دولة ليبيا
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة الأسمرية الإسلامية
كلية العلوم
قسم الرياضيات

تطبيق نظرية سيلو في تصنيف الزمر المنتهية

دراسة مقدمة استكمالاً لمتطلبات الحصول على درجة الاجازة العالية (الماجستير) في الرياضيات

إعداد الطالبة:

أسماء عطية محمد العيان

إشراف:

د. مختار الطاهر الزوبي

2022

صدق الله العظيم

سورة النساء - الآية (113)

الإهــــــــــــداء

إلى :

أمــي و أبـــي

إخوتي و أخواتي

زوجي وبناتي (زينب وحنين ورغد وأمل)

صديقاتي

أساتذتي

أهدي ثمرة جهدي

الباحثة

الشكر والتقدير

الحمد والشكر لله سبحانه وتعالى الذي أنار لي دروب العلم و المعرفة ووفقني لإتمام هذه الرسالة،

و لرسولنا الكريم محمد صلى الله علية وسلم الذي بلغ الرسالة وأدى الأمانة فجزاه الله عنا أحسن الجزاء.

أتقدم بجزيل الشكر و العرفان إلى (**د. مختار الطاهر الزوبي**) على تفضله بقبول إشرافه على هذه الرسالة ولما قدمه لي من معلومات وتوجيهات ونصائح قيمة التي كان لها الدور الكبير في ظهور هذه الرسالة بهذا الشكل فجزاءه الله عني خير الجزاء.

وإلى كل من (**د. مفيدة محمد حميدة**) و(**د. محمد أحمد حمودة**) على تفضلهما بقبول مناقشة هذه الرسالة

الشكر والتقدير والعرفان لوالدي اللذان حرصا على تربيتي وتعليمي

وإلى شركاء أفراحي وأحزاني اخوتي وأخواتي

شكري وتقديري إلى **زوجي** لما قدمه لي من عون ومساعدة

أسمى آيات الشكر والتقدير و الاحترام إلى كل أعضاء هيأة التدريس بقسم الرياضيات بهذه الكلية لما قدموه لي من معلومات طيلة أيام دراستي.

وأخص بالذكر (**أ.د رمضان محمد جهيمة**) و(**أ.د عمر علي العيان**) وأتمنى لهم المزيد من التقدم و العطاء.
والشكر موصول إلى كل من رافقني في دراستي ولكل من ساعدني و علمني و أرشدني أو دعا لي بدعوة طيبة.

ونسأل الله العلي القدير أن أكون قد وفقت في إعداد هذه الرسالة ومن الله العون و التوفيق

(والحمد لله رب العالمين له الشكر أولا وأخيراً)

الباحثة

الرموز المستخدمة

$*$ عملية ثنائية.

$\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

$\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة.

$\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

$\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد القياسية.

$\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

$\mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر.

$\mathbb{Z}_n$ فصول الباقي بمقياس n.

$+_n$ الجمع بمقياس n.

G زمرة.

e العنصر المحايد في الزمرة.

a^{-1} معكوس العنصر a في الزمرة.

$|G|$ رتبة الزمرة G.

$ord(g)$ رتبة العنصر g.

$o(g)$ رتبة العنصر g.

$|g|$ رتبة العنصر g.

$A \subseteq B$ ، A مجموعة جزئية من B.

$A \subset B$ ، A مجموعة جزئية من B و $A \neq B$.

$G \leq H$ ، H زمرة جزئية من G.

$G < H$ ، H زمرة جزئية من G و $G \neq H$.

$G \cap H$ الزمرة H تقاطع الزمرة G.

$G \cup H$ الزمرة H اتحاد الزمرة G.

$G \in g$ العنصر g ينتمي إلى الزمرة G.

$G \notin g$ العنصر g لا ينتمي إلى الزمرة G.

HK حاصل ضرب الزمرة H مع الزمرة K.

$H \vee K$ الزمرة H رابط الزمرة K.

gcd القاسم المشترك الأكبر.

S_n الزمرة المناظرة.

$n!$ مضروب n.

A_n الزمرة المرادفة.

$\langle a \rangle$ زمرة جزئية دورية.

Q_n زمرة ثنائي الدورية.

D_n زمرة زوجية.

aH المجموعات المصاحبة اليسرى.

Ha المجموعات المصاحبة اليمنى.

$[G : H]$ عدد مجموعات المصاحبة اليمنى أو اليسرى (دليل G من H).

$H \trianglelefteq G$ ، H زمرة جزئية ناظمية من G.

G/H زمرة القسمة.

$N(H)$ منظم H في G.

f تشاكل.

$G \cong H$ الزمرة G تماثل الزمرة H.

$G \ncong H$ الزمرة G لا تماثل الزمرة H.

$ker(f)$ نواة التشاكل.

$Im(f)$ مدى التشاكل.

$orb(x)$ مسار النقطة x.

G_x النقطة المثبتة.

X_g ، x مثبتة بالعنصر g.

X_G ، x مثبتة بجميع عناصر الزمرة G.

$Z(G)$ مركز الزمرة G.

$C(a)$ ممركز a.

$cl(a)$ فصل الترافق a.

الملخـــــص

ABSTRACT

تهدف هذه الدراسة إلى التعريف بالمفاهيم الأساسية للزمرة، وأيضا إلى التعريف بنظريات سيلو الأولى والثانية والثالثة وتقديم براهين هذه النظريات باستخدام مبرهنة كوشي وتأثير الزمرة على المجموعة. كما تهدف إلى توضيح بعض تطبيقات نظريات سيلو ومن هذه التطبيقات: تمييز زمر سيلو الجزئية الناظمية، وتمييز الزمر التبديلية، وتمييز الزمر الدورية، وتمييز الزمر البسيطة، وكل هذه الأهداف تساعد في تحقيق الهدف الرئيسي لهذه الدراسة وهو تصنيف الزمر المنتهية باستخدام نظريات سيلو، وقد تم استخدام المنهج الوصفي التحليلي في هذه الدراسة، وجمعت المعلومات عن طريق البحث العام في مصادر المعلومات، وتوصلت هذه الدراسة إلي مجموعة نتائج أهمها:

- زمرة سيلو الجزئية الناظمية تكون وحيدة.
- رتبة الزمرة التي يمكن وضعها على شكل قوى تحتوى على زمرة جزئية ناظمية.
- الزمرة التي تحتوي على الأغلب زمرة جزئية واحدة من كل رتبة تكون دورية.
- الزمرة تكون غير بسيطة إذا كانت لها زمرة سيلو جزئية وحيدة.
- تصنيف الزمر المنتهية التي رتبتها أقل من 16.

فهرس المحتويـــات

فهرس الجداول

المقدمـــــــة

Introduction

تعد الزمرة إحدى أهم الأنظمة الجبرية، إذ يستخدم مفهوم الزمر في العديد من فروع الرياضيات البحتة ، كالهندسة والتبولوجيا والتحليل الدالي وغيرها من الفروع، أما على صعيد الرياضيات التطبيقية فقد تم استخدامها في مجالات الميكانيكا الكم و الأشعة السينية و التحليل الطيفي. و أصبحت الزمرة أداة لا يمكن الاستغناء عنها، ليس فقط لأنها تقودنا إلى اكتشافات جديدة ولكن لأنها تختصر لنا العمليات الحسابية وتمكننا من وضع الكثير من النتائج الصعبة في صورة موجزة. (سمحان و الذكير ، 2008)

من المسائل المهمة في الزمر هو اكتشاف بعض أو كل الزمر الجزئية من زمرة معطاة، ومن النتائج المهمة في نظرية الزمر هي **مبرهنة لانجرانج** التي تنص على **" رتبة أي زمرة جزئية من الزمرة G هو عدد يقسم رتبة الزمرة G "** وأن عكس مبرهنة لانجرانج صحيحه في الزمر الدورية و في الزمر التبديلية، ولكن عكس مبرهنة لانجرانج غير صحيحه في الزمر المنتهية بصفة عامة، فمثلا الزمرة A_4 رتبتها 12، ولكن ليس لها زمرة جزئية رتبتها 6. (Fraleigh, 2003)

من أهم الاكتشافات هو ما قدمه لنا العالم الرياضي النرويجي (لدويغ سيلو) (LUDWIG SYLOW) حيث قدم لنا ثلاث نظريات جاءت نظريته الأولى عكس نظرية لانجرانج في حالات خاصة وهي عندما تكون d قوة أولية، أي أنه إذا كان p عدد أولي و p^k تقسم رتبة الزمرة G إذن الزمرة G يجب أن تحتوي على زمرة جزئية رتبتها P^k، والنظرية الثانية تبين علاقة جميع هذه الزمر الجزئية، أما النظرية الثالثة فتعطي معلومات عن عدد هذه الزمر الجزئية.

من المهم ذكره هنا أن سيلو برهن نظرياته الثلاثة لزمر التبديلات، وكان الرياضي جورج فروبينس (George Frobenius) هو أول من قدم برهانا لهذه النظريات، حيث كانت مبرهنة كيلي حافزا له لتقديم هذه البراهين، و بعد ذلك نشر العديد من البراهين لنظريات سيلو، ولكن سنستخدم هنا ما نراه أفضل هذه البراهين وهو البرهان الذي يعتمد على مبرهنة كوشي و تأثير الزمرة على المجموعة.

ومن أهم تطبيقات نظرية سيلو التي سوف تتناوله هذه الدراسة هو تصنيف الزمر المنتهية، ويعتبر تصنيف الزمر المنتهية من حيث التماثل من المسائل المهمة في نظرية الزمر،ومن المهم أن يستنتج قائمة تحتوي على تصنيف جميع الزمر المنتهية، ولكن لا يوجد تصنيف يشمل جميع الزمر المنتهية. ولهذا خصصت هذه الدراسة في تصنيف الزمر المنتهية التي رتبتها تكون صغيرة، فنظريات سيلو لها دور في تصنيف الزمر المنتهية وخاصة الزمر غير التبديلية، فالزمر المنتهية التبديلية يتم تصنيفها بواسطة المبرهنة الأساسية للزمر المنتهية التبديلية، وأما الزمر غير التبديلية فليس لها مبرهنة أو قاعده تعتمد عليها في تصنيف جميع الزمر غير التبديلية. لأي زمرة من رتبة معينة أولا تميز ما إذا كانت هذه الزمرة تبديلية أو غير تبديلية، إذا كانت تبديلية فيستخدم المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية في تصنيفها، وإذا كانت غير تبديلية فيربط نظريات سيلو بمبرهنات أخرى أساسية في الزمر للحصول على تصنيف الزمرة المعطاة، وفي متن هذه الدراسة سوف يوضح ذلك.

تحتوي هذه الدراسة على ثلاثة فصول:

الفصل الأول بعنوان (**المفاهيم الأساسية للزمرة**) يحتوي على تعريف العملية الثنائية وخواصها، والزمرة وبعض خواصها الأولية، والزمرة المنتهية والزمرة الجزئية، وزمرة التباديل والزمرة الدورية، والمجموعات المصاحبة ومبرهنة لانجرانج، والزمرة الجزئية الناظمية وزمرة القسمة، والتشاكل، وتأثير الزمرة على المجموعة وفصول الترافق.

