط الحدية المختلطة هي خليط من شروط ديرشيلت وشروط نيومان الحدية بالتالي فإن عند تقريب هذه الشروط لمعادلة بواسون فإنه يتم اتباع نفس الخطوات السابقة المتبعة في تقريب الشروط الحدية لدير شيلت ونيومان، ومن ثم استخدام المعادلة (4.3) في حالة تقريب شرطي ديرشيلت:

$$u(0, y) = g_1(y) \quad , \quad u(x, b) = f_2(x)$$

ويتم استخدام العلاقة (14.3) لتقريب الشروط الحدي $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = g_2(y)$ وذلك لتقريب النقاط الحدية

التي تقع على الحد الأيمن للمستطيل، والعلاقة (17.3) لتقريب الشرط الحدي $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f_1(x)$ أي

لتقريب النقاط الحدية الموجودة على الحد السفلي للمستطيل.

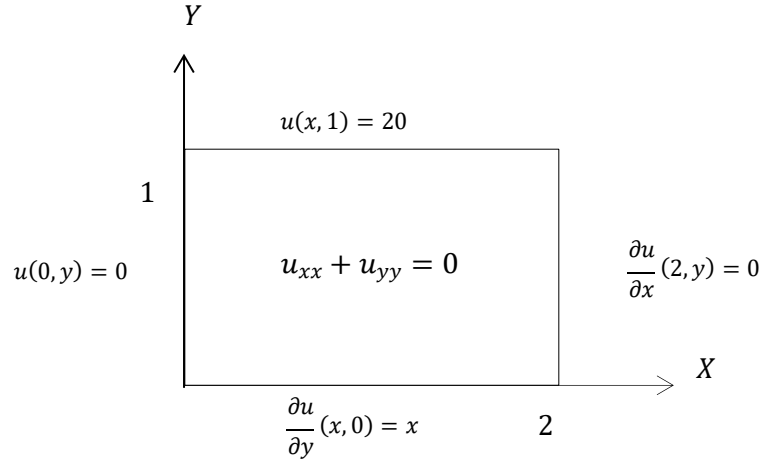
مثال (10.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس الآتية والموضحة في الشكل (22.3) باستخدام طريقة الفروق المنتهية (Turyn, 2013):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$B. C: \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = 20$$

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(2, y) = 0$$

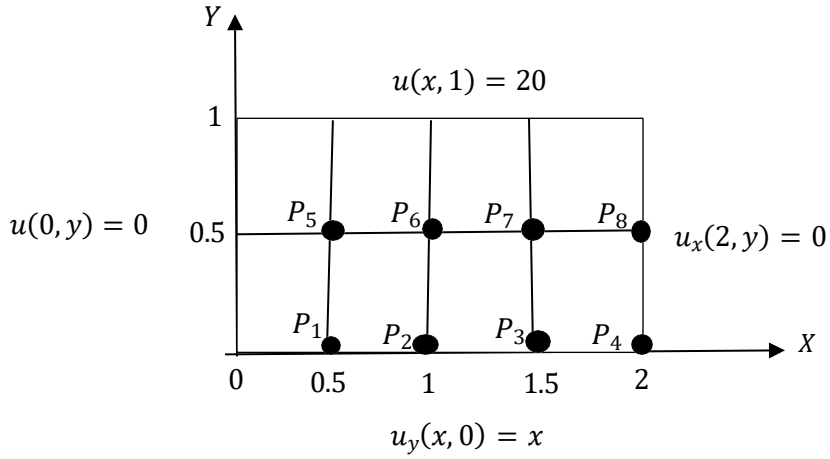


الشكل 28.3: (معادلة لابلاس مع شروط حدية مختلطة في المثال) 10.3)

الحل

باختيار $h \equiv \frac{1}{2}$ واتباع الخطوات السابقة من تجزئة الفترتين بحيث $n = 4$ ، $k = 3$

بالتالي نحصل على نقاط الشبكة (نقاط داخلية ونقاط حدية) الموضحة بالشكل 23.3)



الشكل 29.3: (يبين النقاط الداخلية والحدية المطلوبة في المثال) 10.3)

ولتقريب النقاط الحدية أسفل المستطيل نستخدم المعادلة 17.3) ويكون

$$4u_{1,0} - u_{2,0} - u_{0,0} - 2u_{1,1} = -0.5, \quad i = 1, \quad j = 0$$

$$4u_{2,0} - u_{3,0} - u_{1,0} - 2u_{2,1} = -1, \quad i = 2, \quad j = 0$$

$$4u_{3,0} - u_{4,0} - u_{2,0} - 2u_{3,1} = -2, \quad i = 3, \quad j = 0$$

ولتقريب النقطة التي تقع في الزاوية اليمنى السفلى للمستطيل نستخدم العلاقة (4.3)

$$4u_{4,0} - u_{5,0} - u_{3,0} - u_{4,1} - u_{4,-1} = 0, \quad i = 4, \quad j = 0$$

وباستخدام صيغة الفرق المركزي لإيجاد المشتقة عند النقطة $u_{4,0}$ وذلك للتخلص من العقد الوهمية $u_{5,0}$ و $u_{4,-1}$ ويكون

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(4,0)} = \frac{u_{5,0} - u_{3,0}}{2h} = 0$$

ومنها يكون

$$u_{5,0} = u_{3,0}$$

وكذلك

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(4,0)} = \frac{u_{4,1} - u_{4,-1}}{2k} = 2$$

وعليه فإن

$$u_{4,-1} = u_{4,1} - 2$$

وبالتعويض عن قيم $u_{5,0}$ و $u_{4,-1}$ في المعادلة السابقة يكون

$$4u_{4,0} - 2u_{3,0} - 2u_{4,1} = -2, \quad i = 4, \quad j = 0$$

الآن نقرب النقاط الداخلية باستخدام العلاقة (4.3) ونحصل على

$$4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} = 0$$

$$4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} = 0$$

$$4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{2,1} - u_{3,2} - u_{3,0} = 0,$$

ولتقريب النقطة الحدية التي تقع على الجانب الأيمن للمستطيل نستخدم المعادلة (4.3) ويكون

$$4u_{4,1} - u_{5,1} - u_{3,1} - u_{4,2} - u_{4,0} = 0, \quad i = 4, \quad j = 1$$

باستخدام صيغة الفرق المركزي لإيجاد المشتقة عند النقطة $u_{4,1}$ وذلك للتخلص من النقطة الوهمية $u_{5,1}$ كالتالي

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(4,1)} = \frac{u_{5,1} - u_{3,1}}{2h} = 0$$

ومنها نجد أن

$$u_{5,1} = u_{3,1}$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على

$$4u_{4,1} - 2u_{3,1} - u_{4,2} - u_{4,0} = 0$$

الآن نوجد قيم النقاط الحدية بحيث

$$u_{0,0} = 0, \quad u_{0,1} = 0, \quad u_{1,2} = 20, \quad u_{2,2} = 20, \quad u_{3,2} = 20, \quad u_{4,2} = 20$$

الآن بالتعويض عن هذه القيم في معادلات الفروق السابقة، وإعادة الترميز نحصل على

$$P_1: 4u_1 - u_2 - 2u_5 = -0.5$$

$$P_2: 4u_2 - u_1 - u_3 - 2u_6 = -1$$

$$P_3: 4u_3 - u_2 - u_4 - 2u_7 = -1.5$$

$$P_4: 4u_4 - 2u_3 - 2u_8 = -2$$

$$P_5: 4u_5 - u_1 - u_6 = 20$$

$$P_6: 4u_6 - u_2 - u_5 - u_7 = 20$$

$$P_7: 4u_7 - u_3 - u_6 - u_8 = 20$$

$$P_8: 4u_8 - u_4 - 2u_7 = 20$$

ويمكن كتابة هذا النظام على الصورة

$$\begin{array}{cccccccccc} 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & u_1 & -0.5 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & u_2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & u_3 & -1.5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & u_4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & u_5 & = 20 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & u_6 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_7 & 20 \\ [0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 4] & [u_8] & [20] \end{array}$$

وبحل هذا النظام بطريقة جاوس للحذف [GEM] نحصل على:

$$\begin{array}{ll} u_1 & 8.807692 \\ u_2 & 13.595890 \\ u_3 & 15.651515 \\ u_4 & 16.139535 \\ u_5 & = 11.067416 \\ u_6 & 15.462185 \\ u_7 & 17.185185 \\ [u_8] & [17.627451] \end{array}$$

وهو الحل التقريبي لسنه أرقام عشرية.

Finite Element Method

3.3. طريقة العنصر المنتهي

طريقة العنصر المنتهي هي تقنية عددية لحل المسائل التي توصف بالمعادلات التفاضلية الجزئية، وهي طريقة شائعة الاستخدام على نطاق واسع في ميكانيك الصلب، وميكانيك المرونة.

قُدمت طريقة العنصر المنتهي من قبل المهندسين في أواخر الخمسينات وبداية ستينيات القرن العشرين، وذلك لإيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية في الهندسة الهيكلية.

وخصص هذا البند لتوضيح كيفية تطبيق طريقة العنصر المنتهي على المعادلات التفاضلية الإهليجية في بعدين مع مجموعة من الأمثلة التي تختلف عن بعضها البعض في الشروط الحدية.

1.3.3 حل معادلة لابلاس في بعدين باستخدام طريقة العنصر المنتهي

سنناقش حل معادلة لابلاس في بعدين باستخدام طريقة العنصر المنتهي في المنطقة المستطيلة ونطبق هذه الطريقة في حالة الشبكة المثلثية.

First: Dirichlet Boundary Condition

أولاً: شروط ديرشليت الحدية

لإيجاد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس مع شروط ديرشليت الحدية والمعرفة على المنطقة المستطيلة باستخدام طريقة العنصر المنتهي فإننا ندرس معادلة لابلاس التالية:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$B.C: u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y)$$

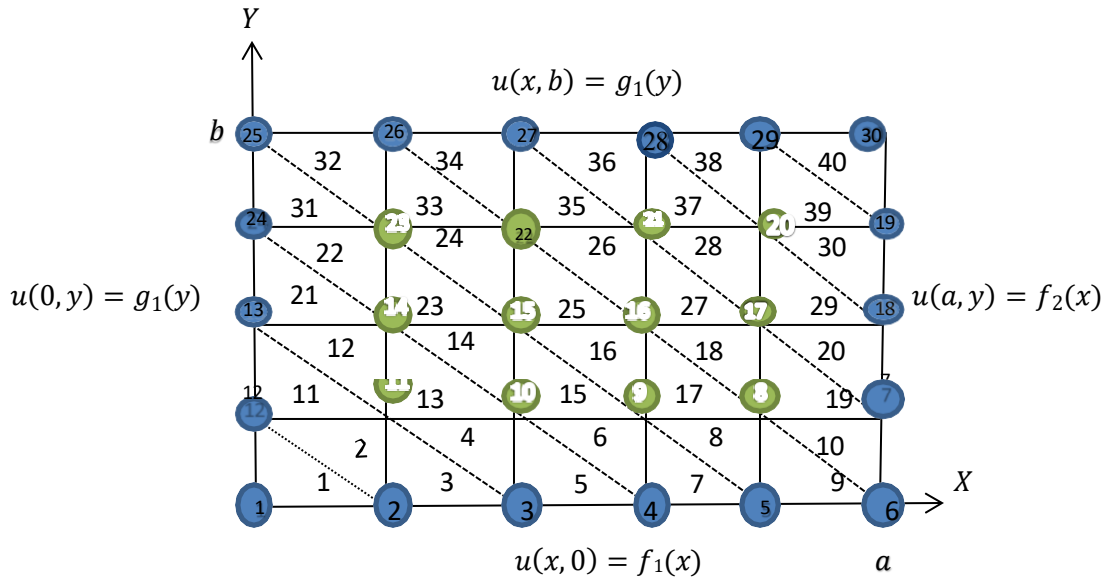
حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دوال في المتغير x ، و $g_1(y)$ و $g_2(y)$ دوال في المتغير y .

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

الآن بتقسيم الفترتين $(0, a)$ و $(0, b)$ إلى m و n على التوالي من الفترات الجزئية المتساوية، ومن ثم تقطيع المستطيلات الناتجة إلى عناصر مثلثية بحيث لا يقع أي رأس من رؤوس أي مثلث داخل أي ضلع من أضلاع مثلث آخر، فمثلاً إذا كانت $n = 5$ و $m = 4$ فإننا نحصل على 40 عنصر مثلثي ونتيجة لهذا التقسيم يكون

هناك 30 عقدة عامة (Global Node) العقد التي باللون الأزرق) وتكون قيمة u عندها معلومة، وأيضاً

ينتج ما يعرف بالعقد الداخلية وهي العقد المجهولة (العقد التي باللون الأخضر) والمطلوب إيجاد قيمة u عندها كما موضح في الشكل (30.3):



الشكل 30.3: يوضح تقطيع المنطقة إلى شبكة من المثلثات

بإيجاد إحداثيات العقد كمايلي:

العقدة 1: $(0,0)$

العقدة 14: $(\frac{a}{5}, \frac{2b}{4})$

العقدة 30: (a, b)

وبنفس الأسلوب يتم إيجاد إحداثيات العقد الأخرى.

الآن كل عنصر (مثلث) e يتم ترقيمه عقده بما يعرف بالترقيم العام Global Numbering وهذا الترقيم يكون مرتبط بالعناصر المثلثية الأخرى ، ويرقم هذا العنصر بشكل خاص أي مستقل عن العناصر المثلثية الأخرى ويعرف هذا الترقيم بالترقيم المحلي Local Numbering فمثلا يُرقم رأس المثلث برقم 1 وتُرقم الرؤوس ب 2 و 3 على التوالي بعكس دوران عقارب الساعة بالنسبة للعقدة 1، وكذلك بالنسبة للعنصر الثاني إذا كان مختلف في الشكل عن العنصر الأول فيتم ترقيمه عقده بشكل مختلف عن العنصر الأول إما مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة وذلك حسب العنصر الأول، فإذا نتج العنصر الثاني عن تدوير العنصر الأول حول أحد عقده بعكس عقارب الساعة وبعده دورات أقل من دورانه حول أحد عقده مع عقارب الساعة فإن الترقيم المحلي للعنصر الثاني يكون بعكس عقارب الساعة و بالعكس، وإذا كانت عدد الدورات متساوية فلا يهم اتجاه الترقيم، مع ملاحظة أن العناصر المتشابهة تُرقم بنفس الترقيم .

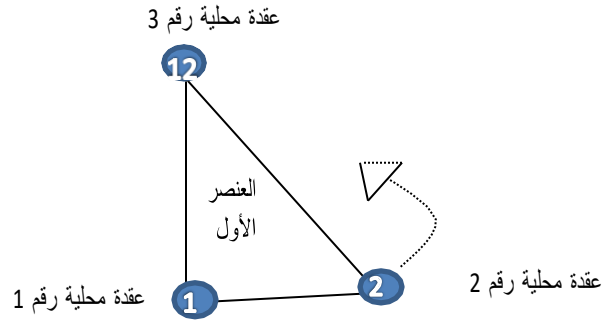
فمثلاً العنصر الأول:

الترقيم المحلي للعقدة 1 هو 1

الترقيم المحلي للعقدة 2 هو 2

الترقيم المحلي للعقدة 12 هو 3

ويمكن توضيح الترقيم المحلي للعنصر 1 كما بالشكل التالي:



الشكل 31.3: الترقيم المحلي للعنصر الأول

Shape

وبنفس الطريقة يتم ترقيم بقية العناصر المثلثية، ومن ثم يتم إيجاد قيم ما يعرف بدوال الشكل

Functions لكل مثلث كما يلي:

$$P_1 = y_2 - y_3$$

$$Q_1 = x_3 - x_2$$

$$P_2 = y_3 - y_1$$

$$Q_2 = x_1 - x_3$$

$$P_3 = y_1 - y_2$$

$$Q_3 = x_2 - x_1$$

فمثلاً بالنسبة للعنصر الأول:

$$(x_1, y_1) = (0,0), (x_2, y_2) = \left(\frac{a}{5}, 0\right), (x_3, y_3) = \left(0, \frac{b}{4}\right)$$

$$P_1 = y_2 - y_3 = 0 - \frac{b}{4} = -\frac{b}{4}$$

$$Q_1 = x_3 - x_2 = 0 - \frac{a}{5} = -\frac{a}{5}$$

وهكذا بالنسبة لبقية العناصر.