الفصل الثاني بعنوان (**نظريات سيلو وبعض تطبيقاتها**) يدرس بعض التعاريف و المبرهنات التي تساعد في إثبات نظريات سيلو، نظريات سيلو الأولى والثانية والثالثة وسنقدم إثبات لهذه النظريات وسنستخدم تأثير الزمرة على المجموعة ومبرهنة كوشي في إثبات هذه النظريات، وسيطبق هذه النظريات في توضيح بعض الأمثلة، وسيتناول فيه أيضا بعض التطبيقات لهذه النظرية وهي: زمرة سيلو الجزئية الناظمية، وتمييز الزمر الدورية، وتمييز الزمر التبديلية، وتمييز الزمر البسيطة.

الفصل الثالث بعنوان (**تصنيف الزمر المنتهية باستخدام نظرية سيلو**) يناقش فيه تصنيف الزمر المنتهية باستخدام نظريات سيلو، وسيصنف هذا الفصل الزمر التي رتبتها تكون على إحدى الصور التالية:

1) الزمرة التي رتبتها عدد أولي.
2) الزمرة التي رتبتها p^2 حيث p عدد أولي.
3) الزمرة التي رتبتها $2p$ حيث p عدد أولي.
4) الزمرة التي رتبتها pq حيث إن p، q عددان أوليان و $p < q$ و p لا تقسم $q - 1$.
5) الزمرة التي رتبتها p^2q حيث إن p، q عددان أوليان و $p < q$ و $q \not\equiv 1(mod\ p)$.
6) الزمرة التي رتبتها 8.
7) الزمرة التي رتبتها 12.

الفصل الأول

المفاهيم الأساسية للزمرة

BASIC CONCEPTS FOR GROUP

1−1 العملية الثنائية Binary Opration

تعريف (1-1-1) (العملية الثنائية Binary Opration) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G مجموعة غير خالية. نقول أن $*$ عملية ثنائية على G إذا كانت $*$ دالة من $G \times G$ إلى G، أي أن $*(a,b) \in G$ لكل $(a,b) \in G \times G$.

ملاحظة :

يستخدم عادة $a * b$ بدلا من $*(a,b)$.

الأن سيعرض بعض الأمثلة على العملية الثنائية:

مثال (1-1-1)

عملية الجمع العادي على $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ثمتل عملية ثنائية.

مثال (2-1-1)

عملية الضرب العادي على $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ثمتل عملية ثنائية.

مثال (3-1-1)

عملية الطرح العادي على $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ثمتل عملية ثنائية، ولكن عملية الطرح ليس عملية ثنائية على $\mathbb{N}$، فمثلا $1 - 2 \notin \mathbb{N}$.

مثال (4-1-1)

عملية القسمة العادية على $\mathbb{Q} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\}$ ثمتل عملية ثنائية، ولكن عملية القسمة العادية لا ثمتل عملية ثنائية على $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ، فمثلا $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. يجب استبعاد 0 من $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ في عملية القسمة العادية لأن القسمة على 0 غير معرفة.

مثال (5-1-1)

لكل عدد صحيح $n \geq 2$ نعرِف المجموعة:

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots \dots, n-1\}$$

لكل $a, b \in \mathbb{Z}_n$ يكون:

$a + b =$ باقي قسمة جمع a, b على n، ويسمى الجمع هذا، الجمع بمقياس n "Addition Modulo n"، الذي يرمز له بالرمز $+_n$، ويمثل عملية ثنائية.

$a.b =$ باقي قسمة ضرب a, b على n، ويسمى الضرب هذا، الضرب بمقياس n (Multiplication Modulo n)، ويمثل عملية ثنائية.

والتعريف التالي يلخص خواص العملية الثنائية.

تعريف (2-1-1) (Pinter, 2010)

لتكن $*$ عملية ثنائية على المجموعة غير خالية G:

1. العملية الثنائية $*$ تكون تنسيقية إذا كانت:

$$a*(b*c) = (a*b)*c \quad , \quad \text{لكل } a, b, c \in G$$

2. العنصر $e \in G$ يكون عنصر محايد بالنسبة إلى العملية الثنائية $*$ إذا كانت:

$$e*a = a \quad , \quad a*e = a \quad ، \quad \text{لكل } a \in G$$

3. بفرض أن $e \in G$ يكون عنصر محايد بالنسبة للعملية الثنائية $*$، العنصر $a \in G$ يكون له معكوس، إذا وُجد $b \in G$ بحيث أن:

$$a*b = e \quad , \quad b*a = e$$

(العنصر b يسمى معكوس (Inverse) العنصر a بالنسبة للعملية الثنائية $*$ على الزمرة G ، ويرمز لمعكوس a عادة بالرمز a^{-1}).

4. العملية الثنائية $*$ تكون تبديلية (Commutative) إذا كانت:

$$a*b = b*a \quad \text{لكل } a, b \in G$$

5. العنصر $a \in G$ يسمى عنصر جامد (Idempotent) بالنسبة للعملية الثنائية $*$ إذا كان:

$$a * a = a$$

6. العنصر $z \in G$ يكون صفري (Zero) بالنسبة للعملية الثنائية $*$ إذا كان:

$$z * a = z \quad , \quad a * z = z \quad ، \quad \text{لكل } a \in G$$

تعريف (3-1-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن $*$ عملية ثنائية على المجموعة غير الخالية G. يسمى الزوج المرتب $(G, *)$ بناء جبريا(Algebric Structure) .

2-1 الزمرة و بعض خواصها الأساسية

Group and some Basic Properties

تعريف (1-2-1) (Fraleigh, 2003)

البناء الجبري $(G\ ,*)$ حيث G مجموعة غير خالية، $*$ عملية ثنائية معرفة على G يكون زمرة (Group)، إذا تحققت الشروط التالية:

1. العملية الثنائية $*$ تكون تنسيقية على G (Associative of G) بحيث إن:
   $(a * b) * c = a * (b * c)$ لكل $a, b, c \in G$.
2. يوجد عنصر $e \in G$ بحيث إن:
   $a * e = e * a = a$ لكل $a \in G$
3. لكل $a \in G$ يوجد عنصر $b \in G$ بحيث إن:
   $$a * b = b * a = e$$

ملاحظة : إذا كانت $(G\ ,*)$ زمرة فإن:

1. يستخدم عادة ab بدلاً من $a * b$.
2. يكتب أحيانا G بدلاً من $(G\ ,*)$ للتعبير عن الزمرة.

الآن سيتم عرض بعض الأمثلة على الزمرة:

مثال (1-2-1)

$(\mathbb{Z}, +)$ تكون زمرة، مع العنصر المحايد 0، معكوس أي عنصر $a \in \mathbb{Z}$ يكون $-a \in \mathbb{Z}$.

مثال (2-2-1)

$(\mathbb{R}, +)$ تكون زمرة، مع العنصر المحايد 0، معكوس أي عنصر $a \in \mathbb{R}$ يكون $-a \in \mathbb{R}$.

مثال (3-2-1)

$(\mathbb{R}^*, \ .\ )$ تكون زمرة، العنصر المحايد 1، ومعكوس أي عنصر $a \in \mathbb{R}^*$ يكون $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$ ، حيث إن $\mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر.

مثال (4-2-1)

$(\mathbb{Z}_n, +_n)$ تكون زمرة، العنصر المحايد 0، ومعكوس أي عنصر $a \in \mathbb{Z}_n$ يكون $n - a$ إذا كان $a \neq 0$، والمعكوس يكون 0 إذا كان $a = 0$.

مثال (5-2-1)

لتكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ مجموعة n من الزمر. الضرب الديكارتي $G_1 \times G_2 \dots \times G_n$ يكون زمرة مع العملية الثنائية الآتية:

$$(a_1, a_2 \dots, a_n) * (b_1, b_2 \dots, b_n) = ((a_1 * b_1), (a_2 * b_2) \dots, (a_n * b_n))$$

حيث $a_i, b_i \in G_i$. العنصر المحايد يكون $e = (e_1, e_2 \dots, e_n)$، حيث إن e_i محايد للزمرة G_i. ومعكوس أي عنصر $a = (a_1, a_2 \dots, a_n)$ يكون $a^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1} \dots, a_n^{-1})$، حيث إن a_i^{-1} معكوس للعنصر a_i.

هذه تسمى زمرة الضرب المباشر (Direct Prodect) من الزمر $G_1, G_2, \dots, G_n$.

تعريف (1-2-2) (Fraleigh, 2003)

الزمرة $(G,*)$ تسمى تبديلية أو أبلية (Commutative or Abelian) إذا كان:

$$a * b = b * a \quad \text{لكل} \quad a, b \in G$$

المبرهنات الآتية توضح بعض خواص الزمر الأساسية.

مبرهنة (1-2-1) (Gallian, 2012)

إذا كانت $(G ,*)$ زمرة فإن:

1- العنصر المحايد في G يكون وحيد.

2- معكوس أي عنصر في G يكون وحيد.

مبرهنة (1-2-2) [خاصية الحدف للزمرة] (Clark, 1984)

لتكن $(G ,*)$ زمرة. $a, b, c \in G$:

1- إذا كان $a * b = a * c$، فإن $\mathrm{c} = \mathrm{b}$.

2- إذا كان $b * a = c * a$، فإن $c = b$.

مبرهنة (1-2-3) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا كانت G زمرة، فإن لكل $a, b, c \in G$ يكون:

1) $(a^{-1})^{-1} = a$

2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

3) الزمرة G تكون تبديلية إذا وفقط إذا كان $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

4) يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين $ax = b$, $ya = b$ في الزمرة G .

تعريف (3-2-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G زمرة مع العنصر المحايد e. بفرض أن $a \in G$ يعرِف a^n حيث $n \in \mathbb{Z}$ كالتالي:

$$a^n = \overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ من المرات}}$$

عندما $n = 0$:

$$a^0 = e$$

عندما $n = 1$:

$$a^1 = a$$

عندما $n = -1$:

$$a^{-1} = the\ inveerse\ of\ a$$

عندما $n \geq 2$:

$$a^n = a^{n-1} * a$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n$$

مبرهنة (5-2-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ و كان $m, n \in Z$، فإن:

1) $a^n a^m = a^{n+m}$

2) $(a^n)^{-1} = a^{-n}$

3) $(a^n)^m = a^{nm}$

4) إذا كانت G زمرة تبديلية، فإن $(ab)^n = a^n b^n$

3 -1 الزمرة المنتهية والزمرة الجزئية

Finite Group and Subgroups

تعريف (1-3-1) (الزمرة المنتهية Finite Group) (Gallian, 2012)

الزمرة G تسمى زمرة منتهية، إذا كان لها عدد منتهي من العناصر.

تعريف (2-3-1)(الزمرة غير المنتهية Infinite Group) (Hungerford, 1990)

الزمرة G تسمى زمرة غير منتهية، إذا كان ليس لها عدد منتهي من العناصر.

تعريف (3-3-1) (رتبة الزمرة Order Group) (Gallian, 2012)

عدد العناصر في الزمرة (المنتهية أو غير المنتهية) يسمى رتبة الزمر، ويرمز لرتبة الزمرة بالرمز $|G|$.

مثال (1-3-1)

الزمرة $(\mathbb{Z}\,,+)$ تكون رتبتها غير منتهية، بينما الزمرة $(\mathbb{Z}_4,+_4)$ رتبتها تساوي 4.

تعريف(4-3-1)(رتبة العنصر Order Element) (Gallian, 2012)

رتبة العنصر $g \in G$ تكون أصغر عدد صحيح موجب n بحيث $g^n = e$، وإذا لم يوجد مثل هذا العدد، فإن رتبة g تكون غير منتهية، ويرمز لرتبة العنصر بالرمز $|g|$ أو بالرمز $o(g)$ أو بالرمز $ord(g)$.

مبرهنة (1-3-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا كانت G زمرة، $a\,,b \in G$ ، فإن $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

مبرهنة (2-3-1) (Clark, 1984)

إذا كانت G زمرة، وكانت $a^2 = e$ لكل $a \in G$، فإن G زمرة تبديلية.

تعريف (1-3-5) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G زمرة و $a\,,b \in G$. يسمى العنصر $aba^{-1}b^{-1}$ مبدلا (Commutator) للعنصرين a و b.

تعريف (1-3-6)(الزمرة الجزئية Subgroup) (Fraleigh, 2003; Hungerford, 1990)

لتكن H مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G. H تكون زمرة جزئية من G إذا كانت H نفسها تكون زمرة تحت العملية الثنائية المعرفة على G. ويرمز للزمرة الجزئية H من الزمرة G بالرمز $H \leq G$. و إذا كانت $H \leq G$ و $H \neq G$، فإنه يرمز للزمرة الجزئية H من الزمرة G بالرمز $H < G$.

مثال (1-3-2)

لتكن $G = (\mathbb{Z}_9\,,+_9)$، $H = \{0\,,3\,,6\}$.

$(H\,,+_9)$ تكون زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}_9,+_9)$، العنصر المحايد في الزمرة الجزئية 0، و العنصرين $3\,,6$ معكوس كلا منهما الأخر.

ملاحظة: (Hungerford, 2003)

كل زمرة G تحتوي على زمرتين جزئيتين غير فعليتين، هما الزمرة G نفسها والزمرة التافهة $\{e\}$، حيث e يكون العنصر المحايد في الزمرة G. كل الزمر الجزئية الأخرى من الزمرة G (إن وجدت) تكون زمر جزئية فعلية من الزمرة G (Proper Subgroup of G).

المبرهنة التالية تعطي الشروط التي تكون فيها المجموعة الجزئية من زمرة معينة زمرة جزئية.

مبرهنة (1-3-3) (Fraleigh, 2003)

المجموعة الجزئية H من الزمرة G تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان:

1) H تكون مغلقة تحت العملية الثنائية المعرفة على G.
2) $e \in H$.
3) لكل $a \in H$ يكون $a^{-1} \in H$.

مبرهنة (1-3-4) (Khanna & Bhambri, 1998)

إذا كانت H, K زمر جزئية من الزمرة G، فإن $H \cap K$ يكون زمرة جزئية من G.

ملاحظة : (Axler & Ribeb , 2007)

إذا كانت H, K زمر جزئية من الزمرة G، فإن $H \cup K$ ليس من الضروري أن يكون زمرة جزئية من G. في الحقيقة اتحاد أي زمرتين جزئيتين من زمرة معينة تكون زمرة جزئية إذا وفقط إذا كان احدى الزمر تكون محتواه في الزمرة الأخرى.

المبرهنتان التاليتان تعطيان شرطاً واحداً لتكون H زمرة جزئية من G.

مبرهنه (1-3-5) (Axler & Ribeb , 2007)

إذا كانت H مجموعة جزئية من الزمرة G، فإن H تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $a, b \in H$ يؤدي إلى أن $ab^{-1} \in H$.

مبرهنة (1-3-6) (Clark, 1984)

إذا كانت H مجموعة جزئية منتهية من الزمرة G، فإن H تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $a, b \in H$ يؤدي إلى أن $ab \in H$.

تعريف (1-3-6) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G زمرة. ولتكن كل من H و K مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G. يعرف حاصل الضرب H مع K (Product of H and K) بأنه المجموعة:

$$HK = \{ hk : h \in H , k \in K \}$$

تعطي المبرهنة التالية الشروط اللازمة و الكافية لكي تكون HK زمرة جزئية من G.

مبرهنة (1-3-7) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G، فإن العبارات الآتية تكون متكافئة:

1) $HK \leq G$.
2) $HK = KH$.
3) $HK = \langle H \cup K \rangle$.

ملاحظة:

الزمرة الجزئية $\langle H \cup K \rangle$ المولدة H , K تسمى رابط H من K ويرمز له بالرمز $H \vee K$.

مبرهنة (1-3-8) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H , K \leq G$ بحيث $\gcd(|H| , |K|) = 1$، فإن $H \cap K = \{e\}$.

تعريف (1-3-7) **(مركز الزمرة)** **(Center Group))** (Hungerford, 1990)

لتكن G زمرة. يعرف مركز الزمرة الذي يرمز له بالرمز $Z(G)$، بأنه المجموعة التي تحتوي على العناصر من الزمرة G التي تكون متبادلة مع كل عنصر في الزمرة G أي أن:

$$Z(G) = \{a \in G : ax = xa , \forall \ x \in G \}$$

مبرهنة (1-3-9) (Gallian, 2012)

إذا كانت G زمرة، فإن مركز الزمرة $Z(G)$ يكون زمرة جزئية من G.

تعريف (1-3-8) (ممركز a (Centerlizer of a)) (Hungerford, 1990)

لتكن G زمرة. و $a \in G$ يعرف ممركز a، الذي يرمز له بالرمز $C(a)$، بأنه المجموعة التي تحتوي على كل العناصر في الزمرة G التي تكون متبادلة مع العنصر a أي أن:

$$C(a) = \{x \in G \ : \ xa = ax\}$$

مبرهنة (1-3-10) (Gallian, 2012)

إذا كانت G زمرة، فإن $C(a)$ تكون زمرة جزئية من G.

1-4 زمرة التباديل و الزمرة الدورية

Permutations Group and Cyclic Group

(1-4-1) زمرة التباديل Permutations Group

تعريف (1-4-1-1) (Fraleigh, 2003)

التبديل للمجموعة A، هو دالة أحادية وفوقية من A إلى A.

تعريف (1-4-1-2) (Hungerford, 2003)

لتكن $f: A \to A$ تبديل (دالة أحادية وفوقية). ولتكن $g: A \to A$ تبديل (دالة أحادية وفوقية)، فإن ضرب التباديل (تركيب الدوال) f و g تكون دالة $g \circ f: \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ المعرفة $g \circ f(a) = g\big(f(a)\big)$، حيث إن $a \in A$.

المبرهنة التالية توضح أن كل التباديل لمجموعة غير خالية A، تشكل زمرة مع عملية ضرب التباديل (تركيب الدوال).

مبرهنة (1-1-4-1) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت A مجموعة غير خالية، وكانت S_A تجمع كل التباديل للمجموعة A، فإن S_A تكون زمرة مع عملية ضرب التباديل.

تعريف (3-1-4-1) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت A مجموعة منتهية $A = \{1\ , 2\ \dots , n\}$، فإن زمرة كل التباديل على A هي الزمرة المناظرة (Symmetric)، ويرمز لها بالرمز S_n، رتبة الزمرة S_n هي $n!$ أي أن:

$$|S_n| = n! = n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)$$

تعريف (4-1-4-1) (Fraleigh, 2003)

يسمى التبديل γ للمجموعة A دورة طولها n، إذا وجد $a_1\ , a_2\ \dots , a_n \in A$ بحيث $a_1\gamma = a_2\ , a_2\gamma = a_3\ \dots\ , a_{n-1}\gamma = a_n\ , a_n\gamma = a_1$، وتسمى الدورة التي طولها 2 بالنقلة (Transposition).

مبرهنة (2-1-4-1) (Hungerford, 2003)

كل تبديل في S_n يمكن كتابته على صورة ضرب نقلات.

تعريف (5-1-4-1) (Hungerford, 2003)

التبديل $\sigma \in S_n$ يسمى زوجيا (فرديا)، إذا كانت σ يمكن كتابته على صورة ضرب عدد زوجي (فردي) من النقلات.

مبرهنة (3-1-4-1) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت $n \geq 2$، فإن مجموعة التباديل الزوجية للمجموعة $\{1\ ,2\ \dots , n\}$، تشكل زمرة جزئية ذات رتبة $n!/2$ من الزمرة المناظرة S_n.

تعريف (6-1-4-1) (Fraleigh, 2003)

تسمى الزمرة الجزئية من S_n، التي تحتوي على التباديل الزوجية ل n، بالزمرة المرادفة A_n (Alternating Group).

مبرهنة (4-1-4-1) (Hungerford, 2003)

بفرض أن a و b عناصر مختلفة من $\{1,2 \dots, n\}$، فإن A_n حيث $(n \geq 3)$ تكون مولدة بواسطة $\{(abk): 1 \leq k \leq n\ ,\ k \neq a, b\}$.

(2-4-1) الزمرة الدورية Cyclic Group

تعريف (1-2-4-1) (الزمرة الدورية Cyclic Group) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G زمرة. تسمى G زمرة دورية، إذا وجد $a \in G$ بحيث أن:

$$G = \langle a \rangle = \{a^n\ ,\ n \in Z\}$$

ويسمى العنصر a في هذه الحالة مولد للزمرة G (Generator of G).

تعريف (2-2-4-1) (الزمرة الجزئية الدورية Cyclic Subgroup)

لتكن G زمرة. تسمى الزمرة الجزئية H من G، بالزمرة الجزئية الدورية المولدة بالعنصر a، إذا وجد $a \in H$، بحيث أن:

$$H = \langle a \rangle = \{a^n\ ,\ n \in Z\} \leq G$$

ملاحظة: (Clark, 1984)

عناصر الزمرة المنتهية المولدة بالعنصر a، يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$\langle a \rangle = \{a^n\ : 0 \leq n < ord(a)\ \}$$

مبرهنة (1-2-4-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

كل زمرة دورية تكون تبديلية.

مبرهنة (2-2-4-1) (Pinter, 2010)

كل زمرة جزئية من زمرة دورية، يجب أن تكون دورية.

مبرهنة (3-2-4-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G زمرة دورية. رتبتها n حيث $n > 1$، و كانت $H \leq G$، فإن $|H|$ تقسم n.

مبرهنه (4-2-4-1) (Gallian, 2012)

كل زمرة رتبتها عدد أولي تكون دورية.

تعريف (3-2-4-1) (Stearns, 2015)

إذا كانت $n = 2m$ لبعض $m \geq 1$، تعرَف زمرة ثنائي الدورية (Dicyclic) التي يرمز لها بالرمز Q_n ، بأنها زمرة رتبتها $2n$، مولدة بالعنصرين a ، b كالآتي:

$$Q_n = \{e, a\,, a^2\,\ldots, a^{n-1}, b, ba, ba^2\ldots, ba^{n-1}\}$$

بحيث $\mathrm{ord(a)} = n$ ، $aba = b$ ، $b^2 = a^m$.

مثال (1-2-4-1)

الزمرة Q_6 ثنائي الدورية، و مولدة بالعنصرين a و b ، ورتبتها 12. بتطبيق التعريف السابق تكون عناصر الزمرة Q_6 كالآتي:

$$Q_6 = \{e\,, a\,, a^2\,, a^3\,, a^4\,, a^5\,, b\,, ba\,, ba^2\,, ba^3\,, ba^4\,, ba^5\}$$

حيث أن: $|a| = 6$ و $b^2 = a^3$

يمكن إيجاد جدول الضرب للزمرة Q_6 كالآتي:

$a^i * a^j = a^{i+j}$ لكل $i + j < 6$.

$a^i * a^j = a^{i+j-6}$ لكل $i + j \geq 6$.

$a^i * b = ba^{6-i}$ لكل $0 \leq i \leq 5$.