الآن لكل عنصر مثلثي نريد إيجاد مصفوفة من نوع 3×3 وهي مصفوفة معاملات العناصر والتي يتم إيجاد مداخلها من العلاقة

$$C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A} [P_i P_j + Q_i Q_j], i, j = 1, 2, 3 \quad (19.3)$$

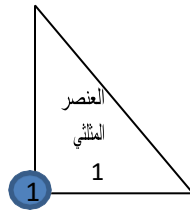
حيث

$$A = \frac{1}{2} [P_2 Q_3 - P_3 Q_2]$$

بعد إيجاد مصفوفة المعاملات لكل عنصر مثلثي يتم إيجاد مصفوفة المعاملات العامة *Global Coefficients Matrix C*، ويتم الحصول عليها بتجميع عناصر مصفوفات المعاملات، وإذا كانت عدد العقد N فإن رتبة مصفوفات المعاملات العامة هي $N \times N$.

يتم حساب عناصر القطر الرئيسي كما يلي:

$C_{1,1}$: هو العنصر الأول في الصف الأول والعمود الأول في مصفوفة المعاملات العامة C وهو يمثل العقدة المحلية 1 والتي تنتمي للعنصر المثلثي 1 كما موضح في الشكل (32.3):



الشكل (32.3): العقدة المحلية رقم 1

وبالتالي فإن:

$$C_{1,1}^{(1)} = C_{1,1} \quad \text{وهو العنصر الأول في مصفوفة المعاملات للعنصر 1، أما بالنسبة للعنصر } C_{2,2} \text{ فيتم إيجاده بنفس الطريقة ويكون:}$$

$$C_{2,2} = C_{1,1}^{(2)} + C_{1,1}^{(3)} + C_{2,2}^{(1)}$$

مصفوفة المعاملات للعنصر الأول، والمدخل الأول في الصف الأول والعمود الأول في مصفوفة المعاملات بالنسبة للعنصر 2 والعنصر 3، وبنفس الطريقة يتم إيجاد بقية عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة المعاملات

العامّة، أما بقية العناصر مثل $C_{2,11}$ فيتم إيجاده باعتباره رابط بين العقدتين 2 و11، ويسمى برابط العام ويكون رابط محلي بين العقدتين 1 و2 في العنصر 2 ورابط محلي أيضاً بحيث يربط بين العقدتين 1 و12 في العنصر 3 وعلية فإن:

$$C_{2,11} = C^{(2)}_{12} + C^{(3)}_{13}$$

ويتم إيجاد بقية المداخل لمصفوفة المعاملات العامّة بنفس الطريقة.

الآن نعرف المتجه u_v وهو متجه العقد المجهولة (العقد الخضراء)، والمتجه u_n هو متجه يمثل القيم الحدية (العقد الزرقاء) في الشكل 30.3)، نعرّف المصفوفة C_{vv} وهي مصفوفة العقد المجهولة ونحصل عليها من مصفوفة المعاملات العامّة، والمصفوفة C_{vn} هي مصفوفة العقد المجهولة والعقد التي تحقق الشروط الحدية ويتم الحصول عليها من مصفوفة المعاملات العامّة بالتالي فإن:

$$u_v = -C^{-1}_{vv} C_{vn} u_n \quad (20.3)$$

مثال 11.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس التالية (Chopade&Rastogi,2018):

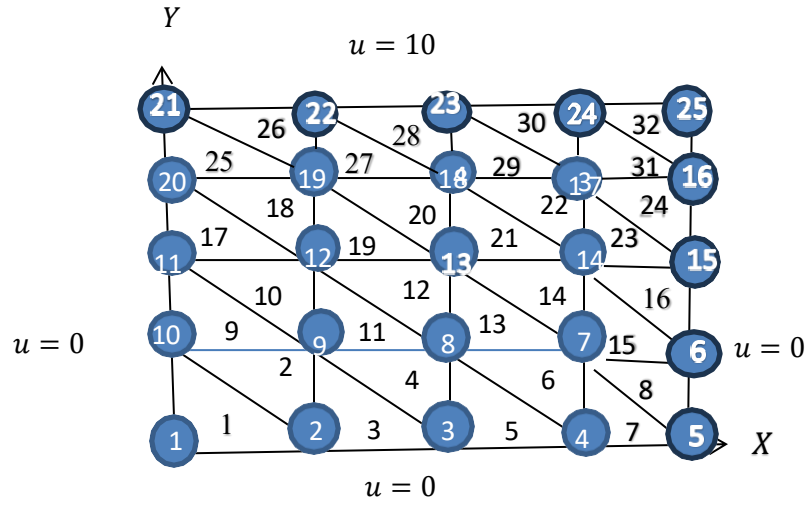
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1$$

$$B.C: u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 10$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0$$

الحل

نوجد الحل التقريبي لهذه المعادلة باستخدام طريقة العنصر المنتهي، وذلك باختيار $n = m = 4$ ومن ثم تقسيم المنطقة إلى 32 عنصر مثلثي كما في الشكل 33.3) التالي:



الشكل 33.3: شبكة العناصر المثلثية للمثال 11.3

وينتج من هذا التقسيم 16 عقدة عامة وتكون إحداثياتها والعقد المحلية التي تقابلها موضحة بالجدول التالي: الجدول 1.3: الترفيم المحلي

والترفيم العام لعناصر الشبكة المثلثية

| العنصر | العقد العامة | الرقم المحلي للعقد بعكس عقارب الساعة | الإحداثيات |
|----------|--------------|---|---|
| العنصر 1 | 1 | 1 | $(x_1, y_1) = (0, 0)$ |
| | 2 | 2 | $(x_2, y_2) = (\frac{1}{4}, 0)$ |
| | 10 | 3 | $(x_3, y_3) = (0, \frac{1}{4})$ |
| العنصر 2 | 2 | 1 | $(x_1, y_1) = (\frac{1}{4}, 0)$ |
| | 9 | 2 | $(x_2, y_2) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ |
| | 10 | 3 | $(x_3, y_3) = (0, \frac{1}{4})$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

| | | | |
|-----------|----|---|---------------------------------|
| العنصر 32 | 16 | 1 | $(x_1, y_1) = (1, \frac{3}{4})$ |
| | 25 | 2 | $(x_2, y_2) = (1, 1)$ |
| | 24 | 3 | $(x_3, y_3) = (\frac{3}{4}, 1)$ |

الآن لكل عنصر مثلثي نحسب الآتي:

بالنسبة للعنصر 1:

$$P_1 = y_2 - y_3 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$Q_1 = x_3 - x_2 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$P_2 = y_3 - y_1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

$$Q_2 = x_1 - x_3 = 0 - 0 = 0$$

$$P_3 = y_1 - y_2 = 0 - 0 = 0,$$

$$Q_3 = x_2 - x_1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

بنفس الأسلوب يتم حساب P_i و Q_i لكل عنصر مثلثي حيث 1,2,3 =

باستخدام المعادلة (19.3) نوجد عناصر مصفوفة المعاملات للعنصر المثلثي الأول:

نحسب A أولاً:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [P_2 Q_3 - P_3 Q_2] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - 0 \times 0 \right] = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

إذاً

$$\begin{aligned} C_{11}^{(1)} &= \frac{1}{4 \times \frac{1}{32}} [P_1 P_1 + Q_1 Q_1] \\ &= \frac{32}{4} \left[\frac{-1}{4} \times \frac{-1}{4} + \frac{-1}{4} \times \frac{-1}{4} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{12}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{12} P_{12} + Q_{12} Q_{12}] \\
&= \frac{32}{4} \left[-\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{-1}{4} \times 0 \right] \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{13} P_{13} - Q_{13} Q_{13}] \\
&= \frac{32}{4} \left[-\frac{1}{4} \times 0 + \frac{-1}{4} \times \frac{1}{4} \right] \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{21}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{21} P_{21} - Q_{21} Q_{12}] \\
&= \frac{32}{4} \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{-1}{4} \right] \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{22}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{22} P_{22} - Q_{22} Q_{22}] \\
&= \frac{32}{4} \left[-\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + 0 \times 0 \right] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{23}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{23} P_{23} + Q_{23} Q_{23}] \\
&= \frac{32}{4} \left[-\frac{1}{4} \times 0 + 0 \times \frac{1}{4} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{31}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{31} P_{31} + Q_{31} Q_{12}] \\
&= \frac{32}{4} \left[0 \times \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{-1}{4} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \\
C_{32}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{32} P_{32} + Q_{32} Q_{32}] \\
&= \frac{32}{4} [0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 0] \\
&= 0 \\
C_{33}^{(1)} &= \frac{32}{4} [P_{33} P_{33} + Q_{33} Q_{33}] \\
&= \frac{32}{4} [0 \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

إذاً مصفوفة المعاملات للعنصر الأول هي

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{23}^{(1)} \\ C_{31}^{(1)} & C_{32}^{(1)} & C_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

وبنفس الطريقة يتم إيجاد مصفوفة المعاملات لكل عنصر مثلي $C^{(i)}$ حيث $i = 2, 3, \dots, 32$ أي أن

$$\begin{aligned}
C^{(2)} &= C^{(4)} = C^{(6)} = C^{(8)} = C^{(10)} = C^{(12)} = C^{(14)} = C^{(16)} = C^{(18)} = C^{(20)} = C^{(22)} \\
&= C^{(24)} = C^{(26)} = C^{(28)} = C^{(30)} = C^{(32)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}
C^{(3)} &= C^{(5)} = C^{(7)} = C^{(9)} = C^{(11)} = C^{(13)} = C^{(15)} = C^{(17)} = C^{(19)} = C^{(21)} = C^{(23)} \\
&= C^{(25)} = C^{(27)} = C^{(29)} = C^{(31)} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

الآن بإيجاد مصفوفة المعاملات العامة C ، وذلك بتجميع عناصر مصفوفات المعاملات وتكون مصفوفة من نوع 25×25 ويتم حساب عناصرها كالتالي:

فمثلاً مداخل القطر الرئيسي يتم حسابها بالطريقة التالية:

المدخل $C_{1,1}$ يمثل العقدة الأولى الموجودة في العنصر المثلثي الأول، وهذه العقدة رقمها المحلي 1 في العنصر المثلثي الأول وعلية فإن:

$$C_{1,1} = C_{11}^{(1)} = 1$$

وكذلك بالنسبة للمدخل $C_{2,2}$ في مصفوفة المعاملات العامة يمثل العقدة 2 وهي مشتركة بين العناصر المثلثية 1، 2 و3 ورقمها المحلي 1 في العنصرين المثلثين 2 و3، ورقمها المحلي 2 في العنصر المثلثي 1 بالتالي فإن:

$$C_{2,2} = C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} + C_{11}^{(3)} = 0.5 + 0.5 + 1 = 2$$

وبنفس الأسلوب يتم إيجاد بقية المداخل.

أما بالنسبة للمداخل الأخرى لمصفوفة المعاملات العامة فيتم إيجاد كالتالي:

فمثلاً المدخل $C_{7,10}$ يشكل الرابط العام بين العقدتين العامتين 7-14، ويمثل الرابط المحلي بين العقدتين المحليتين 1-2 في العنصر المثلثي 14 ورابط المحلي في العنصر المثلثي 15 كما موضح في الشكل (27.3):

$$C_{7,14} = C_{12}^{(14)} + C_{13}^{(15)} = -0.5 + (-0.5) = -1$$

وبنفس الطريقة يتم حساب بقية المداخل لمصفوفة المعاملات العامة، فنحصل على مصفوفة من نوع 25×25 بالصورة التالية:

(الجدول 2.3): عناصر مصفوفة المعاملات العامة للمثال (11.3)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | |
|---|------|-----|-----|-----|------|-----|----|----|----|-----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1 | 1 | -0. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | -0.5 | 2 | -0. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -0. | 2 | -0. | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | -0. | 2 | -0.5 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | -0. | 1 | -0. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | |
|----------|------------------------|
| u_{15} | 0 |
| u_{16} | 0 |
| u_{20} | 0 |
| u_{21} | $\frac{0 + 10}{2} = 5$ |
| u_{22} | 10 |
| u_{23} | 10 |
| u_{24} | 10 |
| u_{25} | $\frac{0 + 10}{2} = 5$ |

إذاً

$$u_n = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,5,10,10,10,5)^T$$

نوجد المصفوفة C_{vv} وهي مصفوفة عناصرها الأعمدة والأسطر ذات الأرقام 7,8,9,12 كما في الجدول (2.3)، كذلك نجد المصفوفة C_{vm} وهي مصفوفة عناصرها الأسطر ذات الأرقام 13,14,17,18,19 وأعمدتها ذات الأرقام 7,8,9,12,13,14,17,18,19، كما في الجدول (4.3):

الجدول (4.3): يوضح عناصر المصفوفة C_v للمثال (11.3)

| C_{vv} | 7 | 8 | 9 | 12 | 13 | 14 | 17 | 18 | 19 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | -1 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 13 | 0 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| 14 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 |

الجدول 5.3: يوضح عناصر المصفوفة C_{vm} للمثال 11.3

| C_{vm} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 11 | 15 | 16 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|----------|---|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |

الآن بالتعويض في المعادلة (20.3) وإيجاد C^{-1} نجد أن

$${}_{vm}C^{-1} = \begin{bmatrix} 0.299107 & 0.098214 & 0.031250 & 0.026786 & 0.062500 & 0.098214 & 0.031250 & 0.026786 & 0.013393 \\ 0.098214 & 0.330357 & 0.098214 & 0.062500 & 0.125000 & 0.062500 & 0.026786 & 0.044643 & 0.026786 \\ 0.031250 & 0.098214 & 0.299107 & 0.098214 & 0.062500 & 0.026786 & 0.013393 & 0.026786 & 0.031250 \\ 0.026786 & 0.062500 & 0.098214 & 0.330357 & 0.125000 & 0.044643 & 0.026786 & 0.062500 & 0.098214 \\ 0.062500 & 0.125000 & 0.062500 & 0.125000 & 0.375000 & 0.125000 & 0.062500 & 0.125000 & 0.062500 \\ 0.098214 & 0.062500 & 0.026786 & 0.044643 & 0.125000 & 0.330357 & 0.098214 & 0.062500 & 0.026786 \\ 0.031250 & 0.026786 & 0.013393 & 0.026786 & 0.062500 & 0.098214 & 0.299107 & 0.098214 & 0.031250 \\ 0.026786 & 0.044643 & 0.026786 & 0.062500 & 0.125000 & 0.062500 & 0.098214 & 0.330357 & 0.098214 \\ 0.013393 & 0.026786 & 0.031250 & 0.098214 & 0.062500 & 0.026786 & 0.031250 & 0.098214 & 0.299107 \end{bmatrix}$$

إذاً

$$u_v = - \begin{bmatrix} 0.291667 & 0.083333 & 0.041667 & 0.083333 \\ 0.083333 & 0.291667 & 0.083333 & 0.041667 \\ 0.041667 & 0.083333 & 0.291667 & 0.083333 \\ 0.083333 & 0.041667 & 0.083333 & 0.291667 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.058353 \\ 0.082524 \\ 0.058353 \\ 0.114888 \\ 0.213388 \\ 0.150888 \\ 0.331811 \\ 0.469253 \\ 0.326129 \end{bmatrix}$$

بالتالي فإن الحل التقريبي لمعادلة لابلاس يكون:

$$\begin{array}{ll} u_7 & 0.714286 \\ u_8 & 0.982143 \\ u_9 & 0.714286 \\ u_{12} & 1.875000 \\ u_v = u_{13} & = 2.500000 \\ u_{14} & 1.875000 \\ u_{17} & 4.285714 \\ u_{18} & 5.267857 \\ [u_{19}] & [4.285714] \end{array}$$

مثال (12.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس التالية (Sundaram, 2022):