$ba^i * ba^j = a^{9-i+j}$

جدول (1-1) جدول الضرب للزمرة Q_6

$*$	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5
e	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	e	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	e	a	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3
a^3	a^3	a^4	a^5	e	a	a^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2
a^4	a^4	a^5	e	a	a^2	a^3	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	ba
a^5	a^5	e	a	a^2	a^3	a^4	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b
b	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	a^3	a^4	a^5	e	a	a^2
ba	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	a^2	a^3	a^4	a^5	e	a
ba^2	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	ba	a	a^2	a^3	a^4	a^5	e
ba^3	ba^3	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5
ba^4	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3	a^5	e	a	a^2	a^3	a^4
ba^5	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	a^4	a^5	e	a	a^2	a^3

ومن جدول (1-1) يستنتج أن:

$ba^2 * ba^4 = a^5 \neq ba^4 * ba^2 = a$، وهذا يوضح أن الزمرة Q_6 زمرة غير تبديلية.

تعريف (4-2-4-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

تُعرف الزمرة الزوجية من الدرجة $n \geq 3$ (Dihedral Group of Degree n)، التي يرمز لها بالرمز D_n، أنها الزمرة رتبتها $2n$، مولدة بالعنصرين b, a حيث إن $ord(a) = n$, $\mathrm{ord(b)} = 2$ والتي تحقق العلاقة $ba = a^{-1}b$. وبالتالي تكون عناصر الزمرة D_n كالآتي:

$$D_n = \{e, a , a^2 \dots, a^{n-1}, b, ba, ba^2 \dots, ba^{n-1}\}$$

مثال (2-2-4-1)

الزمرة D_6 زمرة زوجية من الدرجة السادسة، ورتبتها 12، ومولدة بالعنصرين a وb،

بتطبيق التعريف السابق تكون عناصر الزمرة D_6 كالآتي:

$$D_6 = \{e , a , a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , b , ba , ba^2 , ba^3 , ba^4 , ba^5\}$$

حيث أن: $|a| = 6$ و $|b| = 2$.

يمكن إيجاد جدول الضرب للزمرة D_6 كالآتي:

$a^i * a^j = a^{i+j}$ لكل $i + j < 6$.

$a^i * a^j = a^{i+j-6}$ لكل $i + j \geq 6$.

$a^i * b = ba^{6-i}$ لكل $0 \leq i \leq 5$.

$ba^i * ba^j = a^{6-i+j}$

جدول (2-1) جدول الضرب للزمرة D_6

*	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5
e	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	e	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	e	a	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3
a^3	a^3	a^4	a^5	e	a	a^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2
a^4	a^4	a^5	e	a	a^2	a^3	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	ba
a^5	a^5	e	a	a^2	a^3	a^4	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b
b	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5
ba	ba	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	a^5	e	a	a^2	a^3	a^4
ba^2	ba^2	ba^3	ba^4	ba^5	b	Ba	a^4	a^5	e	a	a^2	a^3
ba^3	ba^3	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2	a^3	a^4	a^5	e	a	a^2
ba^4	ba^4	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3	a^2	a^3	a^4	a^5	e	a
ba^5	ba^5	b	ba	ba^2	ba^3	ba^4	a	a^2	a^3	a^4	a^5	e

ومن جدول (2-1) يستنتج أن:

$ba^2 * ba^4 = a^2 \neq ba^4 * ba^2 = a^4$، وهذا يوضح أن الزمرة D_6 زمرة غير تبديلية.

5-1 المجموعات المصاحبة ومبرهنة لانجرانج

Coset and Lagrange and theorem

تعريف (1-5-1) (المجموعات المصاحبة Coset) (Fraleigh, 2003)

لتكن H زمرة جزئية من G و $a \in G$. المجموعة المصاحبة اليسرى (Left Coset) aH من H تكون المجموعة:

$$aH = \{ah: \ h \in H\}$$

والمجموعة المصاحبة اليمنى (Right Coset) Ha من H تكون المجموعة:

$$Ha = \{ha: \ h \in H\}$$

ملاحظة : (Gallian, 2012)

1) عندما تكون العملية المعرفة على G عملية جمع، فإن المجموعة المصاحبة اليسرى من H في G، والمولدة بالعنصر aتكون كالآتي:

$$a + H = \{a + h: \ h \in H\}$$

و المجموعة المصاحبة اليمنى تكون كالآتي:

$$H + a = \{h + a: \ h \in h\}$$

2) إذا كانت العملية المعرفة على G تبديلية (Commutative)، فإن المجموعة المصاحبة اليمنى تساوي المجموعة المصاحبة اليسرى.

مبرهنة (1-5-1) [خواص المجموعات المصاحبة] (Gallian, 2012)

إذا كانت H زمرة جزئية من G، $a, b \in G$ فإن:

1) $a \in aH$.
2) $aH = H$ إذا وفقط إذا كان $a \in H$.
3) $aH = bH$ إذا وفقط إذا كان $a \in bH$.
4) $aH = bH$ أو $aH \cap bH = \emptyset$.
5) $|aH| = |bH|$
6) $aH = Ha$ إذا وفقط إذا كان $H = aHa^{-1}$.
7) aH تكون زمرة جزئية من H إذا وفقط إذا كان $a \in H$.

تعريف (2-5-1) (Fraleigh, 2003)

لتكن H زمرة جزئية من G.عدد المجموعات المصاحبة اليسرى (اليمنى) من H في G، يكون دليل (Index) H في G، ويرمز له بالرمز $[G : H]$، وإذا كانت G منتهية، فإن الدليل يكون $[G : H]$ منتهي ويكون على الشكل الآتي:

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

مبرهنة (2-5-1) (لانجرانج) (Dummiit & Foote, 2003)

إذا كانت G زمرة منتهية، $H \leq G$، فإن $|H|$ تقسم $|G|$.

البرهان:

بفرض أن الزمرة G رتبتها n، الزمرة الجزئية H رتبتها k و يريد اثبات أن $k|n$.

لتكن $a_1H\ ,\ a_2H \ldots, a_sH$ تكون مجموعات مصاحبة مختلفة من H في G.

يلاحظ أن s يكون عدد المصاحبات المختلفة.

هذه المصاحبات تكون أزواج منفصلة (Pairwise Disjont)، واتحاد هذه المصاحبات يكون كل الزمرة.

بذلك يكون:

$$|G| = |a_1H| + |a_2H| + \cdots + |a_sH|$$

$$|G| = |H| + |H| \ldots + |H|$$

$$|G| = \underbrace{k + k \ldots + k}_{\text{من المرات } s}$$

$$|G| = ks$$

وهذا يؤدي إلي أن $n = ks$، و منه يستنتج أن k تقسم n. ■

مبرهنة (1-5-3) (Gallian, 2012)

إذا كانت m تقسم رتبة الزمرة المنتهية التبديلية G، فإن الزمرة G لها زمرة جزئية رتبتها m.

مبرهنة (1-5-4) (Dummiit & Foote, 2003)

إذا كانت G زمرة دورية منتهية رتبتها d، $m \in N$ بحيث أن m تقسم $|G|$، فإنه يوجد زمرة جزئية دورية رتبتها m.

نتيجة(1-5-1) (Herstein, 1996)

إذا كانت G زمرة منتهية، $a \in G$، فإن $o(a) || G|$.

نتيجة(1-5-2) (Herstein, 1996)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n، فإن $a^n = e$ لكل $a \in G$.

6-1 الزمرة الجزئية الناظمية و زمرة القسمة

Normal Subgroup and Factor Group

تعريف(1-6-1)(الزمرة الجزئية الناظمية Normal Subgroup) (Gallian, 2012)

الزمرة الجزئية H من الزمرة G، تسمى زمرة جزئية ناظمية من G، إذا كان $\mathrm{aH} = \mathrm{Ha}$ لكل $a \in G$، ويرمز لها بالرمز $H \trianglelefteq G$.

مبرهنة (1-6-1) (Burton, 1972)

الزمرة الجزئية H من الزمرة G، تكون زمرة جزئية ناظمية من G إذا وفقط إذا كان $aHa^{-1} \subseteq H$ لكل $a \in G$.

مبرهنة (2-6-1) (Burton, 1972)

كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون ناظمية.

مبرهنة (3-6-1) (Rotman, 2003)

إذا كانت G زمرة، و كانت $H \leq G$، $[G : H] = 2$ فإن:

1) $g^2 \in H$ لكل $g \in G$.
2) H زمرة جزئية ناظمية من G.

نتيجة (1-6-1) (Hungerford, 2003)

الزمرة A_n تكون زمرة جزئية ناظمية من S_n، وعلاوة على ذلك تكون A_n زمرة جزئية وحيدة من S_n.

مبرهنة (4-6-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G زمرة:

1) إذا كانت $H, K \leq G$ ، كانت K زمرة جزئية ناظمية من G، فإن $HK \leq G$.
2) إذا كانت H و K زمر جزئية ناظمية من G، فإن HK زمرة جزئية ناظمية من G.

تعريف (2-6-1) (الزمرة المترافقة) (Fraleigh, 2003)

الزمرتان الجزئيتان H, K من الزمرة G، تكونان مترافقتان، إذا كان $H = aKa^{-1}$ لبعض $a \in G$.

تعريف (3-6-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا كانت $H \leq G$، فإن منظم H في G (Normalizer of H in G)، يكون المجموعة $N(H) = \{x \in G \ : \ x^{-1}Hx = H\}$.

تزودنا المبرهنة التالية بخصائص المنظم الأساسية .

مبرهنة (5-6-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا كانت $H \leq G$ فإن:

1) $N(H) \leq G$.
2) H زمرة جزئية ناظمية من $N(H)$.
3) H زمرة جزئية ناظمية من G إذا و فقط إذا كان $N(H) = G$.
4) إذا كان H زمرة جزئية ناظمية من K و $K \leq G$، فإن $K \subseteq N(H)$.

أي أن $N(H)$ هي أكبر زمرة جزئية من G بحيث تكون H ناظمية فيها.

تعريف(3-6-1)(زمرة القسمة)(Factor or Quotient Group)) (judson & Stephen , 2013)

إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G، فإن المجموعات المصاحبة من H في G تشكل زمرة G/H تحت العملية $(aH)(bH) = (ab)H$، تسمى زمرة القسمة.

مبرهنة (1-6-6) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G:

1) $G/H = \{aH : a \in G\}$ تكون زمرة بحيث أن $(aH)(bH) = (ab)H$.

2) إذا كانت G تبديلية، فإن G/H زمرة تبديلية.

3) إذا كانت $G = \langle x \rangle$ دورية، فإن $G/H = \langle xH \rangle$ دورية.

4) إذا كانت G زمرة منتهية، فإن $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

مبرهنة (1-6-7) (Gallian, 2012)

إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G، فإن كل زمرة جزئية من زمرة القسمة G/N، تكون على الشكل H/N حيث H تكون زمرة جزئية من G.

تعريف(1-6-4)(الزمرة البسيطة Simple Group) (Fraleigh, 2003)

الزمرة G تكون بسيطة (Simple)، إذا لم يكن لها زمرة جزئية ناظمية فعلية.

والفصل الثاني سيتناول دراسة هذا النوع من الزمر بأكثر تفصيل باستخدام نظرية سيلو.

7-1 التشاكل Homoorphism

تعريف (1-7-1) (التشاكل Homoorphism) (Hungerford, 2003)

الدالة $f:(G,*)\to(\mathrm{H},\circ)$ من الزمرة G إلى الزمرة H تكون تشاكل إذا كانت:
$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ لكل $x,y\in G$.