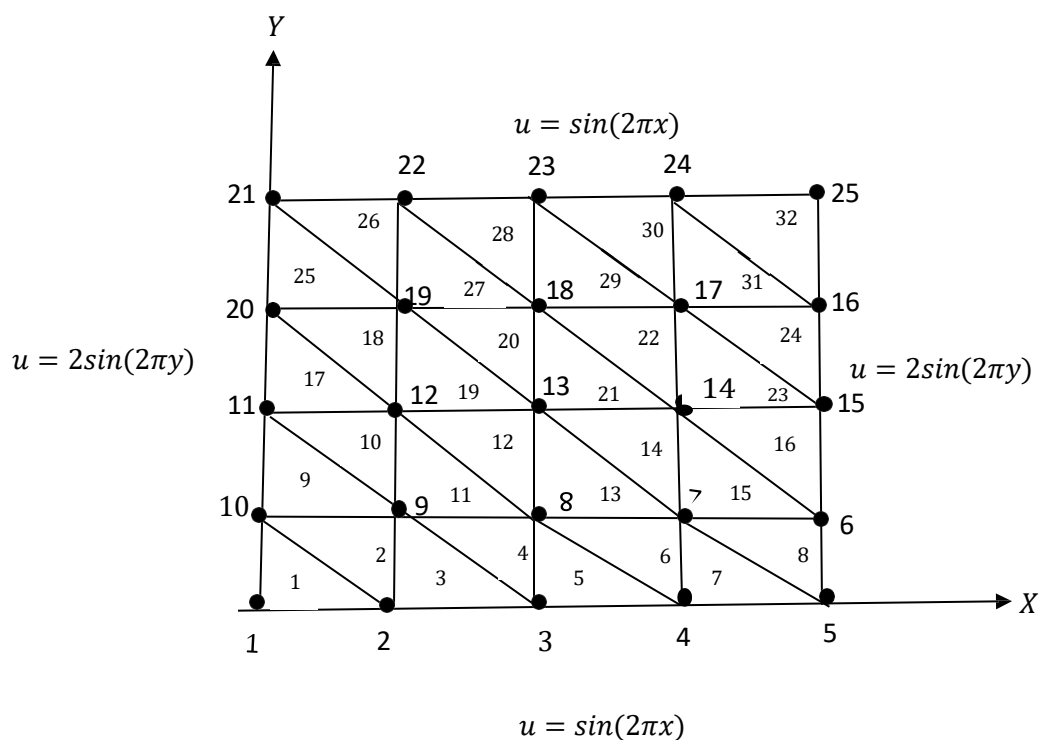
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

$$B.C: \quad u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad u(x, 1) = \sin 2\pi x$$

$$u(0, y) = 2\sin 2\pi y, \quad u(1, y) = 2\sin 2\pi y$$

الحل

باتباع خطوات المثال السابق واختيار $n = m = 4$ ، ومن ثم إيجاد مصفوفة المعاملات لكل عنصر مثلثي وفي هذه الحالة يكون لدينا 32 عنصر مثلثي، و25 عقدة منها 9 عقد داخلية مجهولة القيمة و16 عقدة معلومة، موضحة في الشكل التالي:



الشكل 34.3: العقد الداخلية المطلوبة في المثال 12.3)

وبإيجاد مصفوفة المعاملات العامة وتكون من الرتبة 25×25 وتعطى بالشكل التالي: الجدول 6.3): عناصر

مصفوفة المعاملات العامة للمثال 12.3)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|----|------|------|------|------|------|------|----|----|----|------|------|----|----|----|------|------|----|----|----|------|----|----|----|----|------|
| 1 | 1 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | -0.5 | 2 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -0.5 | 2 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | -0.5 | 2 | -0.5 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 1 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -0.5 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 |

الآن بإيجاد المتجه u_n وذلك بتطبيق الشروط الحدية كما في الجدول التالي:

الجدول (9.3): قيم النقاط الحدية بعد تطبيق الشروط الحدية

| العقدة | القيمة |
|----------|--------|
| u_1 | 0 |
| u_2 | 1 |
| u_3 | 0 |
| u_4 | -1 |
| u_5 | 0 |
| u_6 | 2 |
| u_{10} | 2 |
| u_{11} | 0 |
| u_{15} | 0 |
| u_{16} | -2 |
| u_{20} | -2 |
| u_{21} | 0 |
| u_{22} | 1 |
| u_{23} | 0 |
| u_{24} | -1 |
| u_{25} | 0 |

ومنها نحصل على

$$u_n = (0, 1, 0, -1, 0, 2, 2, 0, 0, -2, -2, 0, 1, 0, -1, 0)^T$$

وكذلك إيجاد C^{-1} يكون

| | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.299107 | 0.098214 | 0.031250 | 0.026786 | 0.062500 | 0.098214 | 0.031250 | 0.026786 | 0.013393 |
| 0.098214 | 0.330357 | 0.098214 | 0.062500 | 0.125000 | 0.062500 | 0.026786 | 0.044643 | 0.026786 |
| 0.031250 | 0.098214 | 0.299107 | 0.098214 | 0.062500 | 0.026786 | 0.013393 | 0.026786 | 0.031250 |
| 0.026786 | 0.062500 | 0.098214 | 0.330357 | 0.125000 | 0.044643 | 0.026786 | 0.062500 | 0.098214 |
| 0.062500 | 0.125000 | 0.062500 | 0.125000 | 0.375000 | 0.125000 | 0.062500 | 0.125000 | 0.062500 |
| 0.098214 | 0.062500 | 0.026786 | 0.044643 | 0.125000 | 0.330357 | 0.098214 | 0.062500 | 0.026786 |
| 0.031250 | 0.026786 | 0.013393 | 0.026786 | 0.062500 | 0.098214 | 0.299107 | 0.098214 | 0.031250 |
| 0.026786 | 0.044643 | 0.026786 | 0.062500 | 0.125000 | 0.062500 | 0.098214 | 0.330357 | 0.098214 |
| 0.013393 | 0.026786 | 0.031250 | 0.098214 | 0.062500 | 0.026786 | 0.031250 | 0.098214 | 0.299107 |

باستخدام العلاقة (20.3) نحصل على

$$\begin{aligned}
u_7 &= 0.285714 \\
u_8 &= 0.285714 \\
u_9 &= 0.857143 \\
u_{12} &= 0.142857 \\
u_v = u_{13} &= 0 \\
u_{14} &= -0.142857 \\
u_{17} &= -0.857143 \\
u_{18} &= -0.285714 \\
[u_{19}] &= [-0.285714]
\end{aligned}$$

مثال (13.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس التالية (Kahlaf&Mhassin,2021):

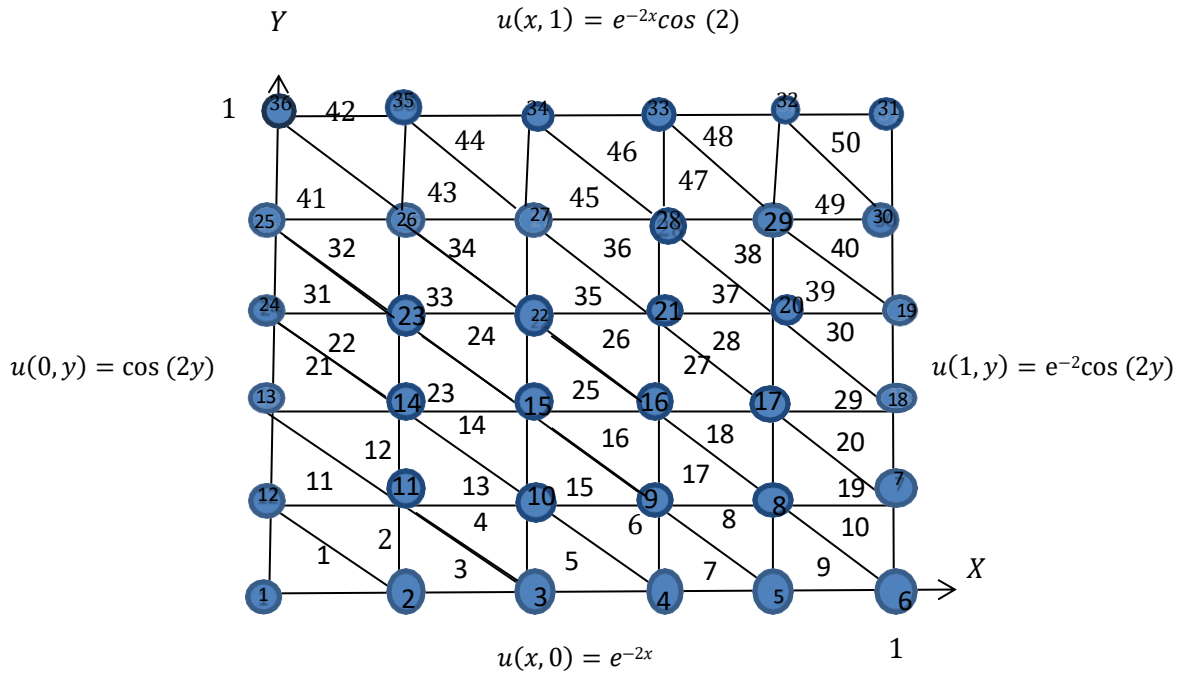
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B. c: \quad u(x, 0) = e^{-2x}, \quad u(0, y) = \cos(2y)$$

$$u(x, 1) = e^{-2x}\cos(2), \quad u(1, y) = e^{-2}\cos(2y)$$

الحل

باختيار $m = n = 5$ ومنها $h = \frac{k}{5} = 1$ ، ومن ثم تقسيم المنطقة إلى مثلثات كما في الشكل (35.3)



الشكل 35.3: يوضح تقطيع المنطقة إلى شبكة من المثلثات في المثال 13.3)

وينتج من هذا التقسيم 20 عقدة عامة وتكون إحداثياتها والعقد المحلية التي تقابلها موضحة بالجدول التالي الجدول 10.3): بيبين الترقيم العام

والترقيم المحلي لعقد العناصر المثلثية في المثال

| العنصر | العقد العامة | الرقم المحلي للعقد بعكس عقارب الساعة | الإحداثيات |
|----------|--------------|--------------------------------------|---|
| العنصر 1 | 1 | 1 | $(x_1, y_1) = (0, 0)$ |
| | 2 | 2 | $(x_2, y_2) = (\frac{1}{5}, 0)$ |
| | 12 | 3 | $(x_3, y_3) = (0, \frac{1}{5})$ |
| العنصر 2 | 2 | 1 | $(x_1, y_1) = (\frac{1}{5}, 0)$ |
| | 3 | 2 | $(x_2, y_2) = (\frac{2}{5}, 0)$ |
| | 11 | 3 | $(x_3, y_3) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ |

| | | | |
|-----------|----|---|---------------------------------|
| | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| العنصر 50 | 30 | 1 | $(x_1, y_1) = (1, \frac{4}{5})$ |
| | 31 | 2 | $(x_2, y_2) = (1, 1)$ |
| | 32 | 3 | $(x_3, y_3) = (\frac{4}{5}, 1)$ |

وباتباع خطوات المثال السابق وإيجاد P_i و Q_i لكل عنصر مثلثي حيث $i = 1, 2, 3$ ، ومن ثم استخدام المعادلة (12.3) لإيجاد مصفوفة المعاملات لكل عنصر مثلثي نجد أن

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 3, 5, 7, \dots, 49$$

وكذلك

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad i = 2, 4, 6, 8, \dots, 50$$

وبإيجاد مصفوفة المعاملات العامة، فنحصل على مصفوفة من نوع 36×36 وتكون كالتالي

(الجدول 11.3): يوضح مصفوفة المعاملات العامة للمثال (13.3)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1 | 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

عناصرها الأسطر ذات الأرقام 8,9,10,11,14,15,16,17,20,21,22,23,26,27,28,29، وأعمدتها
ذات الأرقام 1,7,12,13,18,19,24,25,30,36, كما في الجدول (13.3)

الجدول (12.3): يوضح عناصر المصفوفة C_v

| C_{vv} | 8 | 9 | 10 | 11 | 14 | 15 | 16 | 17 | 20 | 21 | 22 | 23 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 | 0 |
| 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 4 | -1 | 0 |
| 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 | -1 |
| 29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4 |

وكذلك

الجدول (13.3): يبين عناصر المصفوفة C_v

| C_{vm} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 12 | 13 | 18 | 19 | 24 | 25 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
|----------|---|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

الآن نوجد u_n وذلك بتطبيق الشروط الحدية عند النقاط الحدية كما في الجدول (14.3) التالي:

الجدول 14.3: القيم الحدية بعد تطبيق الشروط الحدية

| العقدة | القيمة |
|----------|-----------|
| u_1 | 1 |
| u_2 | 0.670320 |
| u_3 | 0.449329 |
| u_4 | 0.301194 |
| u_5 | 0.201897 |
| u_6 | 0.039508 |
| u_7 | 0.124652 |
| u_{12} | 0.921061 |
| u_{13} | 0.696707 |
| u_{18} | 0.094289 |
| u_{19} | 0.049040 |
| u_{24} | 0.362358 |
| u_{25} | -0.029200 |
| u_{30} | -0.003952 |
| u_{31} | -0.056319 |
| u_{32} | -0.084019 |
| u_{33} | -0.125341 |
| u_{34} | -0.186987 |
| u_{35} | -0.278952 |
| u_{36} | -0.416147 |

وبإيجاد معكوس المصفوفة C_{vv} ومن ثم التعويض في العلاقة (20.3) نحصل على الحل التقريبي مقرباً لأقرب ستة أرقام عشرية ويكون

$$\begin{array}{ll}
 u_8 & 0.186679 \\
 u_9 & 0.278652 \\
 u_{10} & 0.415423 \\
 u_{11} & 0.618850 \\
 u_{14} & 0.468596 \\
 u_{15} & 0.314860 \\
 u_{16} & 0.211311 \\
 u_{17} & 0.141516 \\
 u_v = u_{20} & = 0.073785 \\
 u_{21} & 0.110217 \\
 u_{22} & 0.164110 \\
 u_{23} & 0.243967 \\
 u_{26} & -0.019197 \\
 u_{27} & -0.012604 \\
 u_{28} & -0.008340 \\
 [u_{29}] & [-0.005631]
 \end{array}$$

2.3.3 حل معادلة بواسون في بعدين باستخدام طريقة العنصر المنتهي

نناقش حل معادلة بواسون في بعدين في المنطقة المستطيلة بعد تقطيعها إلى شبكة من المثلثات.

First: Dirichlet boundary conditions

أولاً: شروط ديرشليت الحدية

ندرس معادلة بواسون التالية

$$\Omega \quad u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad \text{لكل } (x, y) \text{ في } \Omega \quad (21.3)$$

$$B. C: \quad u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y)$$

حيث $f(x, y)$ دالة مستمرة، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دوال في المتغير x ، $g_1(y)$ و $g_2(y)$ دوال في المتغير

$$\Omega = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

نفرض أن Ω منطقة محدودة في R^d ، $\partial\Omega$ هي نقاط الحدية لهذه المنطقة، وبضرب المعادلة (21.3)

بدالة الاختبار v (Test Function) بحيث تحقق الشرط الحدي $v = 0$ على $\partial\Omega$ ، وبإجراء التكامل على Ω ومن ثم استخدام صيغة غرين:

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$$

وحيث أن طريقة العنصر المنتهي للمعادلة المعطاة تعتمد على الصيغة الضعيفة وتتطلب:

$$u \in V = [H_0^1(\Omega)]^d$$

بحيث أن

$$a(u, v) = -(f, v) \text{ لكل } v \text{ في } V$$

مع ملاحظة أن

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx, \quad (f, v) = - \int_{\Omega} f v \, dx$$

وليكن الحل التقريبي $u_h \in V_h \subset V$ يحقق:

$$a(u_h, v) = (f, v) \text{ لكل } v \text{ في } V_h$$

نعرف

$$u_h = \sum_{i=1}^M u_i N_i(x, y)$$

إذا بالتعويض عن u_h في المعادلة التالية

$$a(u_h, N_k) = (f, N_k) \text{ لكل } k = 1, \dots, M$$

ومنها نحصل على

$$\sum_{i=1}^M u_i \cdot a(N_i, N_k) = -(f, N_k) \quad (22.3)$$

$$\text{لكل } k = 1, \dots, M$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$AX = b$$

حيث $A \in R^{n \times n}$ وهي مصفوفة ممتثلة وتسمى بمصفوفة الصلابة Stiffness Matrix، $b \in R^n$ وهو متجه الحمولة (Load Vector، $X \in R^n$) (Elgezzon, 2018).

مثال (14.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة بواسون التالية باستخدام طريقة العنصر المنتهي (Assefa & Guta, 2019):

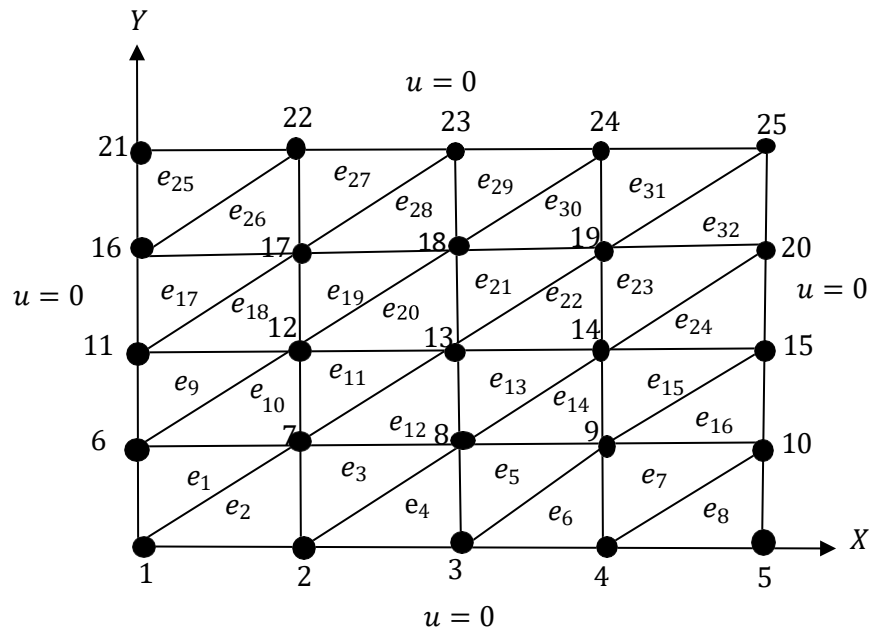
$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

$$B.C: u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0$$

الحل

باختيار $n = m = 4$ ، ومن ثم تقسيم المنطقة إلى مثلثات، وفي هذه الحالة يكون لدينا 32 عنصر مثلثي، و25 عقدة منها 9 عقد داخلية مجهولة القيمة و16 عقدة معلومة، موضحة في الشكل التالي:



الشكل (36.3): يبين التقطيع المثلي للمنطقة المستطيلة للمثال (14.3)

أما العقد المحلية والعامية وإحداثياتها توضح بالجدول التالي:

الجدول 15.3: (يبيّن الترقيم العام والترقيم المحلي لكل عقدة في العناصر المثلثية للمثال) 14.3)

| العنصر | العقد العامة | العقد المحلية | الإحداثيات |
|----------|--------------|---------------|-------------|
| e_1 | 1 | i | (0,0) |
| | 7 | j | (0.25,0.25) |
| | 6 | k | (0,0.25) |
| e_2 | 1 | i | (0,0) |
| | 2 | j | (0.25,0) |
| | 7 | k | (0.25,0.25) |
| e_3 | . | i | (0.25,0) |
| | . | j | (0.5,0) |
| | . | k | (0.25,0.25) |
| . | . | . | . |
| | . | . | . |
| | . | . | . |
| e_{32} | 19 | i | (0.75,0.75) |
| | 20 | j | (1,0.75) |
| | 25 | k | (1,1) |

مع ملاحظة أنّ العقد الحدية التي تأخذ الترقيم العام 1,2,3,4,5,6,10,11,15,16,20,21,22,23,24,25

قيمتها تساوي صفر، أما بالنسبة للعقد الداخلية (المجهولة) فإنّها تتوافق مع عنصر واحد وهو عبارة عن ستة عناصر مثلثية، وحيث أن

عدد هذه العقد 9 ومنها يوجد 9 دوال شكل يتم إيجادها باستخدام العلاقة

7.1(:

$$\begin{aligned}
 & N_j = 4x \dots\dots\dots \text{in } e_1 & N_j = -1 + 4x \dots\dots\dots \text{in } e_3 \\
 & N_k = 4y \dots\dots\dots \text{in } e_2 & N_k = 4y \dots\dots\dots \text{in } e_4 \\
 \phi_7 = & N_k = 1 - 4x + 4y \dots \text{in } e_3 & \phi_8 = N_k = 2 - 4x + 4y \dots\dots\dots \text{in } e_5 \\
 & N_i = 2 - 4x \dots\dots\dots \text{in } e_{12} & N_i = 3 - 4x \dots\dots\dots \text{in } e_{14} \\
 & N_i = 2 - 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{11} & N_i = 2 - 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{13} \\
 \{ N_j = 1 + 4x - 4y \dots \text{in } e_{10} & & \{ N_j = 4x - 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{12} \\
 \\
 & N_j = -2 + 4x \dots\dots\dots \text{in } e_5 & N_j = 4x \dots\dots\dots \text{in } e_9 \\
 & N_k = 4y \dots\dots\dots \text{in } e_6 & N_k = -1 + 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{10} \\
 \phi_9 = & N_k = 3 - 4x + 4y \dots\dots\dots \text{in } e_7 & \phi_{12} = N_k = -4x + 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{11} \\
 & N_i = 4 - 4x \dots\dots\dots \text{in } e_{16} & N_i = 2 - 4x \dots\dots\dots \text{in } e_{20} \\
 & N_i = 2 - 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{15} & N_i = 3 - 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{19} \\
 \{ N_j = -1 + 4x - 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{14} & & \{ N_j = 2 + 4x - 4y \dots\dots\dots \text{in } e_{18}
 \end{aligned}$$

$$\phi_{13} = \begin{aligned} & N_j = -1 + 4x \dots \text{in } e_{11} \\ & N_k = -1 + 4y \dots \text{in } e_{12} \\ & N_k = 1 - 4x + 4y \dots \text{in } e_{13} \\ & N_i = 3 - 4x \dots \text{in } e_{22} \\ & N_i = 3 - 4y \dots \text{in } e_{21} \\ & \{ N_j = 1 + 4x - 4y \dots \text{in } e_{20} \} \end{aligned}$$

$$\phi_{14} = \begin{aligned} & N_j = -2 + 4x \dots \text{in } e_{13} \\ & N_k = -1 + 4y \dots \text{in } e_{14} \\ & N_k = 2 - 4x + 4y \dots \text{in } e_{15} \\ & N_i = 4 - 4x \dots \text{in } e_{24} \\ & N_i = 3 - 4y \dots \text{in } e_{23} \\ & \{ N_j = 4x - 4y \dots \text{in } e_{22} \} \end{aligned}$$

$$\phi_{17} = \begin{aligned} & N_j = 4x \dots \text{in } e_{17} \\ & N_k = -2 + 4y \dots \text{in } e_{18} \\ & N_k = -1 - 4x + 4y \dots \text{in } e_{19} \\ & N_i = 2 - 4x \dots \text{in } e_{28} \\ & N_i = 4 - 4y \dots \text{in } e_{27} \\ & \{ N_j = 3 + 4x - 4y \dots \text{in } e_{26} \} \end{aligned}$$

$$\phi_{18} = \begin{aligned} & N_j = -1 + 4x \dots \text{in } e_{19} \\ & N_k = -2 + 4y \dots \text{in } e_{20} \\ & N_k = -4x + 4y \dots \text{in } e_{21} \\ & N_i = 3 - 4x \dots \text{in } e_{30} \\ & N_i = 4 - 4y \dots \text{in } e_{29} \\ & \{ N_j = 2 + 4x - 4y \dots \text{in } e_{28} \} \end{aligned}$$

$$\phi_{19} = \begin{aligned} & N_j = -2 + 4x \dots \text{in } e_{21} \\ & N_k = -2 + 4y \dots \text{in } e_{22} \\ & N_k = 1 - 4x + 4y \dots \text{in } e_{23} \\ & N_i = 4 - 4x \dots \text{in } e_{32} \\ & N_i = 4 - 4y \dots \text{in } e_{31} \\ & \{ N_j = 1 + 4x - 4y \dots \text{in } e_{30} \} \end{aligned}$$

الآن بالتعويض في العلاقة (22.3) وإيجاد مصفوفة الصلابة وهي مصفوفة من نوع 9×9 تعطى عناصرها بالشكل:

$$\begin{aligned} a_{11} = & \iint_{e_1} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_k}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_k}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ & + \iint_{e_{12}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint_{e_{11}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ & + \iint_{e_{10}} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 dx dy = 4 \end{aligned}$$

وكذلك

$$a_{12} = \iint_{e_3} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} dx dy + \iint_{e_{12}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy = -1$$

وبنفس الأسلوب يتم إيجاد بقية عناصر مصفوفة الصلابة العامة وبالتالي تكون بالشكل التالي

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] \end{bmatrix}$$

أما متجه الحمل العام هو مصفوفة من نوع 1×9 ، تحسب عناصره بالطريقة:

$$f_1 = \iint_{e_1} f(x)N_j dx dy + \iint_{e_2} f(x)N_k dx dy + \iint_{e_3} f(x)N_k dx dy + \iint_{e_{12}} f(x)N_i dx dy \\ + \iint_{e_{11}} f(x)N_i dx dy + \iint_{e_{10}} f(x)N_j dx dy = 0.5857864$$

وبنفس الطريقة يتم إيجاد $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9$ ويكون

$$b = \begin{bmatrix} 0.585786 \\ 0.787137 \\ 0.527393 \\ 0.787137 \\ 1.113179 \\ 0.787137 \\ 0.527393 \\ 0.787137 \\ [0.585786] \end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على النظام التالي

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_7 & 0.585786 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_8 & 0.787137 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_9 & 0.527393 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_{12} & 0.787137 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_{13} & = 1.113179 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_{14} & 0.787137 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_{17} & 0.527393 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_{18} & 0.7871368 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] & [u_{19}] & [0.585786] \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نحصل على

$$\begin{aligned}
u_7 & 0.482378 \\
u_8 & 0.671863 \\
u_9 & 0.467780 \\
u_{12} & 0.671863 \\
u_{13} & = 0.950158 \\
u_{14} & 0.671863 \\
u_{17} & 0.467780 \\
u_{18} & 0.671863 \\
[u_{19}] & [0.482378]
\end{aligned}$$

مثال (15.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة بواسون التالية (Roslan&Hoe,2024):

$$u_{xx}+u_{yy} = -f(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

$$B.C: u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0$$

حيث

$$f(x, y) = (x^2 - 5x + 4)(y - 1)(ye^{-x-2y}) + 2(x - 1)x(2y^2 - 6y + 3)(e^{-x-2y})$$

الحل

باختيار $n = m = 4$ ، ومن ثم تقسيم المنطقة إلى مثلثات، وفي هذه الحالة يكون لدينا 32 عنصر مثلثي، و25 عقدة منها 9 عقدة داخلية مجهولة القيمة و16 عقدة معلومة موضحة في الشكل (36.3)، ومن ثم اتباع خطوات المثال السابق مع ملاحظة أن ترقيم العقد واحداثياتها موضحة بالجدول (15.3) وسيتم استخدام دوال الشكل السابقة أيضاً، بإيجاد عناصر مصفوفة الصلابة العامة كالتالي:

$$\begin{aligned}
a_{11} = & \iint_{e_1} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_k}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_k}{\partial y} \right)^2 dx dy \\
& + \iint_{e_{12}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 dx dy + \iint_{e_{11}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 dx dy \\
& + \iint_{e_{10}} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 dx dy = 4
\end{aligned}$$

وأيضاً

$$a_{12} = \iint_{e_3} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} dx dy + \iint_{e_{12}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy = -1$$

وبنفس الأسلوب يتم إيجاد بقية عناصر مصفوفة الصلابة العامة وبالتالي تكون

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] \end{bmatrix}$$

أما متجه الحمل العام هو مصفوفة من نوع 1×9 ، تحسب عناصره بالطريقة:

$$f_1 = \iint_{e_1} f(x)N_j dx dy + \iint_{e_2} f(x)N_k dx dy + \iint_{e_3} f(x)N_k dx dy + \iint_{e_{12}} f(x)N_i dx dy$$

$$+ \iint_{e_{11}} f(x)N_i dx dy + \iint_{e_{10}} f(x)N_j dx dy = 0.031517$$

$f_9, f_8, f_7, f_6, f_5, f_4, f_3, f_2$ وتكون بالشكل التالي:

وبنفس الأسلوب يتم إيجاد متجهات الحمل الأخرى

$$b = \begin{bmatrix} 0.031517 \\ 0.027174 \\ 0.015343 \\ 0.016399 \\ 1.010676 \\ 0.005261 \\ 0.005128 \\ 0.001984 \\ [0.006120] \end{bmatrix}$$

الآن بحل النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_7 & 0.031517 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_8 & 0.027174 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_9 & 0.015343 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_{12} & 0.016399 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_{13} & = 1.010676 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_{14} & 0.005261 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_{17} & 0.005128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_{18} & 0.001984 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4] & [u_{19}] & [0.006120] \end{bmatrix}$$

نحصل على الحل التقريبي لمعادلة بواسون

$$\begin{aligned}u_7 & 0.015216 \\u_8 & 0.016510 \\u_9 & 0.010007 \\u_{12} & 0.012836 \\u_{13} & = 0.013644 \\u_{14} & 0.008176 \\u_{17} & 0.006085 \\u_{18} & 0.006376 \\[u_{19}] & [0.003791]\end{aligned}$$

مثال (16.3)

أوجد الحل التقريبي لمعادلة بواسون التالية

$$u_{xx}+u_{yy} = -f(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

$$B. C: u(x, 0) = e^{-x} + 2, \quad u(x, 1) = e^{-x} + 2e^{-2}$$

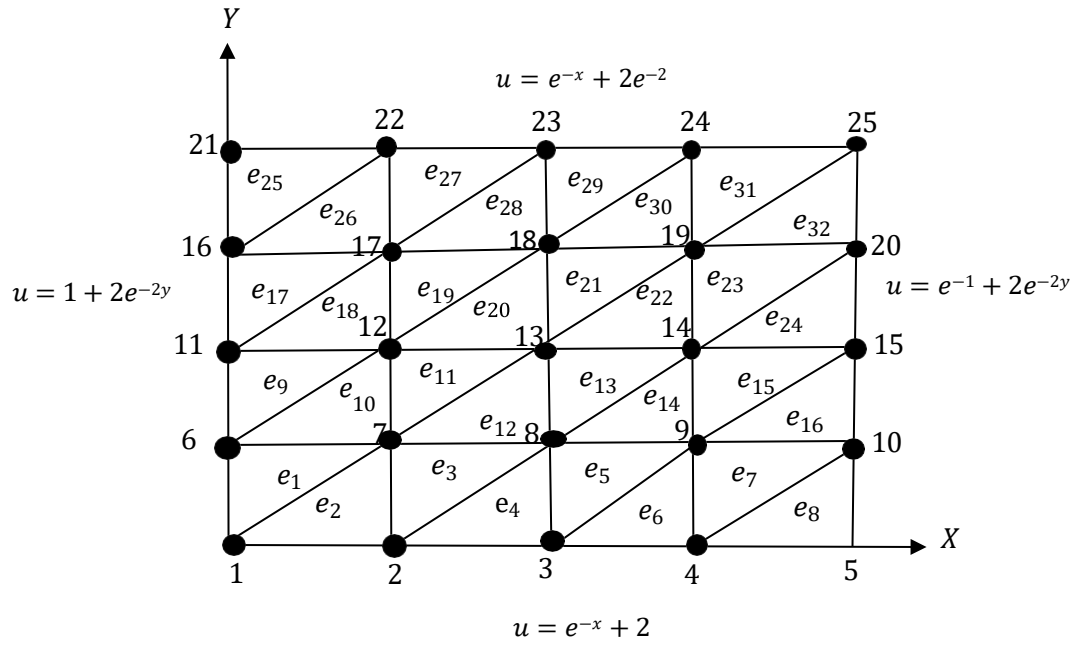
$$u(0, y) = 1 + 2e^{-2y}, \quad u(1, y) = e^{-1} + 2e^{-2y}$$