وإذا كانت $G=H$ و f دالة محايدة، فإن f تسمى التشاكل المحايد.

أنواع خاصة من التشاكل: (سمحان و الذكير ، 2008)

1) التشاكل $f:G\to H$ الذي يكون فيه f دالة أحادية يسمى تشاكل أحادي (Monomorphism).
2) التشاكل $f:G\to H$ الذي يكون فيه f دالة فوقية يسمى تشاكل فوقي (Epimorphism).
3) التشاكل $f:G\to H$ الذي يكون فيه f دالة تقابلية يسمى تماثل (تشاكل تقابلي)(Isomorophism). والزمرتان G,H تكونان متماثلتان (متشاكلتان تقابلياً) (Isomorphic)، إذا كان يوجد بينهما تماثل (تشاكل تقابلي). ويرمز لزمرتين المتماثلتين بالرمز $G\cong H$.
4) التشاكل من الزمرة G إلى نفسها $f:G\to G$ يسمى تشاكل داخلي (Endmorphism). التشاكل الداخلي الذي يكون أيضا تماثل يسمى تشاكل ذاتي (Automorphism). (Hungerford, 2003)

نتيجة (1-7-1)

الزمرتان $(G,*)$ و$(\mathrm{H},\circ)$ تكونان متماثلتان، إذا كانت لهما نفس الصفات البنيوية، ومن أهم الصفات البنيوية للزمرة هي (الزمرة المنتهية، والزمرة الدورية، والزمرة التبديلية، الزمرة لها عنصر من الرتبة n،الزمرة لها k عناصر من الرتبة m، للمعادلة $x^2=a$ حل لكل a في الزمرة).

أي أنه: إذا كان لدينا الزمرتين$(G\ ,*)$ و$(\mathrm{H}\ ,\circ)$ واحداها لها صفة بنيوية معينة، بينما الزمر الأخرى ليس لها هذه الصفة، فإن هاتين الزمرتين غير متماثلتين. ويرمز للزمرتين غير المتماثلتين بالرمز $G \ncong H$.

مثال (1-7-1)

الزمرتان D_6 و Q_6 غير متماثلتان. لأن الزمرة Q_6 لها عنصرين فقط من الرتبة 2، بينما الزمرة D_6 لها ثمانية عناصر من الرتبة 2.

مثال (2-7-1)

الزمر D_6 و Q_6 و A_4 غير متماثلة . لأن الزمرة A_4 لا تحتوي على زمرة جزئية رتبتها 6، وبالتالي فإنها لا تحتوي على عنصر رتبته 6. وبينما الزمرتان D_6 و Q_6 تحتوي على عنصر رتبته 6.

مبرهنة (1-7-1) (judson & Stephen , 2013)

إذا كانت $f : G \to H$ تماثل من الزمرة G إلى الزمرة H، فإن الخواص الآتية تكون صحيحة:

1) $f^{-1} : H \to G$ يكون تماثل.
2) إذا كانت الزمرة G تبديلية، فإن الزمرة H تبديلية.
3) إذا كانت الزمرة G دورية، فإن الزمرة H دورية.
4) إذا كانت الزمرة G رتبتها n، فإن الزمرة H رتبتها n.

تعريف (2-7-1) (مدى التشاكل) (Axler & Ribeb , 2007)

لتكن $f : G \to G`$ تشاكل زمري. مدى التشاكل f (Image or Range of f) يكون المجموعة $Image(f) = \{f(x) \ : \ x \in G\}$، ويرمز لمدى التشاكل بالرمز $Im(f)$.

مبرهنة (1-7-2) (Gallian, 2012)

إذا كانت $f : G \to G`$ تشاكل زمري، فإن $Im(f)$ يكون زمرة جزئية من G.

مبرهنة (1-7-3) (Fraleigh, 2003)

لتكن f تشاكل من الزمرة G إلي الزمرة $G´$. إذا كان e العنصر المحايد في الزمرة G، فإن $f(e)$ يكون المحايد في الزمرة $G´$. وإذا كان $a \in G$، فإن $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. وإذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة G، فإن $f(H)$ تكون زمرة جزئية من G'. وإذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G، فإن $f(H)$ تكون زمرة جزئية ناظمية من G'. وإذا كانت K' زمرة جزئية من G'، فإن $f^{-1}(K')$ تكون زمرة جزئية من الزمرة G. وإذا كانت K' زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G'، فإن $f^{-1}(K')$ تكون زمرة جزئية ناطمية من الزمرة G. وبعبارة أخرى الزمرة الجزئية تقابل زمرة جزئية، والزمرة الجزئية الناظمية تقابل زمرة جزئية ناظمية.

مبرهنة (1-7-4) (سمحان و الذكير ، 2008)

لتكن G زمرة دورية:

1) إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n، فإن $G \cong \mathbb{Z}_n$.
2) إذا كانت G زمرة غير منتهية، فإن $G \cong \mathbb{Z}$.

مبرهنة (1-7-5) (Axler & Ribeb , 2007)

أي زمرتين دوريتين من الرتبة n تكون متماثلات.

مبرهنة (1-7-6) (Dummiit & Foote, 2003)

إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G، فإن الدالة الطبيعية $f : G \to G/H$ المعرفة بالقاعدة $f(a) = aH$ لكل $a \in G$ تكون تشاكل.

تعريف (1-7-3) (نواة التشاكل) (Axler & Ribeb , 2007)

لتكن $f : G \to G^{`}$ تشاكل زمري. نواة التشاكل $f$ (Kernel of $f$)، تكون المجموعة $\text{Kernel of } f = \{x \in G : f(x) = e \in G^{`}\}$، ويرمز لنواة التشاكل بالرمز $Ker(f)$.

مبرهنة (1-7-7) (Gallian, 2012)

إذا كانت $f : G \to G^{`}$ تشاكل زمري، فإن $Ker(f)$ تكون زمرة جزئية ناظمية من G.

مبرهنة (1-7-8) (Fraleigh, 2003)

التشاكل الزمري $f : G \to G^{`}$ يكون دالة أحادية إذا وفقط إذا كان $Ker(f) = e$.

مبرهنة (1-7-9) (Fraleigh, 2003)

الزمرة $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ تكون دورية و متماثلة مع $\mathbb{Z}_{mn}$ إذا وفقط إذا كان n , m أعداد أولية نسبيا.

مبرهنة (1-7-10) (المبرهنة الأساسية للزمر المنتهية التبديلية) (Fraleigh, 2003)

كل زمرة منتهية تبديلية G، تكون متماثلة مع الضرب المباشر من الزمر الدورية التي على الشكل الآتي:

$$Z_{(P_1)^{r_1}} \times Z_{(P_2)^{r_2}} \times \dots \dots \dots \times Z_{(P_m)^{r_m}} \times Z \times Z \times Z$$

حيث P_i أعداد أولية ليس من الضروري أن تكون مختلفة، r_i أعداد صحيحة موجبة.

مبرهنة (1-7-11) (Axler & Ribeb , 2007)

الزمرة G تكون متماثلة مع الضرب المباشر $G_1 \times G_2$ من الزمرتين G_1 و G_2 إذا وفقط إذا كانت الزمرة G تحتوي على زمرتين جزئيتين ناظميتين A و B بحيث أن $A \cong G_1$، $B \cong G_2$، $A \cap B = \{e\}$، $AB = G$.

مبرهنة (1-7-12) (مبرهنة التماثل الأولى) (Hungerford, 2003)

إذا كانت $f : G \to H$ تشاكل زمري، فإن $G/Ker(f) \cong Im(f)$.

مبرهنة (1-7-13) (مبرهنة التماثل الثانية) (Hungerford, 2003)

إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة G، وN زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G، فإن $H/(H \cap N) \cong HN/N$.

مبرهنة (1-7-14) (مبرهنة التماثل الثالثة) (Hungerford, 2003)

إذا كانت M و N زمرتين جزئيتين ناظميتين من الزمرة G، وبفرض أن $N < M$، فإن $(G/N) \trianglelefteq (M/N)$، $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

8-1 تأثير الزمرة على المجموعة و فصول الترافق

Group Action on Set and Conjugacy Classes

العديد من المسائل في الزمر تكون أفضل طريقة في حلها عن طريق تأثير الزمر، سنستخدم تأثير الزمرة على المجموعة في إثبات نظرية سيلو، كما أنه من الممكن استخدام مفهوم تأثير زمرة على المجموعة في تصنيف الزمر.

تعريف(1-8-1)(تأثير الزمرة على المجموعة Group Action on Set) (judson & Stephen , 2013)

لتكن X مجموعة و G زمرة. التأثير الأيسر للزمرة G على X، هو دالة $G \times X \to X$ المعرفة بواسطة $(g,x) \to gx$ حيث أن:

1) $ex = x$ لكل $x \in X$.

2) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ لكل $x \in X$، $g_1, g_2 \in G$.

من الممكن تعريف التأثير الأيمن بصورة مماثلة:

لتكن X مجموعة و G زمرة. التأثير الأيمن من G على X هو دالة $X \times G \to X$ المعرفة بواسطة $(x,g) \to xg$ حيث أن:

1) $xe = x$ لكل $x \in X$.

2) $x(g_1 g_2) = (xg_1)g_2$ لكل $x \in X$، $g_1, g_2 \in G$.

ملاحظة : إذا كان لدينا تأثير (أيمن أو أيسر) للزمرة G على X، فإن الزمرة G تؤثر على المجموعة X.

مبرهنة (1-8-1) (judson & Stephen , 2013)

لتكن G زمرة. إذا كانت H زمرة جزئية من G، فإن G تؤثر على H بواسطة الترافق.

البرهان

يمكن تعريف تأثير H على G على النحو التالي : $H \times G \rightarrow G$ المعرف بالقاعدة الآتية:

$$g \in G \ , \quad h \in H \text{ لكل } (h\,, g) \rightarrow hgh^{-1}$$

من الواضح أن:

$$. \ g \in G \text{ لكل } \quad (e\,, g) = ege^{-1} = g$$

وهذا يوضح أن الشرط الأول لتأثير الزمرة على المجموعة متحقق.

بما أن H زمرة جزئية من G فإن $h_1 h_2 \in H$ لكل $h_1, h_2 \in H$

الآن:

$$\begin{aligned}(h_1 h_2, g) &= h_1 h_2 g (h_1 h_2)^{-1} \\ &= h_1 h_2 g {h_2}^{-1} {h_1}^{-1}\end{aligned}$$

$$(h_1 h_2, g) = h_1 (h_2, g) {h_1}^{-1}$$

$$(h_1 h_2, g) = \big(h_1, (h_2, g)\big)$$

وهذا يوضح أن الشرط الثاني لتأثير الزمرة على المجموعة متحقق، وبالتالي الزمرة G تؤثر على الزمرة الجزئية H بواسطة الترافق. ■

تعريف (1-8-2) (المسار (**Orbet**)) (Idelhaj, 2016)

مسار النقطة $X \ni x$ هو مجموعة النقاط التي تنتقل x بواسطة تأثير G، ويرمز لمسار النقطة بالرمز $Orb(x)$

$$Orb(x) = \{gx:\ g \in G\}$$

تعريف (1-8-3) (النقطة المثبتة (**Fixed Point**)) (Idelhaj, 2016)

مجموعة النقاط المثبتة بواسطة العنصر $x \in X$ ، الذي يرمز لها بالرمز G_x، تكون المجموعة:

$$G_x = \{g \in G \ :\ gx = x\}$$

مبرهنة (1-8-2) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت G زمرة تؤثر على المجموعة X، فإن G_x تكون زمرة جزئية من G.