حيث

$$f(x, y) = e^{-x} + 8e^{-2y}$$

الحل

باختيار $n = m = 4$ ، ومن ثم تقسيم المنطقة إلى مثلثات، وفي هذه الحالة يكون لدينا 32 عنصر مثلثي، و25 عقدة منها 9 عقد داخلية مجهولة القيمة و16 عقدة معلومة، موضحة في الشكل التالي:



الشكل 37.3: (بين التقطيع المثالي للمنطقة المستطيلة للمثال 16.3)

أما العقد المحلية والعامّة وإحداثياتها توضح بالجدول التالي:

الجدول 16.3: (بين الترقيم العام والترقيم المحلي لكل عقدة في العناصر المثلثية للمثال 16.3)

| العنصر | العقد العامّة | العقد المحليّة | الإحداثيات |
|----------|---------------|----------------|-------------|
| e_1 | 1 | i | (0,0) |
| | 7 | j | (0.25,0.25) |
| | 6 | k | (0,0.25) |
| e_2 | 1 | i | (0,0) |
| | 2 | j | (0.25,0) |
| | 7 | k | (0.25,0.25) |
| e_3 | 2 | i | (0.25,0) |
| | 8 | j | (0.5,0) |
| | 7 | k | (0.25,0.25) |
| . | . | . | . |
| | . | . | . |
| | . | . | . |
| e_{32} | 19 | i | (0.75,0.75) |
| | 20 | j | (1,0.75) |
| | 25 | k | (1,1) |

مع ملاحظة أن العقد الحديدية التي تأخذ الترقيم العام 1,2,3,4,5,6,10,11,15,16,20,21,22,23,24,25

يتم حسابها وفقا للجدول (17.3) التالي

الجدول (17.3): يبين قيم العقد الحديدية بعد تطبيق الشروط الحديدية

| العقد | القيمة |
|----------|----------|
| u_1 | 3 |
| u_2 | 2.778801 |
| u_3 | 2.606531 |
| u_4 | 2.472367 |
| u_5 | 2.367879 |
| u_6 | 2.213061 |
| u_{10} | 1.580941 |
| u_{11} | 1.735759 |
| u_{15} | 1.103638 |
| u_{16} | 1.446260 |
| u_{20} | 0.814140 |
| u_{21} | 1.270671 |
| u_{22} | 1.049471 |
| u_{23} | 0.877201 |
| u_{24} | 0.743037 |
| u_{25} | 0.570882 |

لإيجاد مصفوفة الصلابة العامة علينا إيجاد دوال الشكل أولاً لكل عنصر مثلثي، ومن خلال الشكل (37.3) نلاحظ أن u_7 تكون مرتبطة

بستة عناصر مثلثية وعلية نوجد الدوال الشكل لهذه العناصر ومن ثم يتم التعويض في المعادلة (22.3) لكل عنصر على حدا فنحصل على

ست معادلات وأخير تجميع هذه المعادلات فينتج لدينا

الصف الأول في مصفوفة الصلابة العامة وهكذا بالنسبة لبقية العقد الداخلية المجهولة ويمكن توضيح هذه الخطوات كالتالي

نوجد دوال الشكل للعنصر الأول باستخدام العلاقات (1.7) فيكون

$$N_i = 1 - 4y, \quad N_j = 4x, \quad N_k = -4x + 4y$$

وبالتعويض في المعادلة (22.3) يكون

$$[\iint_{e_1} (4)(4)dydx] u_7 + [\iint_{e_1} (0)(4) dydx] u_1 + [\iint_{e_1} 4(-4)dydx] u_6 = \iint_{e_1} (4x)(-e^{-x} - 8e^{-2y})dydx$$

$$0 \cdot 5u_7 - 0.5u_6 = -0.066758$$

وكذلك بالنسبة للعنصر الثاني نوجد دوال الشكل

$$N_i = 1 - 4x, \quad N_j = 4x - 4y, \quad N_k = 4y$$

وبالتعويض في المعادلة (22.3)

$$[\iint_{e_2} (4)(4)dydx] u_7 + [\iint_{e_2} (-4)(4) dydx] u_2 + [\iint_{e_2} 4(0)dydx] u_1 = \iint_{e_2} (4y)(-e^{-x} - 8e^{-2y})dydx$$

$$0 \cdot 5u_7 - 0.5u_2 = -0.073953$$

نوجد كذلك دوال الشكل للعنصر الثالث

$$N_i = 1 - 4y, \quad N_j = -1 + 4x, \quad N_k = 1 - 4x + 4y$$

وبالتعويض في المعادلة (22.3)

$$[\iint_{e_3} (16 + 16)dydx] u_7 + [\iint_{e_3} (-4)(4) dydx] u_8 + [\iint_{e_3} 4(-4)dydx] u_2 = \iint_{e_3} (1 - 4x + 4y)(-e^{-x} - 8e^{-2y})dydx$$

$$u_7 - 0.5u_8 - 0.5u_2 = -0.065181$$

وبإيجاد دوال الشكل للعناصر المتتالية e_{10} ، e_{11} ، e_{12} على التوالي ثم التعويض في المعادلة (22.3) نحصل على المعادلات التالية

$$0.5u_7 - 0.5u_8 = -0.051979$$

$$0.5u_7 - 0.5u_{12} = -0.047240$$

$$u_7 - 0.5u_6 - 0.5u_{12} = -0.053455$$

الآن بتجميع المعادلات السابقة والتعويض بالشروط الحدية نحصل على

$$4u_7 - u_8 - u_{12} = 4.633296$$

وبتكرار الخطوات السابقة لإيجاد المعادلات المرتبطة $u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{17}, u_{18}, u_{19}$

فإننا نحصل على المعادلات التالية:

$$-u_7 + 4u_8 - u_9 = 2.258788$$

$$-u_8 + 4u_9 - u_{13} = 3.713994$$

$$-u_7 + 4u_{12} - u_{13} - u_{17} = 1.499026$$

$$-u_8 - u_{12} + 4u_{13} - u_{14} - u_{17} = -0.225910$$

$$-u_9 - u_{13} + 4u_{14} - u_{19} = 0.886157$$

$$-u_{12} + 4u_{17} - u_{18} = 2.332894$$

$$-u_{13} - u_{17} + 4u_{18} - u_{19} = 0.72518$$

$$-u_{14} - u_{18} + 4u_{19} = 2.332894$$

ويمكن كتابته على الصورة

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_7 & 4.633296 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_8 & 2.258788 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_9 & 3.713994 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_{12} & 1.499026 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & u_{13} & = -0.225910 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & u_{14} & 0.886157 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & u_{17} & 2.332894 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & u_{18} & 0.725186 \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 &] [u_{19}] & [1.413591] \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام يكون

| | |
|------------|--------------|
| u_7 | 1.991862 |
| u_8 | 1.819592 |
| u_9 | 1.685428 |
| u_{12} | 1.514560 |
| $u_{13} =$ | 1.342289 |
| u_{14} | 1.208125 |
| u_{17} | 1.225061 |
| u_{18} | 1.052791 |
| $[u_{19}]$ | $[0.918627]$ |

الباب الرابع

مقارنة الطرق العددية بالحل التحليلي

Comparing the Results of Numerical Methods and Exact Solution

1.4. مقدمة

Introduction

في هذا الباب سوف يتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام الطرق العددية بالنتائج المتحصل عليها من الحل التحليلي، ومن ثم تحديد الطريقة العددية التي تعطي دقة أكثر في حالة المعادلات الإهليجية.

2.4. أمثلة عددية

Numerical Examples

الأمثلة العددية التالية تهدف إلى توضيح كفاءة الطرق العددية المدروسة، وتحديد الطريقة الأفضل من بينها وذلك في حالة دراسة معادلات إهليجية في بعدين معرفة على مجال منتظم.

مثال (1.4)

قارن بين الحل العددي بطريقة الفروق المنتهية والحل العددي بطريقة العنصر المنتهي لمعادلة لابلاس التالية:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B.C: \quad u(x, 1) = 10, \quad u(x, 0) = 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0$$

علماً بأن الحل التحليلي هو

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40 \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)}{n\pi \sinh n\pi}, \quad n = 2k - 1$$

الحل

نقارن الحل العددي الذي تحصلنا عليه من الطريقتين [FDM] و [FEM] بالحل التحليلي وذلك بحساب الخطأ المطلق عند كل نقطة داخلية من نقاط الشبكة والطريقة التي تعطينا حل تقريبي بأقل قيمة للخطأ تكون هي الطريقة الأفضل والجدول التالي يوضح كيفية حساب الخطأ ومقارنة الطريقتين.

أولاً: مقارنة النتائج تحليلياً باستخدام الجدول عندما $4 =$

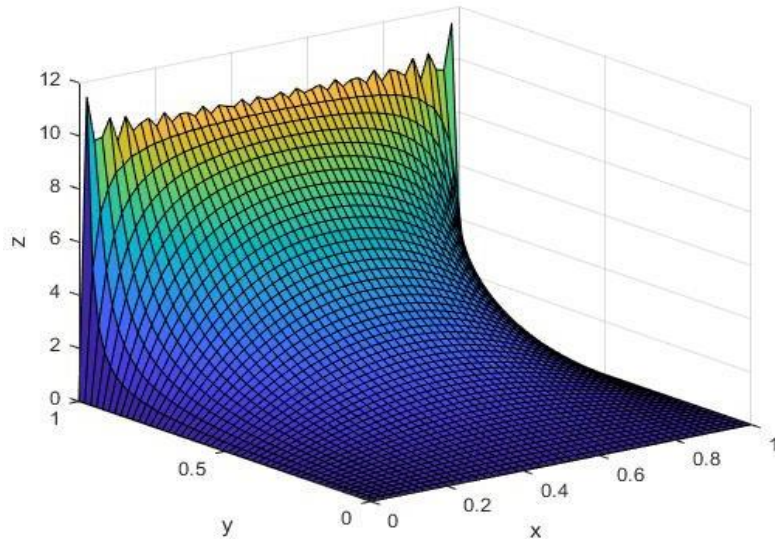
جدول 1.4(: يوضح مقارنة النتائج العددية بالحل التحليلي

| x | y | الحل التحليلي Exact solution | FDM | FEM | الخطأ $ S_E - S_{FDM} $ | الخطأ $ S_E - S_{FEM} $ |
|------|------|---------------------------------|----------|----------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.25 | 0.679731 | 0.714286 | 0.714286 | 0.034555 | 0.034555 |
| 0.5 | 0.25 | 0.954121 | 0.982143 | 0.982143 | 0.028021 | 0.028021 |
| 0.75 | 0.25 | 0.679731 | 0.714286 | 0.714286 | 0.034555 | 0.034555 |
| 1 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.5 | 1.820032 | 1.875000 | 1.875000 | 0.053997 | 0.053997 |
| 0.5 | 0.5 | 2.499041 | 2.500000 | 2.500000 | 0.000959 | 0.000959 |
| 0.75 | 0.5 | 1.820283 | 1.875000 | 1.875000 | 0.054717 | 0.054717 |
| 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.75 | 4.360061 | 4.285714 | 4.285714 | 0.074347 | 0.074347 |
| 0.5 | 0.75 | 5.361539 | 5.267857 | 5.267857 | 0.093682 | 0.093682 |
| 0.75 | 0.75 | 4.360061 | 4.285714 | 4.285714 | 0.074347 | 0.074347 |
| 1 | 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 1 | 10 | 10 | 10 | 0 | 0 |
| 0.5 | 1 | 10 | 10 | 10 | 0 | 0 |
| 0.75 | 1 | 10 | 10 | 10 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

من خلال الجدول السابق نلاحظ أن الحلول العددية متطابقة لستة أرقام عشرية، وتكون متقاربة للحل التحليلي وهذا في حالة دراسة معادلة لابلاس مع شروط حدية متجانسة معرفة على نطاق منتظم

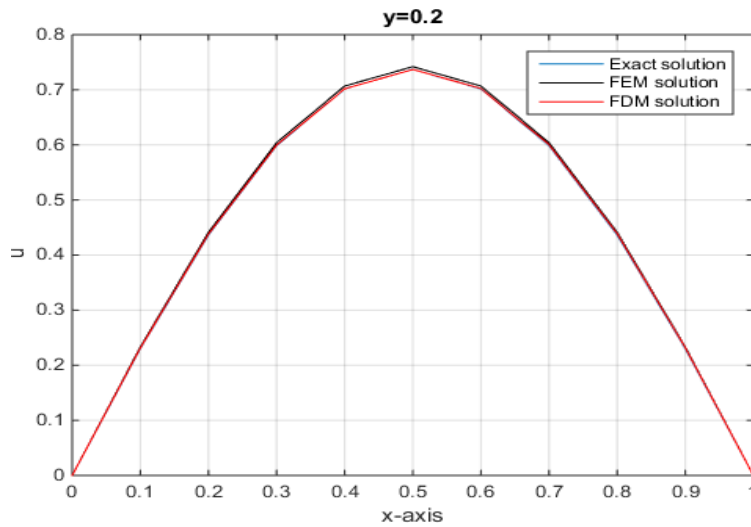
ثانياً: مقارنة النتائج بيانياً

برسم الحل التحليلي كما في الشكل (1.4) التالي



الشكل (1.4): الحل التحليلي لمعادلة لابلاس في المثال (1.4)

لمقارنة الحلول التقريبية بالحل التحليلي بيانياً نختار $N = 10$ فنحصل على



الشكل (2.4): مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي للمثال (1.4)

من خلال الشكل السابق نلاحظ أن الحلول العددية تكون متطابقة تقريباً مع الحل التحليلي، وهذا يعني أن كلا الطريقتين تعطى دقة عالية في حالة دراسة معادلة لابلاس في بعدين ومعرفة على منطقة منتظمة مع شروط حدية متجانسة

مثال (2.4)

قارن بين الحل العددي بطريقة الفروق المنتهية والحل العددي بطريقة العنصر المنتهي لمعادلة لابلاس التالية (Sundaram, 2022):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B. C: \quad u(x, 1) = \sin(2\pi x), \quad u(x, 0) = \sin(2\pi x),$$

$$u(0, y) = 2 \sin(2\pi y), \quad u(1, y) = 2 \sin(2\pi y)$$

علماً بأن الحل التحليلي هو:

$$u(x, y) = \frac{\sin(2\pi x) \cosh(\pi(2y - 1)) + 2 \sin(2\pi y) \cosh(\pi(2x - 1))}{\cosh(\pi)}$$

الحل

أولاً: مقارنة النتائج تحليلياً في حالة $N = 4$

نقارن الحل العددي الذي تحصلنا عليه من الطريقتين [FDM] و [FEM] بالحل التحليلي وذلك بحساب الخطأ المطلق عند كل نقطة داخلية من نقاط الشبكة والطريقة التي تعطينا حل تقريبي بأقل قيمة للخطأ تكون هي الطريقة الأفضل والجدول التالي يوضح كيفية حساب الخطأ ومقارنة الطريقتين في حالة معادلة لابلاس مع الشروط الحدية غير متجانسة.

(الجدول 2.4): مقارنة نتائج الطرق العددية بالحل التحليلي للمثال (2.4)

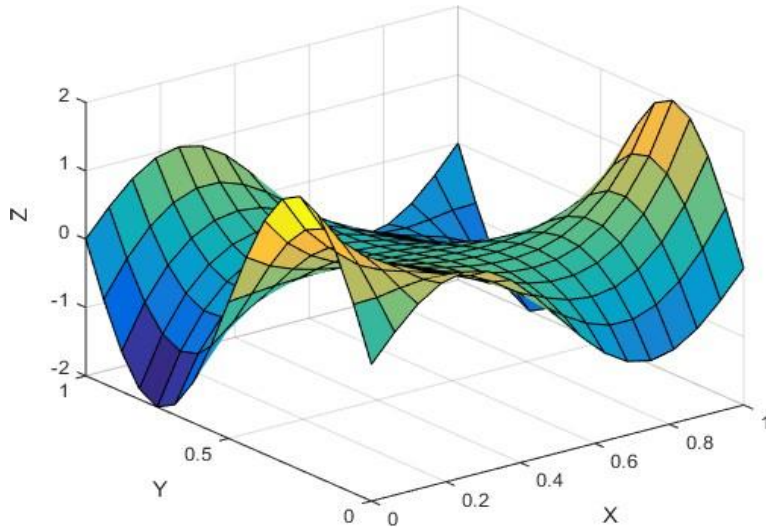
| x | y | الحل التحليلي Exact solution | FDM | FEM | الخطأ $ S_E - S_{FDM} $ | الخطأ $ S_E - S_{FEM} $ |
|------|-----|---------------------------------|-------|-------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|------|------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 0.75 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.25 | 0.649376 | 0.857143 | 0.857143 | 0.207767 | 0.207767 |
| 0.5 | 0.25 | 0.172533 | 0.285714 | 0.285714 | 0.113181 | 0.113181 |
| 0.75 | 0.25 | 0.216459 | 0.285714 | 0.285714 | 0.069255 | 0.069255 |
| 1 | 0.25 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.5 | 0.086267 | 0.142857 | 0.142857 | 0.056590 | 0.056590 |
| 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0.5 | -0.086267 | -0.142857 | -0.142857 | 0.056590 | 0.056590 |
| 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.75 | -2 | -2 | -2 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.75 | -0.216459 | -0.285714 | -0.285714 | 0.069255 | 0.069255 |
| 0.5 | 0.75 | -0.172533 | -0.285714 | -0.285714 | 0.113181 | 0.113181 |
| 0.75 | 0.75 | -0.649376 | -0.857143 | -0.857143 | 0.207767 | 0.207767 |
| 1 | 0.75 | -2 | -2 | -2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

من خلال الجدول السابق نجد أن الحل العددي الناتج من تطبيق طريقة الفروق المنتهية يتطابق مع الحل العددي الذي تحصلنا عليه بتطبيق طريقة العنصر المنتهي وذلك في حالة دراسة معادلة لابلاس معرفة على نطاق منتظم وشروط حدية غير متجانسة.

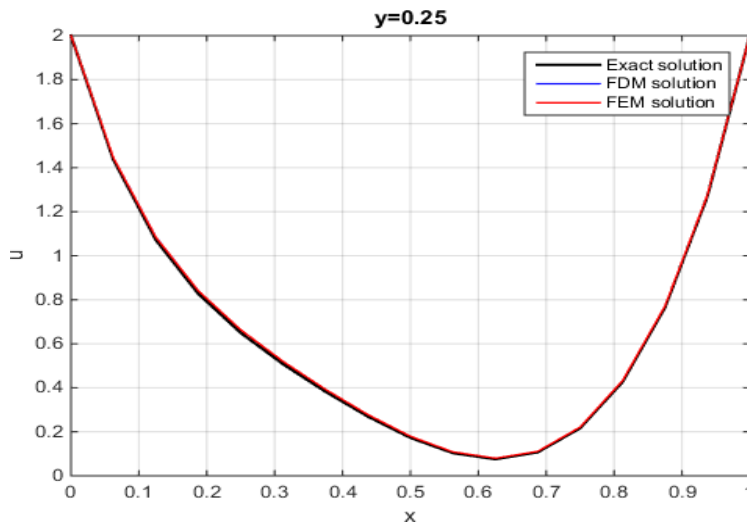
ثانياً: مقارنة النتائج بيانياً

إذا كانت $N = 16$ فإن الحل التحليلي يكون كما بالشكل (3.4)



الشكل (3.4): الحل التحليلي لمعادلة لابلاس في المثال (2.4)

ويمكن مقارنة الحل العددي بطريقة [FDM] بالحل التحليلي وكذلك مقارنة الحل العددي بطريقة [FEM] بالحل التحليلي عندما $y = 0.25$ كما في الشكل (4.4) التالي



الشكل (4.4): مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي

من الشكل السابق نلاحظ أنّ الحلول العددية تكون متقاربة جداً من الحل التحليلي وتعطي نفس الدقة وهذا يعني أنّ كلما زادت قيمة N كلما كانت الدقة أكثر، أي تقترب من الحل التحليلي بشكل أدق وهو المطلوب.

مثال (3.4)

قارن بين الحل العددي بطريقة الفروق المنتهية [FDM] والحل العددي بطريقة العنصر المنتهي [FEM] للمعادلة لابلاس التالية (Kahlaf and Mhassin,2021):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B.C: u(x, 0) = e^{-2x} \quad u(x, 1) = e^{-2x}$$

$$u(0, y) = \cos(2y), \quad u(1, y) = e^{-2} \cos(2y)$$

علماً بأن الحل التحليلي هو

$$u(x, y) = e^{-2x} \cos(2y)$$

الحل

أولاً: مقارنة النتائج تحليلياً عند 5 =

الجدول (3.4): يبين مقارنة النتائج العددية بالحل التحليلي وحساب الخطأ

| x | y | الحل التحليلي <i>Exact Solution</i> | <i>FDM</i> | <i>FEM</i> | الخطأ $ S_E - S_{FDM} $ | الخطأ $ S_E - S_{FEM} $ |
|-----|-----|--|------------|------------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0 | 0.670320 | 0.670320 | 0.670320 | 0 | 0 |
| 0.4 | 0 | 0.449329 | 0.449329 | 0.449329 | 0 | 0 |
| 0.6 | 0 | 0.301194 | 0.301194 | 0.301194 | 0 | 0 |
| 0.8 | 0 | 0.201897 | 0.201897 | 0.201897 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0.135335 | 0.135335 | 0.135335 | 0 | 0 |
| 0 | 0.2 | 0.921061 | 0.921061 | 0.921061 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.2 | 0.617406 | 0.618850 | 0.618850 | 0.001444 | 0.001444 |
| 0.4 | 0.2 | 0.413860 | 0.415423 | 0.415423 | 0.001563 | 0.001563 |
| 0.6 | 0.2 | 0.277418 | 0.278652 | 0.278652 | 0.001234 | 0.001234 |
| 0.8 | 0.2 | 0.185960 | 0.186680 | 0.186680 | 0.00072 | 0.00072 |
| 1 | 0.2 | 0.124652 | 0.124652 | 0.124652 | 0 | 0 |
| 0 | 0.4 | 0.696707 | 0.696707 | 0.696707 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.4 | 0.467016 | 0.468596 | 0.468596 | 0.001580 | 0.001580 |
| 0.4 | 0.4 | 0.313051 | 0.314860 | 0.314860 | 0.001809 | 0.001809 |
| 0.6 | 0.4 | 0.209844 | 0.211311 | 0.211311 | 0.001467 | 0.001467 |
| 0.8 | 0.4 | 0.140663 | 0.141516 | 0.141516 | 0.000853 | 0.000853 |

| | | | | | | |
|-----|-----|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 1 | 0.4 | 0.094289 | 0.094289 | 0.094289 | 0 | 0 |
| 0 | 0.6 | 0.362358 | 0.362358 | 0.362358 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.6 | 0.242896 | 0.243967 | 0.243967 | 0.001071 | 0.001071 |
| 0.4 | 0.6 | 0.162818 | 0.164110 | 0.164110 | 0.001292 | 0.001292 |
| 0.6 | 0.6 | 0.109140 | 0.110217 | 0.110217 | 0.001077 | 0.001077 |
| 0.8 | 0.6 | 0.073159 | 0.073785 | 0.073785 | 0.000626 | 0.000626 |
| 1 | 0.6 | 0.049040 | 0.049040 | 0.049040 | 0 | 0 |
| 0 | 0.8 | -0.029200 | -0.029200 | -0.029200 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.8 | -0.019573 | -0.019197 | -0.019197 | 0.000376 | 0.000376 |
| 0.4 | 0.8 | -0.013120 | -0.012603 | -0.012604 | 0.000516 | 0.000517 |
| 0.6 | 0.8 | -0.008795 | -0.008340 | -0.008340 | 0.000455 | 0.000455 |
| 0.8 | 0.8 | -0.005895 | -0.005631 | -0.005631 | 0.000264 | 0.000264 |
| 1 | 0.8 | -0.003952 | -0.003952 | -0.003952 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -0.416147 | -0.416147 | -0.416147 | 0 | 0 |
| 0.2 | 1 | -0.278952 | -0.278952 | -0.278952 | 0 | 0 |
| 0.4 | 1 | -0.186987 | -0.186987 | -0.186987 | 0 | 0 |
| 0.6 | 1 | -0.125341 | -0.125341 | -0.125341 | 0 | 0 |
| 0.8 | 1 | -0.084019 | -0.084019 | -0.084019 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | -0.056319 | -0.056319 | -0.056319 | 0 | 0 |

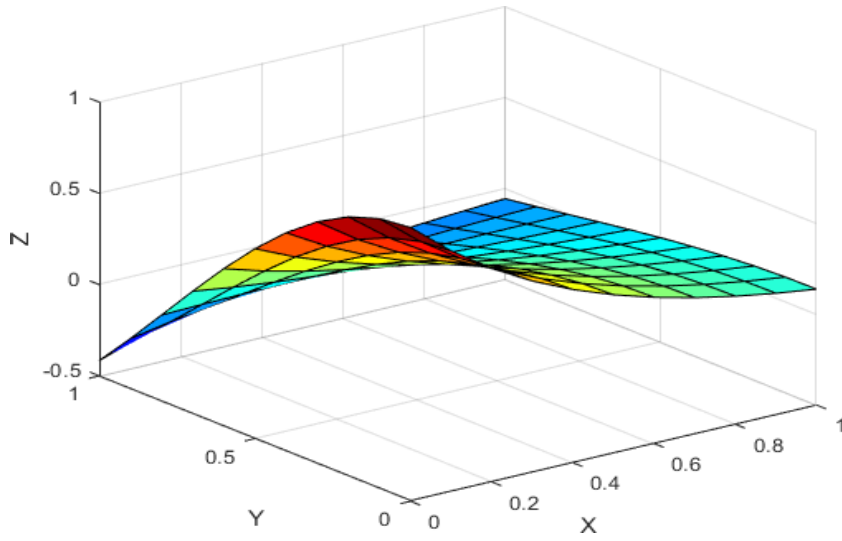
من خلال الجدول السابق نلاحظ أنّ الحل العددي الذي تحصلنا عليه باستخدام طريقة الفروق المنتهية [FDM]

يتطابق تقريباً مع الحل العددي الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة العنصر المنتهي [FEM] وكلاهما

يتقارب إلى الحل التحليلي.

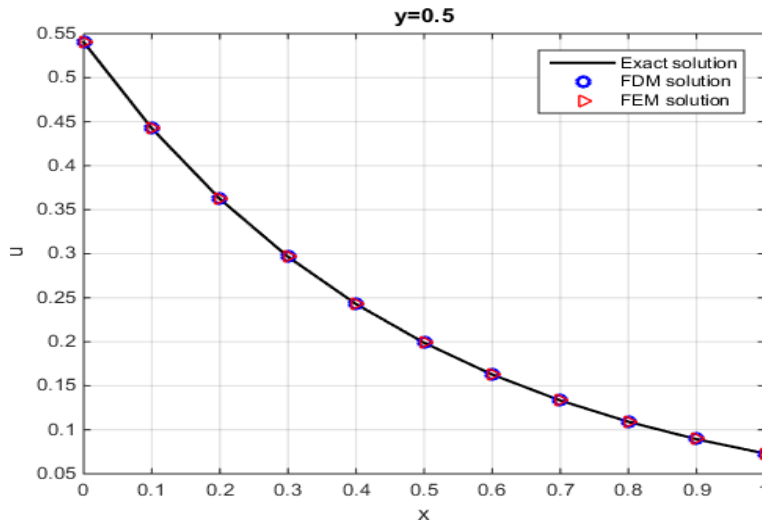
ثانياً: مقارنة النتائج بيانياً عند $10 =$

برسم الحل التحليلي كما في الشكل (5.4)



الشكل (5.4): الحل التحليلي لمعادلة لابلاس في المثال (3.4)

الآن بالرسم الحلول التقريبية ومقارنتها بالحل التحليلي عند $y = 0.5$ كما في الشكل (6.4) التالي



الشكل (6.4): مقارنة بين الحلول التقريبية والحل التحليلي للمثال (3.4)

من خلال الشكل السابق نلاحظ أن الحلول العددية تتطابق تقريباً مع الحل التحليلي وهذا يعكس دقة الطرق العددية في إيجاد الحل التقريبي في حال كان المطلوب حل معادلة لابلاس في بعدين مع شروط ديرشيلت الحدية غير المتجانسة ومعرفة على منطقة منتظمة.

مثال (4.4)

قارن بين الحل العددي بطريقة الفروق المنتهية [FDM] والحل العددي بطريقة العنصر المنتهي [FEM] لمعادلة بواسون التالية (Assefa & Guta, 2019):

$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B.C: u(x, 0) = u(x, 1) = 0,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0$$

علماً بأن الحل التحليلي هو

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

الحل

أولاً: مقارنة النتائج تحليلياً عند 4 =

تم مقارنة الحل العددي الذي تحصلنا عليه باستخدام الطريقتين [FDM] و [FEM] بالحل التحليلي وذلك بحساب الخطأ المطلق عند كل نقطة من نقاط الشبكة الداخلية كما في الجدول التالي:

الجدول (4.4): مقارنة الحل العددي بالحل التحليلي للمثال (4.4)

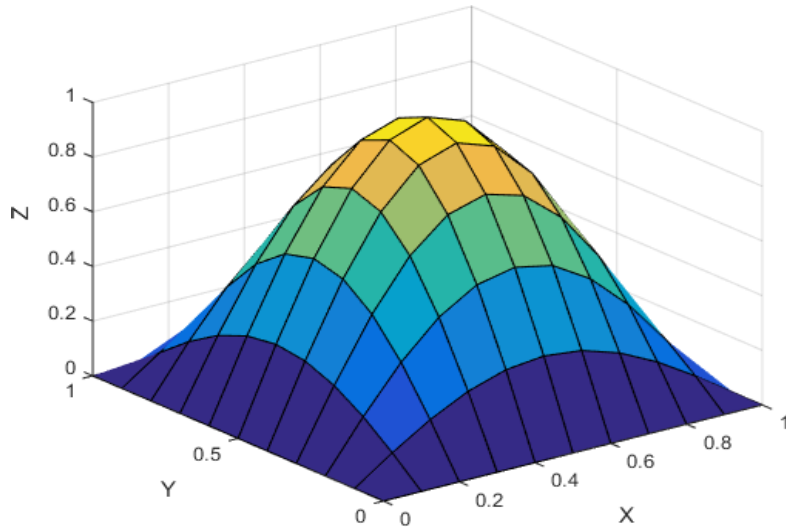
| x | y | الحل التحليلي Exact Solution | FDM | FEM | الخطأ $ S_E - S_{FDM} $ | الخطأ $ S_E - S_{FEM} $ |
|------|------|---------------------------------|----------|----------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.25 | 0.5 | 0.526514 | 0.482378 | 0.026514 | 0.017622 |
| 0.5 | 0.25 | 0.707107 | 0.744603 | 0.671863 | 0.037496 | 0.035244 |
| 0.75 | 0.25 | 0.5 | 0.526514 | 0.467780 | 0.026514 | 0.032223 |
| 1 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|------|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.5 | 0.707107 | 0.744603 | 0.671862 | 0.037496 | 0.035244 |
| 0.5 | 0.5 | 1 | 1.053028 | 0.950155 | 0.053028 | 0.049845 |
| 0.75 | 0.5 | 0.707107 | 0.744603 | 0.671863 | 0.037496 | 0.035244 |
| 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.75 | 0.5 | 0.526514 | 0.467778 | 0.026514 | 0.032223 |
| 0.5 | 0.75 | 0.707107 | 0.744603 | 0.671862 | 0.037496 | 0.035244 |
| 0.75 | 0.75 | 0.5 | 0.526514 | 0.482377 | 0.026514 | 0.017624 |
| 1 | 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

من الجدول السابق نلاحظ أنّ طريقة العنصر المنتهي تكون أقرب للحل التحليلي أيّ تعطينا دقة أكثر من طريقة الفروق المنتهية وذلك في حالة دراسة معادلة بواسون في بعدين معرفة على نطاق منتظم وشروط حدية متجانسة.