تعريف (1-8-4) (Fraleigh, 2003)

لتكن G زمرة تؤثر على المجموعة X .وإذا كانت $x \in X$، فإن الزمرة الجزئية G_x تسمى زمرة موحدة الخواص (Istoropy Subgroup).

مبرهنة (1-8-3) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت الزمرة G تؤثر على المجموعة X، فإن $|Orb(x)| = [G \ :\ G_x]$. وإذا كانت G زمرة منتهية، فإن $|Orb(x)|$ تقسم $|G|$.

تعريف(5-8-1) (سمحان و الذكير ، 2008)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة X وكان $x \in X$، فإن x مثبتة بالعنصر $g \in G$ (x Fixed by g)، إذا كان $gx = x$، ويرمز لها بالرمز X_g أي أن:

$$X_g = \{x \in X : gx = x\}$$

إذا كان x مثبتا بجميع عناصر G، فإن x مثبتة بالزمرة G (x Fixed by G) ويرمز لها بالرمز X_G أي أن:

$$X_G = \{x \in X : gx = x \ , \forall \ g \in G \ \}$$

مبرهنة (4-8-1) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت G زمرة رتبتها p^n حيث p عدد أولي، و G تؤثر على المجموعة المنتهية X، فإن $|X| \equiv |X_G| (mod\ p)$.

مبرهنة (5-8-1) (Stearns, 2015)

إذا كانت H زمرة جزئية من G، الزمرة G تؤثر على المجموعات المصاحبة اليسرى من H ولتكن $A = aH$، بواسطة الضرب اليساري، فإن $Ker(f)$ الناتجة من التشاكل $f : G \ \to S_A$، تكون محتواه في H.

تعريف(6-8-1)(فصل الترافق a (Conjugacy Class of a)) (Gallian, 2012)

ليكن a , b عنصرين في الزمرة G. العنصرين a , b يكونان مترافقان في الزمرة G (يسمى b مرافق a)، إذا كان $xax^{-1} = b$ لبعض $x \in G$، وفصل الترافق a يكون المجموعة:

$$Cl(a) = \{xax^{-1} \ : \ x \in G\}$$

يرمز لعدد فصول الترافق للعنصر a بالرمز $|Cl(a)|$.

نتيجة(1-8-1) (Hungerford, 1990)

فصل الترافق a يكون تافه ($xax^{-1} = a$ لكل $x \in G$) إذا وفقط إذا كان $a \in Z(G)$.

مبرهنة (6-8-1) (Herstein, 1996)

إذا كانت G زمرة منتهية و$a \in G$، فإن عدد فصول الترافق المختلفة للعنصر a في G هو دليل من $C(a)$ في G.

وبعبارة أخرى:

$$|Cl(a)| = [G : C(a)] = \frac{|G|}{|C(a)|}$$

نتيجة (2-8-1) (Gallian, 2012)

إذا كانت G زمرة منتهية و $a \in G$،فإن $|Cl(a)|$ تقسم $|G|$.

مبرهنة(7-8-1)(معادلة الفصول The Class Equation) (Axler & Ribeb , 2007)

إذا كانت G زمرة منتهية فإن:

$$|G| = \sum |Cl(a)| = |Z(G)| + \sum_{|Cl(a)|>1} |Cl(a)|$$

تطبيق هذه النظرية مفيد في إثبات المبرهنات عن الزمر التي رتبتها p^n حيث p عدد أولي.

وسيأتي تعريف هذه الزمر في الفصل الثاني.

الفصل الثانـي

نظريات سيلو وبعض تطبيقاتـها

SYLOW THEORIES AND SOME APPLICATIONS

إذا أخذ في الاعتبار أي زمرة، فإن الشيء الأول الذي ينبغي فهمه عن الزمرة G لكي يتم تصنيفها، هو استخراج الزمر الجزئية H، وما إذا كانت H زمرة ناظمية و بذلك يمكن على زمرة القسمة، فنظريات سيلو جاءت لتعمل على اكتشاف الزمر الجزئية من زمرة معطاة في حالات خاصة، وهي إذا كانت p^k تقسم $|G|$ حيث p عدد أولي، k عدد صحيح موجب، فإن الزمرة G لها زمرة جزئية رتبتها p^k، وهذه النظرية لها دور في تصنيف الزمر المنتهية، و تفكيك الزمر التي رتبتها كبيرة إلى زمر جزئية رتبتها أصغر، وبالتالي يمكن التعامل مع هذه الزمر بأكثر سهولة.

2-1 بعض التعاريف و المبرهنات التي تستخدم في إثبات نظريات سيلووتطبيقاتها.

ملاحظة: يقصد بالرمز p عدد أولي في هذا الفصل.

تعريف (2-1-1)(الزمرة من نوع p) ($(p-\text{Group})$) (judson & Stephen , 2013)

الزمرة G تكون زمرة من نوع p إذا كان كل عنصر في الزمرة G رتبته قوة للعدد p، حيث p عدد أولي.

تعريف (2-1-2)(الزمرة الجزئية من نوع p) ($(p-\text{Subgroup})$) (judson & Stephen , 2013)

الزمرة الجزئية من الزمرة G تسمى زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G إذا كانت هذه الزمرة الجزئية هي نفسها زمرة من نوع p.

مبرهنة (2-1-1) (مبرهنة كوشي) (judson & Stephen , 2013)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n، p عدد أولي يقسم رتبة الزمرة G، فإن الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p.

البرهان

سنبرهن باستخدام طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي على رتبة الزمرة G.

إذا كانت $|G|=1$ هذا يعني أن $G=\{e\}$، $p=1$ واضح أن G لها زمرة جزئية وهي نفسها.

إذا كانت $|G| = 2$، فإن $p = 1$، $p = 2$ واضح أن G لها زمرة جزئية وهي نفسها أو الزمرة المحايدة.

إذا كانت $|G| = p$ ، فإن G لها عنصر رتبته p وهذا يعني أن G لها زمرة جزئية رتبتها p.

وبفرض أن العبارة صحيحة لكل K حيث $p \leq K \leq n$ (أي أن كل زمرة رتبتها K بحيث p يقسم K لها عنصر رتبته p).

بما أن معادلة الفصول تكون:

$$|G| = |Z(G)| + [G: C(x_1)] + \left[G: C(x_2) + \cdots + [G: C(x_k)]\right]$$

هناك حالتين:

الحالة الأولى: بفرض أن رتبة احدى الزمر الجزئية $C(x_i)$ Centeralizer تكون قابلة القسمة على p لبعض i ، حيث $i = 1, 2, \dots \dots, k$.

في هذه الحالة من الفرض الاستقرائي الزمرة الجزئية $C(x_i)$ لها عنصر رتبته p، بما أن $C(x_i)$ زمرة جزئية فعلية من الزمرة G، إذن الزمرة G يجب أن تحتوي على عنصر رتبته p، وبالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p.

الحالة الثانية: بفرض أن رتبة كل الزمر الجزئية $C(x_i)$ لا تقبل القسمة على p لكل i، هذا يؤدي إلى أن p تقسم $[G: C(x_i)]$، إذن p يجب أن تقسم مركز الزمرة G، وبما أن $Z(G)$ زمرة تبديلية، وبالتالي $Z(G)$ يجب أن تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p (من مبرهنة (1-5-3)))، هذا يؤدي إلى أن مركز الزمرة G يحتوي على عنصر رتبته p، بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية فعلية من الزمرة G، إذن الزمرة G تحتوي على عنصر رتبته p، وبالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p. ■

نتيجة (2-1-1) (Fraleigh, 2002)

إذا كانت G زمرة منتهية، فإن الزمرة G تكون زمرة من نوع p إذا وفقط إذا كان $|G| = p^n$.

البرهان

بفرض أن الزمرة G تكون زمرة من نوع p، وqعدد أولي بحيث $p \neq q$ ويقسم $|G|$.

من المعلوم مبرهنة كوشي أن G تحتوي على عنصر رتبته q، وهذا يناقض كوِن أن G زمرة من نوع p ، بالتالي p هو القاسم الأولي الوحيد لرتبة الزمرة G وهذا يؤدي إلى أن $|G| = p^n$.

العكس : بفرض أن $|G| = p^n$، من نتائج مبرهنة لانجرانج رتبة كل عنصر في الزمرة يقسم رتبة الزمرة، وبالتالي يستنتج أن كل عنصر في الزمرة G رتبته قوة للعدد p، ومنه يستنتج أن G زمرة من نوع p. ■

مبرهنة (2-1-2) (Fraleigh, 2002)

إذا كانت G زمرة منتهية غير تافهة من نوع p، فإن G لها مركز غير تافه.

البرهان

بفرض أن G زمرة من نوع p تؤثر على نفسها بالترافق، فإن:

$$G_G = \{g \in G : xgx^{-1} = g \quad \forall \ x \in G\}$$

$$= \{g \in G : xg = gx \quad \forall \ x \in G \} = Z(G)$$

الآن بما أن G زمرة من نوع p، فإن $|G| = p^r$ لكل $r \geq 1$.

بما أن $|G| \equiv |G_G| (mod\ p)$ هذا يؤدي إلى أن p تقسم $|G_G|$، وبالتالي p تقسم $|Z(G)|$، هذا يؤدي إلي أن $Z(G)$ غير تافه. ■

مثال (2-1-1)

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12 = 2^2.3$، من مبرهنة كوشي الزمرة A_4 لها زمر جزئية من الرتب 2 ، 3.

فنظريات سيلو تعطي معلومات أكثر عن الزمر الجزئية من الزمرة A_4.

مبرهنة (2-1-3) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت H زمرة جزئية من نوع p من الزمرة المنتهية G، فإن $[N(H) : H] \equiv [G : H](mod\, p)$.

البرهان

بفرض أن ρ تكون مجموعات المصاحبة اليسرى من H في G، وبفرض أن H توثر على ρ بواسطة تحويل اليساري (Lefet Translation) كالتالي $h(xH) = (hx)H$، وبما أن $|\rho| = [G: H]$، و ρ_H هي المجموعات المصاحبة اليسرى التي تكون ثابتة تحت تأثير كل العناصر من H أي أن:

$$\rho_H = \{xH: hxH = xH\}$$

الآن $xH = h(xH)$ إذا وفقط إذا كان $H = x^{-1}h(xH)$ أو إذا وفقط إذا كان $x^{-1}hx \in H$، بالتالي $xH = h(xH)$ لكل $h \in H$ إذا وفقط إذا كان $x^{-1}hx = x^{-1}h(x^{-1})^{-1} \in H$ أو إذا وفقط إذا كان $x^{-1} \in N(H)$ أو إذا وفقط إذا كان $x \in N(H)$. إذن مجموعات المصاحبة اليسرى في ρ_H تكون محتواه في $N(H)$، وعدد هذه مجموعات المصاحبة تكون $[N(H) : H]$ ولهذا عليه $|\rho_H| = [N(H) : H]$. بما أن H زمرة من نوع p رتبتها قوة للعدد p، ومن المبرهنة (1-8 -4) يكون $|\rho| \equiv |\rho_H|\ (mod\, p)$ وبالتالي:

$$[G : H] \equiv [N(H) : H]\ (mod\, p) \qquad \blacksquare$$

نتيجة (2-1-2) (Fraleigh, 2003)

لتكن H زمرة جزئية من نوع p من الزمرة المنتهية G. وإذا كانت p تقسم $[G : H]$، فإن $N(H) \neq H$.