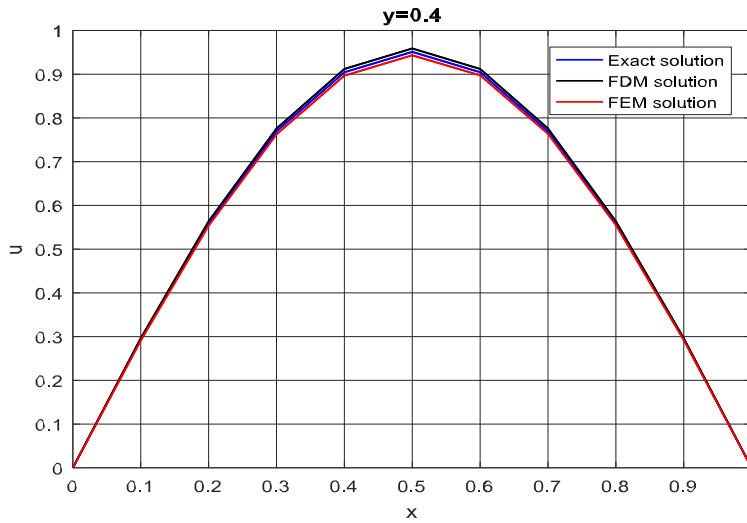
ثانياً: مقارنة النتائج بيانياً عند $10 =$

الحل التحليلي لهذه المعادلة يكون كما بالشكل (3.4) التالي:



الشكل (7.4): الحل التحليلي لمعادلة بواسون في المثال (4.4)

الآن بالرسم الحلول التقريبية والحل التحليلي عند النقطة $y = 0.5$ كما في الشكل (8.4)



الشكل (8.4): مقارنة الحلول التقريبية بالحل التحليلي للمثال (4.4)

من خلال المثال السابق نلاحظ أنه طريقة العنصر المنتهي هي الطريقة الأقرب للحل التحليلي في حالة كانت التقسيمات كبيرة أي إذا كانت N صغيرة، أما إذا كانت N كبيرة والتقسيمات صغيرة فإن كلا الطريقتين تتقارب للحل التحليلي ويكون هناك فرق بسيط بين الطريقتين وهذا الفرق لا يظهر واضحاً في الرسم كما في الشكل (8.4) بمعنى أن كلا الطريقتين تعطي حلاً دقيقاً بقيمة خطأ متقاربة، وعليه يمكن القول بأن طريقة

العنصر المنتهي تكون أكثر دقة بفارق بسيط في قيمة الخطأ المطلق عند حل معادلة بواسون في بعدين مع شروط ديرشليت الحدية المتجانسة والمعرفة على مجال منتظم.

مثال (5.4)

قارن بين الحلول العددية التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة الفروق المنتهية [FDM] وطريقة العنصر المنتهي [FEM] لمعادلة بواسون التالية [Roslan & Su Hoe, 2024]:

$$u_{xx} + u_{yy} = -f(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B.C: u(x, 0) = u(x, 1) = 0,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0$$

حيث

$$f(x, y) = (x^2 - 5x + 4)(y - 1)(ye^{-x-2y}) + 2(x - 1)x(2y^2 - 6y + 3)(e^{-x-2y})$$

وذلك مع الحل التحليلي

$$u(x, y) = e^{-x} \cdot e^{-2y} \cdot x(1 - x) \cdot y(1 - y)$$

الحل

أولاً: مقارنة النتائج تحليلياً عند 4 =

نقارن الحلول العددية بالحل التحليلي وذلك بحساب الخطأ المطلق عند نقاط الشبكة والطريقة التي يكون فيها قيمة الخطأ النسبي أقل تكون هي الطريقة الأفضل ويمكن توضيح ذلك كما في الجدول (5.4) التالي:

الجدول (5.4): يبين مقارنة بين الحلول العددية والحل التحليلي

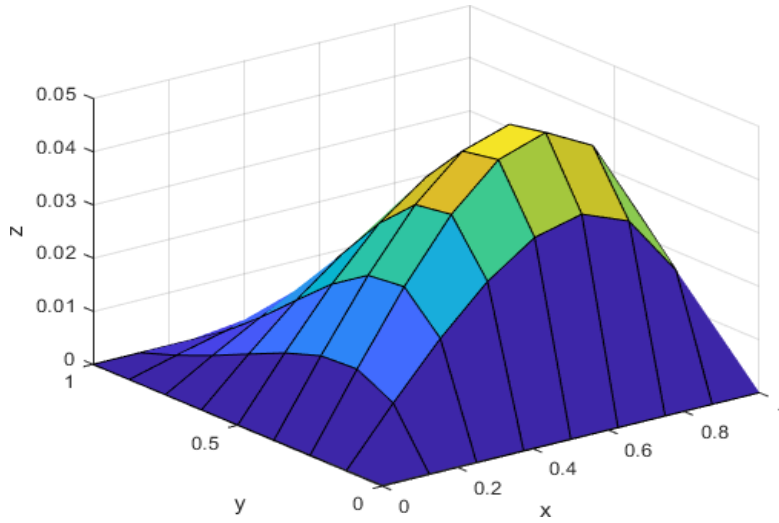
| x | y | FDM | FEM | الحل التحليلي Exact Solution | الخطأ $ S_E - S_{FDM} $ | الخطأ $ S_E - S_{FEM} $ |
|------|-----|-------|-------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|------|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.25 | 0.015483 | 0.015216 | 0.016607 | 0.001124 | 0.001391 |
| 0.5 | 0.25 | 0.015927 | 0.016510 | 0.017244 | 0.001317 | 0.000734 |
| 0.75 | 0.25 | 0.009238 | 0.010007 | 0.010072 | 0.000834 | 0.000065 |
| 1 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.5 | 0.012446 | 0.012836 | 0.013430 | 0.000984 | 0.000594 |
| 0.5 | 0.5 | 0.012763 | 0.013644 | 0.013946 | 0.001183 | 0.000302 |
| 0.75 | 0.5 | 0.007383 | 0.008176 | 0.008146 | 0.000763 | 0.000030 |
| 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.75 | 0.005588 | 0.006085 | 0.006109 | 0.000521 | 0.000024 |
| 0.5 | 0.75 | 0.005708 | 0.006376 | 0.006344 | 0.000636 | 0.000032 |
| 0.75 | 0.75 | 0.003292 | 0.003791 | 0.003705 | 0.000499 | 0.000086 |
| 1 | 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

من خلال الجدول السابق نلاحظ أنّ الخطأ المطلق يكون أقل أثناء استخدام طريقة العنصر المنتهي وعليه فإنّ هذه الطريقة تكون أقرب للحل التحليلي من طريقة الفروق المنتهية

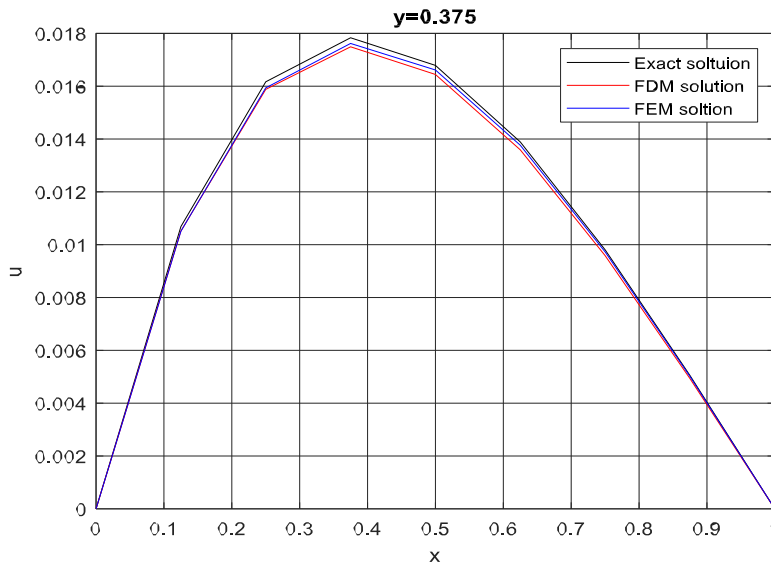
ثانياً: مقارنة النتائج بيانياً عندما $n = 8$

برسم الحل التحليلي كما في الشكل (9.4) الآتي:



الشكل (9.4): الحل التحليلي لمعادلة بواسون في المثال (5.4)

ولتحديد الطريقة العددية الأفضل نرسم الحلول العددية والحل التحليلي عند $y = 0.375$ كالآتي



الشكل (10.4): مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي للمثال (5.4)

من خلال الشكل (10.4) نجد أن الطرق العددية تكون متقاربة إلا أن طريقة العنصر المنتهي تكون الأقرب للحل التحليلي، هذا في حالة اختيار $N = 8$ أي أنه كلما كانت التقسيمات كبيرة نوعاً ما يظهر الفرق بين الطريقتين واضحاً وكلما كانت التقسيمات أصغر كلما اقتربت الحلول العددية من الحل التحليلي أكثر وكلا الطريقتين تعطي دقة أكثر وهذا يتوافق مع النتيجة التي تم الحصول عليها في المثال (4.4).

مثال (6.4)

قارن بين الحلول العددية والحل التحليلي لمعادلة بواسون التالية (Baharum&Hoe,2022) :

$$u_{xx} + u_{yy} = -f(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$B.C: \quad u(x, 0) = e^{-x} + 2, \quad u(x, 1) = e^{-x} + 2e^{-2},$$

$$u(0, y) = 1 + 2e^{-2y}, \quad u(1, y) = e^{-1} + 2e^{-2y}$$

حيث

$$f(x, y) = -e^{-2x} - 8e^{-2y}$$

والحل التحليلي يعطى بالصورة التالية

$$u(x, y) = e^{-x} + 2e^{-2y}$$

الحل

أولاً: مقارنة النتائج تحليلياً عندما $n = 4$

(الجدول 6.4): مقارنة الحلول التقريبية بالحل التحليلي

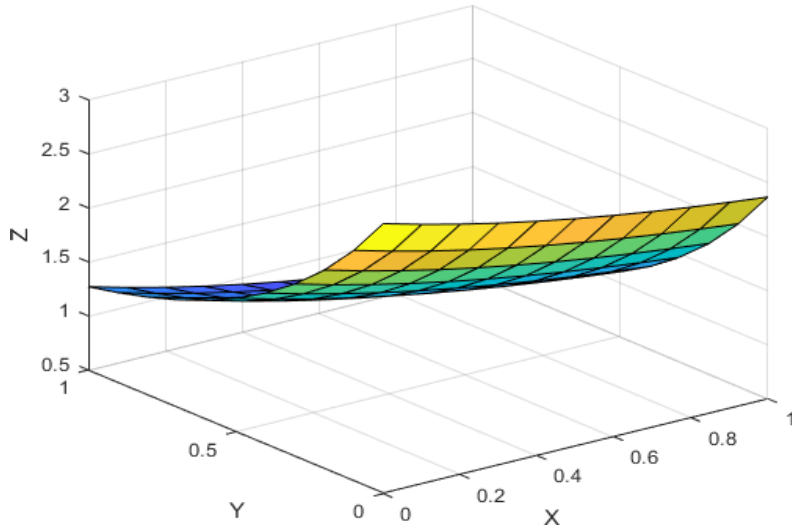
| x | y | FDM | FEM | الحل التحليلي Exact Solution | الخطأ $ S_E - S_{FDM} $ | الخطأ $ S_E - S_{FEM} $ |
|------|------|----------|----------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0 | 2.778801 | 2.778801 | 2.778801 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0 | 2.606531 | 2.606531 | 2.606531 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0 | 2.472367 | 2.472367 | 2.472367 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 2.367879 | 2.367879 | 2.367879 | 0 | 0 |
| 0 | 0.25 | 2.213061 | 2.213061 | 2.213061 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.25 | 1.995512 | 1.991862 | 1.991862 | 0.00365 | 0 |
| 0.5 | 0.25 | 1.824095 | 1.819592 | 1.819592 | 0.00450 | 0 |
| 0.75 | 0.25 | 1.689035 | 1.685428 | 1.685428 | 0.003607 | 0 |

| | | | | | | |
|------|------|----------|----------|----------|----------|---|
| 1 | 0.25 | 1.580941 | 1.580941 | 1.580941 | 0 | 0 |
| 0 | 0.5 | 1.735759 | 1.735759 | 1.735759 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.5 | 1.518032 | 1.514560 | 1.514560 | 0.003472 | 0 |
| 0.5 | 0.5 | 1.346476 | 1.342289 | 1.342290 | 0.004186 | 0 |
| 0.75 | 0.5 | 1.211526 | 1.208125 | 1.208125 | 0.003401 | 0 |
| 1 | 0.5 | 1.103638 | 1.103638 | 1.103638 | 0 | 0 |
| 0 | 0.75 | 1.446260 | 1.446260 | 1.446260 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.75 | 1.226965 | 1.225061 | 1.225061 | 0.001903 | 0 |
| 0.5 | 0.75 | 1.054100 | 1.052791 | 1.052791 | 0.001309 | 0 |
| 0.75 | 0.75 | 0.920417 | 0.918627 | 0.918627 | 0.001790 | 0 |
| 1 | 0.75 | 0.814140 | 0.814140 | 0.814140 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1.270671 | 1.270671 | 1.270671 | 0 | 0 |
| 0.25 | 1 | 1.049471 | 1.049471 | 1.049471 | 0 | 0 |
| 0.5 | 1 | 0.877201 | 0.877201 | 0.877201 | 0 | 0 |
| 0.75 | 1 | 0.743037 | 0.743037 | 0.743037 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0.638550 | 0.638550 | 0.638550 | 0 | 0 |

من خلال الجدول السابق نجد أن الحل بطريقة العنصر المنتهي يتطابق مع الحل التحليلي لستة أرقام عشرية بينما الحل بطريقة الفروق المنتهي يتطابق مع الحل التحليلي لثلاثة أرقام عشرية وهذا يعني أن الحل بطريقة العنصر المنتهي أكثر دقة، وعليه فإن طريقة العنصر المنتهي هي الطريقة الأفضل لحل معادلة بواسون في بعدين مع شروط ديرشليت الحدية غير المتجانسة.

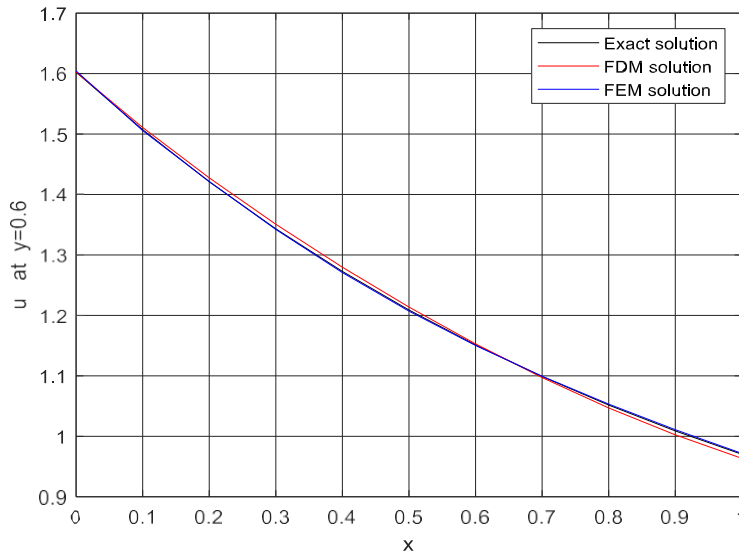
ثانياً: مقارنة النتائج بيانياً عندما $10 =$

برسم الحل التحليلي كما في الشكل (11.4) التالي:



الشكل 11.4: يبين الحل التحليلي لمعادلة بواسون في المثال (6.4)

وبمقارنة الحلول التقريبية بالحل التحليلي وذلك برسم الحلول عند $y = 0.6$ كما في الشكل (12.4)



الشكل 12.4: مقارنة الحلول العددية بالحل التحليلي للمثال (6.4)

من الرسم نجد أن الحل التقريبي بطريقة العنصر المنتهي متطابقة تقريباً مع الحل التحليلي وبالتالي فهو الحل الأقرب وهي الطريقة الأنسب في حالة حل معادلة بواسون في بعدين مع شروط ديرشليت الحدية غير المتجانسة.

من خلال الأمثلة السابقة نجد أن الحلول العددية والحل التحليلي تكونان متطابقتين تقريباً أي أن كلما كان اختيار N كبيره أي التقسيمات صغيرة بالنسبة للفترات كلما كان الحل أقرب للحل التحليلي وفي هذه الحالة يتم اللجوء إلى برامج خاصة (كود خاص) لإيجاد الحل التقريبي في مثل الحالات لأنه يصبح من الصعب إيجاده وخاصة

في حالة استخدام طريقة الفرق المنتهي وكانت الشروط الحدية معقدة حيث يصبح من الصعب إيجاد معادلات الفروق وأيضاً تطبيق الشروط الحدية وتستهلك الكثير من الجهد والوقت، أما طريقة العنصر المنتهي فهي أقل صعوبة في التطبيق في مثل هذه الحالة مقارنة بطريقة الفرق المنتهي إلا أنه في كلا الحالتين وعندما تكون الدقة العالية مطلوبة يتم اللجوء إلى الحل باستخدام البرامج الجاهزة.

الاستنتاج

عملنا في هذا البحث على عرض بعض الطرائق التحليلية والعديدية، وقمنا بتطبيقها على أهم المعادلات التفاضلية الجزئية من النوع الناقص مثل معادلة لابلاس ومعادلة بواسون، وأبرز الطرق العددية التي درسناها:

• طريقة الفروق المنتهية [FDM]

• طريقة العنصر المنتهي [FEM]

واستخدما الطرق التحليلية:

• طريقة فصل المتغيرات [SVM] في حالة المعادلات الإهليجية المتجانسة

• طريقة الدوال الذاتية [FEM] في حالة عدم تجانس المعادلات الإهليجية

حصلنا بعد تطبيق هذه الطرائق التحليلية (على الحل الفعلي لتلك المسائل، وذلك في حال وجوده، وفي هذه الحالة قمنا بمقارنة الحل الفعلي بالحل التقريبي الناتج عن تطبيق الطرق العددية، وقد أجريت هذه المقارنة بواسطة الأشكال والجدول العددية، ولا بد من الإشارة إلى أن معظم الأمثلة التي قد تم اختيارها بحيث تحتوي

على معادلات ذات أهمية، وذات تطبيقات واسعة في المجالات الفيزيائية والهندسية، ولاحظنا من خلال

الأمثلة المدروسة المتعلقة بمعادلة لابلاس مع شروط ديرشليت المتجانسة أو غير المتجانسة أن كلا الطريقتين

تتقارب للحل التحليلي بينما عند دراسة معادلة بواسون مع نفس الشروط فإن طريقة العنصر المنتهي [FEM] أفضل من طريقة

الفروق المنتهية [FDM] والتي تعطي حل مقرب للمعادلة وبأقل خطأ ممكن في حالة كون المجال (منطقة الحل) للمعادلات

الإهليجية المدروسة ذات أشكال هندسية منتظمة (مستطيل، مثلث)؛ وذلك لأن طريقة الفروق المنتهية تصبح أكثر تعقيداً في حالة أردنا

الدقة العالية أي كلما كان تقسيم المنطقة المدروسة أكثر وكذلك كلما كانت الشروط الحدية أكثر تعقيداً، ويمكن توضيح الفرق بين الطريقتين

كالتالي:

| طريقة الفروق المنتهية [FDM] | طريقة العنصر المنتهي [FEM] |
|---|---|
| تعتبر الطريقة الأقدم | الطريقة الأحدث |
| يتم تقسيم المنطقة أو المجال على شكل شبكة وتحتوي على نقاط داخلية ونقاط خارجية (حدودية) تسمى العقد التي يتم من خلالها تحديد النتائج | يتم تقسيم المجال أو المنطقة إلى مثلثات أو مستطيلات وتكون النتائج معلومة عند كل نقطة في النطاق حيث يتم تعريفها باستخدام دوال الشكل التي تحاول فهم سلوك الوسط |
| أصعب في تطبيق الشروط الحدية | أسهل في تطبيق الشروط الحدية |
| تتطلب حسابات أقل لحل المعادلات | تتطلب حسابات أكثر وقدرة حسابية عالية لحل المعادلات |

| | |
|--|---|
| أسرع في الوصول للحل في حالة كانت N صغيرة ودقة أقل | تأخذ وقت لإجراء الحسابات اللازمة إلا أنها تعطينا الدقة المطلوبة |
| أقل دقة وتصيح أكثر تعقيد وصعوبة في الحساب عندما تكون تقسيم النطاق أكثر أي عندما تكون N كبيرة | أكثر دقة في حالة التقسيمات الكثيرة وأسهل في الحساب |

وانطلاقاً من الاستنتاج السابق، يمكن تقديم بعض المقترحات والرؤى المستقبلية، بهدف تطوير طريقة [FEM] وزيادة فعاليتها.

التوصيات

استناداً الى نتائج الدراسة والاستنتاجات المستخلصة منها، تم اقتراح التوصيات التالية من أجل رفع كفاءة طريقة العنصر المنتهي وتحسين تطبيقاتها العملية في المستقبل:

1. تطبيق هذه الطريقة على المعادلات الإهليجية مع شروط حدية من النوع الثاني والثالث والتي تم حلها في هذا البحث بطريقة [FDM] ومقارنة النتائج.
2. تطبيق هذه الطريقة في حالة النطاق أو المجال غير المنتظم.
3. حل المعادلات الواردة في هذا البحث بطريقة عددية أخرى مثل طريقة العنصر المحدد ومقارنة النتائج مع النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة [FEM] في هذا البحث.
4. إمكانية دمج هذه الطريقة مع طرق أخرى بهدف الحصول على دقة عالية.
5. تطبيق هذه الطرق على المعادلات الإهليجية غير الخطية وغيرها من المعادلات التفاضلية الجزئية.

المصادر والمراجع

• المراجع العربية:

- أصلان، هبة. (2020). الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الناقصية ببعدين بطريقة العناصر المنتهية بشروط حدية مختلطة (رسالة ماجستير). تم الاسترجاع من العنوان [http:// albaath-unvi.edu.sy](http://albaath-unvi.edu.sy)
- البكور، ماجدة. (2019). المعادلات التفاضلية. [وثيقة.pdf]. تم الاسترجاع من العنوان <http://www.alepuniv.edu.sy>
- سليمان، سميرة (2021). الدوال الخاصة. طرابلس: مركز العلوم والتقنية للبحوث والدراسات
- شفتنر، حميدة. (2019). الحلول الشبكية للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية. المجلة العلمية لكلية التربية مصراتة، (1)12، 156-175. تم الإسترجاع من العنوان <http://www.mdr.misuratau.edu.ly>
- عبد، جلال. (2008). المعادلات التفاضلية العادية والجزئية. ثم الإسترجاع من العنوان <http://www.alfreed-library.com>
- العويضي، حسن وزراع، سناء وعباس، عبد الوهاب. (2005). المعادلات التفاضلية ج2. الرياض، السعودية: مكتبة الرشيد.
- عيد، نصر الدين. (2011). التحليل العددي. حلب، سوريا: منشورات جامعة حلب
- فيرس، ج وباردن، ر. (2001). التحليل العددي، (ط2) (رمضان جهيمة، كمال أبودية، ترجمة). مالطا: فاليثا، منشورات. ELGA.
- مطيح، برلنت. (2016). الحلول العددية للمعادلات التكاملية والتفاضلية الجزئية ومسائل القيم الحدية. دمشق، سوريا: منشورات جامعة دمشق.

- Abu alrob, M. F. (2016). *Finite difference and finite element methods for solving elliptic partial differential equations* (Master's thesis, An-Najah National University, Palestine). Retrieved from <http://www.repository.najah.edu>
- Agbezuge, L. (2006). *Finite element solution of poisson equation in with dirichlet boundary conditions in rectangle domain*. Retrieved form <https://www.cs.cornell.edu>
- Aleyan, O.A. (2020). An application of Finite Difference Method to Solve Elliptic PDE 'S with use of GS SOR iterative methods. *Journal of The Academic forum*,4(2),379-394.
- Asmar, N.H. (2005). *Partial differential equations with fourier series and boundary value problems* (2nd ed). New Jersey, USA: prentice Hall.
- Assefa, G. M., Guta, L. (2019). Solution of two dimensional poisson equation using finite difference method with uniform and non-uniform mesh size. *Advances in Physics Theories and Applications*,79, 1-10. doi:10.7176/APTA.
- Baharum, F.G., Hoe, Y.S. (2022). Application of Finite Element Method in 2D Poisson Equation. *Proceedings of Science and Mathematics*, 9, 64-72.
- Buchanan.J.R.(2022). Neumann Problems on Rectangle Math467 Partial Differential Equations. Retrieved from [https:// Sites.millersville.edu](https://Sites.millersville.edu)
- Chopade, P., Rastogi, P. (2018). Numerical Method Algorithms for Solution of Two-Dimensional Laplace Equation in Electrostatics. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*,8(4),65-69.
- Dubin, D. (2003). *Numerical and analytical methods for Scientists and Engineers using Mathematical*. USA, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

- Elgezson, M.M. (2018). Jacobi and Gauss Seidel Methods to Solve Elliptic Partial Differential Equations. *International Science and Technology Journal*, 1(15), 1-13. Retrieved from <http://www.stc.rs.com.ly>
- Esfandiari, R.S. (2017). *Numerical Methods for Engineers and Scientists Using MATLAB* (2nd ed). Boca Raton, USA: Taylor & Francis Group.
- Ghassemi, H., Panahi, S., Kohansa, A. (2016). Solving the Laplace's equation by FDM and BEM using mixed boundary conditions. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 4(2), 37-42. doi:10-12691/ ajams-4-2-2.
- Haberman, R. (2013). *Applied Partial Differential Equations with Fourier series and boundary value problem* (5th ed). UK, London: Pearson.
- Hoe, Y., & Roslan, S. (2024). Numerical Solution of 2D Poisson Equation Using Finite Element Method and Finite Difference Method. *Proceedings of Science and Mathematics*, 23, 99-107.
- Karunanithi, S., & Jeevitha, S. (2017). Comparison of Numerical Solution of Elliptic PDE Using FDM and FEM. *International Journal Scientific and Technical Research*, 7(1), 398-408. Retrieved from <http://www.rpublication.com /ijst/index.html>.
- Kythe, P. (2011). *Green's Function and Linear Differential equations*, New York. USA: Taylor & Francis.
- Leveque, R. J. (2007). *Finite difference Methods for Ordinary and Differential Equations*, Philadelphia, USA: Siam Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Marchi, C. H., Arak, L. K., Alves, A.C., Roberta, R.S., Concalyes, S.D., Marcio, M.A. (2010, December). *Solution of the 2D laplace equation with triangnlar grid and multiple richardson extrapolations trapolations*. paper presented at the 13th the Congress of Thermal Sciences and Engineering, Uberlandia, Brazil.

- Mebrate, B., & Raokoya, P. (2015). Numerical solution of a two-dimensional Poisson equation with Dirichlet boundary condition. *American Journal of Applied Mathematics*, 3(6), 297-304. doi: 10.11648/j.ajam.20150306.19
- Min.C., Yoon, G., & Yoon, M. (2016). On solving the singular system arisen from Poisson equation with Neumann boundary condition. *Journal of Scientific Computing*. 69, 391-405. doi: 10.1007/s10915-016-0200-2
- Moin, P. (2010). *Fundamentals of engineering numerical Analysis* (2nd ed), New York. USA: Cambridge University Press
- Papanikos., & Gousidou-Koutita, M. (2015). A computational Study with Finite Element Method and Finite Difference Method for 2D Elliptic Partial Differential Equations. *Applied Mathematics* ,12(6), 2104-2124. doi:10.4236/am.2015.612185
- Pikulint, V. P., Pohozaev, S.I. (2001). *Equations mathematical physics*. Moscow, Russia: Russian Academy of Sciences.
- Pinsky, M.A. (2011). *Partial differential equations and boundary value problems with applications* (3rd ed.). Rhode, Island: American Mathematical society.
- Pivato, M. (2010). *Linear Partial Differential Equations and Fourier Theory*. UK, Cambridge: University Press.
- Stanoyevitch, A. (2005). *Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations Using Matlab*. United States of America, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Stavroulakis, I.P., & Tersian, S. A. (2004). *Partial Differential Equations an Introduction with Mathematica and Maple* (2nd ed). Singapore: World Scientific Publishing.
- Strikwerda, J. (2004). *Finite Difference Method Schemes and Partial Differential Equations* (2nd ed). Philadelphia: Siam

- Sundram, A. (2022). Numerical approximation of poisson equation using the finite difference method, *International Journal for Research in Applied science Engineering Technology*, 10,1513-1518. doi: <https://doi.org/10.22214/ijraset.2022.47247>.
- Tanininah, A. (2021). *Finite Element Method for Elliptic Differential Equations* (Master's thesis, Hebron University, Hebron, Palestine). Retrieved from <http://dspace.hebron.edu>
- Thomee, V. (2001). From Finite Differences to Finite Elements a Short History of Numerical Analysis of Partial Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* ,128 (2001),1-54
- Trench, W. F. (2013). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, San Francisco. USA: Brooks Locle Thomson Learning.
- Turyn, L. (2013). *Advanced engineering mathematics*. Boca Raton, USA: Taylor & Francis Group.
- Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Chicago, USA: Springer Science &Business Media.
- Wazwaz, A.M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations Mothed and Applications*. Berlin, Germany: Springer

Abstract

The majority of physical and engineering phenomena are described by partial differential equations. Solving these equations is essential for understanding such problems; however, obtaining their exact analytical solution is frequently challenging. Consequently, it becomes necessary to utilize numerical methods for approximating these equations.

In this study, we focused on linear second-order elliptic partial differential equations, specifically employing two-dimensional Poisson's and Laplace's equations as representative models for the aforementioned phenomena. We successfully derived the analytical solutions for the equations under investigation: using the separation of variables method for homogeneous elliptic PDEs and the eigenfunction method for inhomogeneous ones. For the inhomogeneous equations, a comparative analysis was conducted between the analytical solution and the numerical solutions generated by applying both the Finite Difference Method and the Finite Element Method. This comparison was presented through numerical tables and graphical plots. It is worth noting that although some of these equations were found in existing literature and solved using similar or alternative techniques, their presentation often lacked detail and clarity for the reader. Our approach therefore involved re-formulating and presenting these solutions in a detailed, simplified manner to clearly illustrate each method's mechanism and enhance reader comprehension. Our findings from the examined examples indicate that both the Finite Differences Method and the Finite Element Method exhibit convergence towards the analytical solution when applied to a two-dimensional homogeneous elliptic (Laplace) equation defined on a regular domain (such as a rectangle or triangle) and subject to homogeneous and inhomogeneous Dirichlet boundary conditions. Conversely, when addressing a two-dimensional inhomogeneous elliptic (Poisson) equation under homogeneous and inhomogeneous Dirichlet boundary conditions, the Finite Element Method generally yields a superior approximate solution compared to the Finite Difference

Method, resulting in lower errors, particularly when the domain of the inhomogeneous elliptic (Poisson) equation possesses a regular geometric form (rectangle, triangle, etc.).

Keywords: Finite Difference Method, Finite Element Method, Two-Dimensional Poisson's Equation, Two-Dimensional Laplace's Equation



**University of Alasmariya Islamic
Faculty of Sciences
Department of Mathematics**

**Solving some Elliptic Partial Differential Equations by
Using Finite Differences Method and Finite Element
Method and Compare Them**

Naeimah Miftah Salem Abhour

**Supervisor
Prof. Omer Ali Aleyan**

**A thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the
degree of master in mathematics**