البرهان

بما أن p تقسم $[G : H]$ من المبرهنة السابقة p تقسم $[N(H) : H]$ التي يجب أن تكون مختلف عن 1 بالتالي $N(H) \neq H$. ■

المبرهنتين التاليتين لا تستخدم في إثبات نظريات سيلو ولكن تستخدم مع نظريات سيلو في تصنيف الزمر المنتهية.

مبرهنه (4-1-2) (Stearns, 2015)

كل زمرة G رتبتها p^2 تكون تبديلية، حيث p عدد أولي.

البرهان

بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية من G، ومن مبرهنة لانجرانج $|Z(G)|\,|\,|G|$، هذا يؤدي إلي أن $|Z(G)| = 1$ أو $|Z(G)| = p$ أو $|Z(G)| = p^2$، ومن المبرهنة (2-1-2) يتبين أن $|Z(G)| \neq 1$.

إذا كانت $|Z(G)| = p^2$، فإن $|Z(G)| = |G|$، إذن G زمرة تبديلية وبهذا يكون قد اكتمل البرهان.

وإذا كانت $|Z(G)| = p$، فإنه يمكن أن يحصل على زمرة القسمة $\mathrm{G}/Z(G)$ رتبتها p، وبالتالي فهي دورية وتماثل الزمرة Z_p، بما أن $\mathrm{G}/Z(G)$ زمرة دورية، فإنه يوجد مولد على الشكل $gZ(G)$ حيث $g \in G$، وكل المصاحبات في الزمرة $\mathrm{G}/Z(G)$ تكون على الشكل $(gZ(G))^k = g^kZ(G)$ لبعض $k \in N$.

الآن بفرض أن $a , b \in G$، بما أن $a \in g^i Z(G)$ لبعض $i \in N \cup \{0\}$، إذن يوجد $c_1 \in Z(G)$ بحيث $a = g^i c_1$. وبالمثل يمكن تمثيل العنصر b، $b \in g^j Z(G)$ لبعض $j \in N$، إذن يوجد $c_2 \in Z(G)$ بحيث $b = g^j c_2$.

الآن:

$$g^i g^j = g^{i+j} = g^{j+i} = g^j g^i$$

وبما أن $c_1, c_2 \in Z(G)$ بالتالي c_2 , c_1 تكون متبادلة مع جميع العناصر في الزمرة G ولهذا عليه:

$$ab = g^i c_1 g^j c_2 = g^j g^i c_1 c_2 = g^j c_2 g^i c_1 = ba$$

بما أن b , a عناصر اختياريه في الزمرة G، إذن هذا يوضح أن G زمرة تبديلية. ■

مبرهنة (2-3-4) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت K, H زمرتين جزئيتين منتهيتين من الزمرة G فإن:

$$|HK| = \frac{(|H|)(|K|)}{|H \cap K|}$$

البرهان

بما أن: $HK = \{hk : h \in H , k \in K\}$

بفرض أن $|H| = r , |K| = s \;, \; |H \cap K| = t$، أي أن HK لها على الأكثر rs من العناصر.

من المحتمل أن تكون $h_1 k_1$ تساوي $h_2 k_2$ بحيث $k_1 , k_2 \in K, h_1, h_2 \in H$، وبالتالي قد تكون هناك بعض العناصر المتكررة.

إذا كان $h_1 k_1 = h_2 k_2$، وليكن $x = (h_2)^{-1} h_1 = k_2 (k_1)^{-1}$،

بما أن $x = (h_2)^{-1}h_1$، فإن $x \in H$. $x = k_2(k_1)^{-1}$، فإن $x \in K$ وهذا يؤدي إلى أن $x \in H \cap K$. ومن الناحية الأخرى إذا كان $y \in H \cap K$، بفرض أن $h_3 = h_1y^{-1} \ \ , \ k_3 = yk_1$ وبالتالي $h_3k_3 = h_1y^{-1}yk_1 = h_1k_1$ بحيث

$h_3 \in H \ , \ k_3 \in K$، وبالتالي كل عنصر $hk \in HK$ يمكن أن يمثل على صورة h_ik_i بحيث $h_i \in H \ , \ k_i \in K$ بنفس عدد العناصر الموجودة في $H \cap K$ أي t من المرات و بالتالي عدد العناصر في HK تكون rs/t. ■

ملاحظة: المبرهنة السابقة تزود بطريقة حسابية أن الزمرة المنتهية G، لا يمكن أن تحتوي على زمر جزئية H, K كبيرة جدا وتقاطعهما صغير جدا أو رتبة HK تتجاوز رتبة الزمرة G. **فمثلا:** زمرة رتبتها 24 لا يمكن أن تحتوي على زمر جزئية رتبتها 8 , 12 و تقاطعهم رتبته 2.

تعريف(2-1-3)(زمرة سيلو الجزئية من نوع p (Sylow p − Subgroup)) (Gallian, 2012)

لتكن G زمرة منتهية وp عدد أولي يقسم $|G|$. إذا كانت p^k تقسم $|G|$ و p^{k+1} لا تقسم $|G|$، فإن أي زمرة جزئية من G رتبتها p^k تسمى زمرة سيلو الجزئية من نوع p.

ملاحظة : زمرة سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G، تكون أكبر زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G.

مبرهنة (2-1-5) (Stearns, 2015)

إذا كانت G زمرة و K زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G، فإن لكل $g \in G$ الترافق gKg^{-1} من K، يكون كذلك زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G.

البرهان

بفرض أن K زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G، gKg^{-1} مترافقة من K بما أن $|K| = |gKg^{-1}|$. سوف يبرهن أولا أن gKg^{-1} زمرة جزئية من G، بما أن $geg^{-1} = e$ إذن $e \in gKg^{-1}$.

الآن بفرض أن $a, b \in gKg^{-1}$ إذن يوجد $k_2, k_1 \in K$ بحيث أن $a = gk_1g^{-1}$ ، $b = gk_2g^{-1}$ وبالتالي:

$$ab = gk_1g^{-1}gk_2g^{-1} = gk_1k_2g^{-1}$$

بما أن $k_2, k_1 \in K$ هذا يؤدي إلي أن $gk_1k_2g^{-1} \in gKg^{-1}$ وبالتالي $ab \in gKg^{-1}$ وهذا يوضح أن gKg^{-1} زمرة جزئية من G.

ثانيا : يبرهن أن gKg^{-1} زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G.

بفرض أن $b \in gKg^{-1}$ هذا يعني أن $b = gkg^{-1}$ لبعض $k \in K$، بما أن $k \in K$ بالتالي $ord(k)$ تكون قوة للعدد p أي أن $|k| = p^r$ لبعض $r \in N$.

الآن:

$$b^{p^r} = (gkg^{-1})^{p^r} = g\,k^{p^r}g^{-1} = geg^{-1} = gg^{-1} = e$$

إذن $|b| = p^r$ بما أن $b \in gKg^{-1}$ عنصر اختياري إذن كل عنصر في الزمرة gKg^{-1} رتبته قوة للعدد p، هذا يؤدي إلى أن gKg^{-1} زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G.

أخيراً: يبرهن أن gKg^{-1} أكبر زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G.

بفرض أن H تكون زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G بحيث أن $gKg^{-1} \subseteq H$، بما أن H زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G، فإن gHg^{-1} زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G وبالتالي يكون $g^{-1}Hg = g^{-1}H(g^{-1})^{-1}$، إذن $g^{-1}Hg$ زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G، الآن بفرض أن $h \in H$ بحيث أن $h \notin gKg^{-1}$ إذن $|H| > |gKg^{-1}|$، ولكن هذا يؤدي إلى أن $K \subseteq g^{-1}Hg$ و $|g^{-1}Hg| > |K|$، وهذا يناقض كوِن أن K زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G، وبالتالي $H = gKg^{-1}$. إذن gKg^{-1} تكون أكبر زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G، وهذا يؤدي إلى أن gKg^{-1} تكون زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G، وهذا يوضح أن الترافق من K يكون زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G.■

2-2 نظريات سيلو **Sylow Theorems**

مبرهنة (2-2-1) (نظرية سيلو الأولى) (Gallian, 2012; judson & Stephen , 2013)

إذا كانت G زمرة منتهية، p عدد أولي و k عدد صحيح موجب و p^k تقسم $|G|$، فإن الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p^k.

البرهان

في هذا البرهان سنستخدم طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي على رتبة الزمرة G.

إذا كانت $|G| = 1$، فإن $G = \{e\}$ ، $p = 1$ ، $k = 1$ واضح أن G لها زمرة جزئية رتبتها 1 وهي نفسها.

إذا كانت $|G| = 2$، فإن هناك حالتين:

1) $p = 1$ ، $k = 1$ ، واضح أن G لها زمرة جزئية رتبتها 1 وهي الزمرة المحايدة (التافهة).
2) $p = 2$ ، $k = 1$، واضح أن G لها زمرة جزئية رتبتها 2 وهي الزمرة نفسها.

وبالتالي المبرهنة صحيحة في الحالات البسيطة (وهي تافهة).

بفرض أن المبرهنة تكون صحيحة لكل الزمر التي رتبتها أقل من $|G|$.

إذا كانت الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية فعلية ولتكن H، بحيث p^k تقسم $|H|$ وبالتالي من الفرض الأستقرائي، أن الزمرة H تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p^k.

الآن فصاعدا أخذ في الإعتبار أن p^k لا تقسم رتبة أي زمرة جزئية فعلية من G.

بما أن معادلة الفصول تكون على الشكل الآتي:

$$|G| = |Z(G)| + \sum [G : C(a)]$$

حيث الجمع يمثل كل فصول الترافق ل a بحيث $a \notin Z(G)$. بما أن p^k تقسم $|G|$، $|G| = [G : C(a)].|C(a)|$، ومن الفرض أن p^k لا تقسم $|C(a)|$ ، وبما أن p تقسم $[G : C(a)]$ لكل $a \notin Z(G)$، وبالتالي من معادلة الفصول p يجب أن تقسم $|Z(G)|$، ومن مبرهنة كوشي الزمرة $Z(G)$ تحتوي على عنصر رتبته p وليكن x.

الآن بفرض أن N تكون زمرة مولدة بالعنصر x، بما أن الزمرة $Z(G)$ تبديلية، فإن الزمرة N تكون زمرة جزئية ناظمية من $Z(G)$، وبالتالي N تكون زمرة جزئية ناظمية من G لأن كل عنصر في $Z(G)$ يكون تبديلي مع كل العناصر في الزمرة G.

الآن سيتم دراسة زمرة القسمة G/N من الرتبة $|G|/p$، من الفرض الأستقرائي الزمرة G/N تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p^{k-1}، ومن المبرهنة (1-6-7) هذه الزمرة الجزئية تكون على الشكل H/N، حيث H تكون زمرة جزئية من G، بما أن $|H/N| = p^{k-1}$ و $|N| = p$، وهذا يؤدي إلى أن $|H| = p^k$. ■

مبرهنة (2-2-2) (نظرية سيلو الثانية) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت G زمرة منتهية و p عدد أولي يقسم $|G|$، فإن كل زمر سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G تكون مترافقة.

بعبارة أخرى:

إذا كانت H_1 , H_2 زمرتين سيلو جزئية من نوع p، فإنه يوجد $g \in G$ بحيث $H_1 = gH_2g^{-1}$.

البرهان

بفرض أن H_1 , H_2 زمرتين سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G، بفرض أيضاً أن احدى الزمر سيلو الجزئية تؤثر على المجموعات المصاحبة للزمر الجزئية الأخرى.

بفرض أن ρ تجمع من المجموعات المصاحبة اليسرى من H_1، ولتكن H_2 تؤثر على ρ أي أن $h_2(xH_1) = (h_2x)H_1$ لكل $h_2 \in H_2$، من المبرهنة (1-8-4) $|\rho_{H_2}| \equiv |\rho| \, (mod\, p\,)$، وبما أن $|\rho| = [G : H_1]$ لا تقسم p ولهذا $|\rho_{H_2}| \neq 0$، بفرض أن $xH_1 \in \rho_{H_2}$ هذا يؤدي إلى أن $h_2xH_1 = xH_1$ لكل $h_2 \in H_2$، وبالتالي $x^{-1}h_2xH_1 = H_1$ لكل $h_2 \in H_2$، إذن $x^{-1}h_2x \in H_1$ لكل $h_2 \in H_2$ هذا يؤدي إلى أن $x^{-1}H_2x \leq H_1$، بما أن $|H_1| = |H_2|$ فإن $H_1 = x^{-1}H_2x$.

وهذا يوضح أن كل زمر سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G تكون مترافقة. ■

أما عن جواب السؤال : كم عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p؟ تُجيب عنه نظرية سيلو الثالثة.

مبرهنه (2-2-3) (نظرية سيلو الثالثة) (Fraleigh, 2003)

إذا كانت G زمرة منتهية، p عدد أولي يقسم $|G|$، فإن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p توافق 1 بمقياس p وتقسم $|G|$.

بعبارة أخرى :

إذا كانت n_p عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G فإن:

$n_p \equiv 1(\, mod\; p)$ أو يمكن التعبير عنها $n_p = 1 + kp$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$، n_p تقسم $|G|$.

البرهان

بفرض أن H تكون احدى زمر سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G، و ρ تكون مجموعة كل الزمر سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G، و H تؤثر على ρ بالترافق، وبالتالي $x \in H$ تنقل $K \in \rho$ إلي xKx^{-1}، بما أن $(mod\; p)$ $|\rho| \equiv |\rho_H|$.

بفرض أن $K \in \rho_H$ هذا يؤدي إلى أن $xKx^{-1} = K$ لكل $x \in H$ إذن $H \leq N(K)$. وبما أن $K \leq N(K)$ ، و H , K كلاهما زمر سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G، فإن H , K كلاهما زمر سيلو جزئية من نوع p من الزمرة $N(K)$.
من نظرية سيلو الثانية الزمرتين H , K مترافقتين في $N(K)$، وبما أن K زمرة جزئية ناظمية من $N(K)$، فإن K تكون الزمرة الوحيدة المترافقة في $N(K)$، بالتالي $H = K$ وهذا يؤدي إلى أن $\rho_H = \{H\}$ و بما أن $|\rho| \equiv |\rho_H| \ (mod\ p)$ وهذا يوضح أن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p تكون توافق 1 بقياس p، أي أن $n_p \equiv 1(\ mod\ p)$.

الآن بفرض أن الزمرة G تؤثر على ρ بالترافق، بما أن كل زمر سيلو من نوع p تكون مترافقة فإنه يوجد مسار واحد فقط في ρ تحت G. إذا كانت $H \in \rho$، فإنه من المبرهنة (3-8-1) $|\rho| = |Orb(H)| = [G : G_H]$، ولكن $[G : G_H]$ تقسم $|G|$، إذن هذا يوضح أن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p تقسم $|G|$. ■

وفيما يلي سيتم تطبيق نظرية سيلو في توضح بعض الأمثلة.

مثال (2-2-1)

لتكن G زمرة رتبتها 24. من نظرية سيلو الأولى الزمرة G لها زمر جزئية من الرتب 2^2 , 2^3 , 3 . ولها زمرة سيلو الجزئية من نوع 2 رتبتها 8، وزمرة سيلو من نوع 3 رتبتها 3.

أما نظرية سيلو الثالثة تعطي معلومات عن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p.

بما أن $|G| = 24$ و $24 = 2^3.3$ وبالتالي $p = 2$ و $p = 3$.

أولا: عندما $p = 2$، فإن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع 2 يمكن إيجادها كالتالي:

تستخدم المعادلة $n_2 = 1 + 2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

عندما $k = 0$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 1$، 1 تقسم 24.

عندما $k = 1$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 3$، 3 تقسم 24.

عندما $k = 2$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 5$، 5 لا تقسم 24.

عندما $k = 3$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 7$، 7 لا تقسم 24.

عندما $k = 4$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 9$، 9 لا تقسم 24.

وهكذا بنفس الطريقة:

$$n_2 = 1, 3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25, \dots$$

و n_2 يجب أن تقسم 24 وبالتالي $n_2 = 1$ ، $n_2 = 3$ ، إذن يوجد 3 زمر سيلو الجزئية من نوع 2.

ثانيا: عندما $p = 3$، فإن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع 3 يمكن إيجادها كالتالي:

يستخدم المعادلة $n_3 = 1 + 3k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

عندما $k = 0$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 1$، 1 تقسم 24.

عندما $k = 1$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 4$، 4 تقسم 24.

عندما $k = 2$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 7$، 7 لا تقسم 24.

عندما $k = 3$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 10$، 10 لا تقسم 24.

عندما $k = 4$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 13$، 13 لا تقسم 24.

وهكذا بنفس الطريقة:

$$n_3 = 1,4,7,13,16,19,22,25, \dots$$

و n_3 يجب أن تقسم 24 وبالتالي $n_3 = 1 , 4$، إذن توجد 4 زمر سيلو الجزئية من نوع 3. ■

مثال (2-2-2)

لتكن G زمرة رتبتها 12. من نظرية سيلو الأولى الزمرة G لها زمر جزئية من الرتب 4 , 3 , 2 . ولها زمر سيلو جزئية من نوع 2 رتبتها 4، وزمر سيلو جزئية من نوع 3 رتبتها 3.

أما نظرية سيلو الثالثة تعطي معلومات عن عدد زمر سيلو الجزئية من p.

بما أن $p = 2$ و $p = 3$.

أولا: عندما $p = 2$، فإن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع 2 يمكن إيجادها كالتالي :

نستخدم المعادلة $n_2 = 1 + 2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

عندما $k = 0$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 1$، تقسم 12.

عندما $k = 1$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 3$، 3 تقسم 12.

عندما $k = 2$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 5$، 5 لا تقسم 12.

عندما $k = 3$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 7$، 7 لا تقسم 12.

عندما $k = 4$ هذا يؤدي إلى أن $n_2 = 9$، 9 لا تقسم 12.

وهكذا بنفس الطريقة:

$$n_2 = 1, 3,5,7,9,11 \ldots$$

وn_2 يجب أن تقسم 12 وبالتالي $n_2 = 1 , 3$، إذن يوجد 3 زمر سيلو الجزئية من نوع 2.

ثانيا: عندما $p = 3$، فإن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع 3 يمكن إيجادها كالتالي :

يستخدم المعادلة $n_3 = 1 + 3k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

عندما $k = 0$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 1$، 1 تقسم 12.

عندما $k = 1$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 4$، 4 تقسم 12.

عندما $k = 2$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 7$، 7 لا تقسم 12.

عندما $k = 3$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 10$، 10 لا تقسم 12.

عندما $k = 4$ هذا يؤدي إلى أن $n_3 = 13$، 13 لا تقسم 12.

وهكذا بنفس الطريقة:

$$n_3 = 1,4,7,13,16,19,22,25 \ldots$$

و n_3 يجب أن تقسم 12 وبالتالي $n_3 = 1 , 4$، إذن يوجد 4 زمر سيلو الجزئية من نوع 3. ■

3-2 بعض تطبيقات نظريات سيلو

Some Applications Sylow Theorems

1-3-2 زمر سيلو الجزئية الناظمية Normal Sylow Subgroup

مبرهنة (1-1-3-2) (Keith, 2016)

الشرط $n_p = 1$ يعني أن زمرة سيلو الجزئية من نوع p تكون زمرة جزئية ناظمية.

البرهان

من نظرية سيلو الثانية أن كل زمر سيلو الجزئية من نوع p تكون مترافقة وبالتالي الشرط $n_p = 1$ يعني بالضبط أن زمرة سيلو الجزئية من نوع p تكون مترافقة مع نفسها، وبالتالي فهي تكون زمرة جزئية ناظمية من G. ■

مبرهنة(2-1-3-2) (Hungerford, 1990; Rotman, 2003)

إذا كانت G زمرة منتهية و H زمرة سيلو جزئية من نوع p، فإن H تكون ناظمية إذا وفقط إذا كانت H زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع p من الزمرة G.

البرهان

بفرض أن H زمرة سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G وحيدة.

من المبرهنة (2-1-5)، لكل $a \in G$ الترافق aHa^{-1} يكون كذلك زمرة سيلو جزئية من نوع p لكل $a \in G$، وبما أن زمرة سيلو الجزئية من نوع p وحيدة بالتالي $H = aHa^{-1}$ لكل $a \in G$ ، وهذا يوضح أن H زمرة جزئية ناظمية من G.

العكس : بفرض أن H زمرة سيلو جزئية ناظمية من G، إذا كانت Q أي زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرةG، فإن من نظرية سيلو الثانية كل زمر سيلو الجزئية تكون مترافقة أي أن $Q = aHa^{-1}$ لبعض $a \in G$، وبما أن H زمرة جزئية ناظمية، فإن

$Q = aHa^{-1} = H$ ولهذا عليه $Q = H$. وهذا يوضح أن H زمرة سيلو جزئية من نوع p تكون وحيدة إذا وفقط إذا كان H ناظمية. ■

نتيجة(2-3-1-1)

إذا كانت G زمرة رتبتها 15، فإن G لها زمرة جزئية ناظمية رتبتها 3 و زمرة جزئية ناظمية رتبتها 5.

البرهان

بفرض أن $|G| = 15$، بما أن $15 = 3\,.\,5$، من نظرية سيلو الأولى الزمرة G تحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع 3 رتبتها 3، وتحتوي أيضا على زمر سيلو جزئية من نوع 5 رتبتها 5، ومن نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو الجزئية من نوع 3 تكون n_3 بحيث أن $n_3 \equiv 1(mod\ 3)$، $n_3|15$ بالتالي $n_3 = 1$، هذا يؤدي إلى أن G لها زمرة سيلو جزئية من نوع 3 رتبتها 3 وحيدة ولتكن H ومن المبرهنة السابقة يستنتج أن H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G.

أيضا من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو الجزئية من نوع 5 تكون n_5 بحيث أن $n_5 \equiv 1(mod\ 5)$، $n_5|15$ بالتالي $n_5 = 1$ وهذا يؤدي إلى أن G لها زمرة سيلو جزئية من نوع 5 رتبتها 5 وحيدة ولتكن K. ومن المبرهنة السابقة يستنتج أن K تكون زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G. ■

مبرهنة (2-3-1-3)

لتكن G زمرة من الرتبة pq حيث إنَ p و q عددان أوليان مختلفان. إذا كانت $q \not\equiv 1(mod\ p)$، فإن G لها زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع p.

البرهان

من نظرية سيلو الأولى الزمرة G التي رتبتها pq تحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع p رتبتها p، وتحتوي أيضا على زمر سيلو جزئية من نوع q رتبتها q، ومن

نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p ولتكن n_p يجب أن تقسم رتبة الزمرة G وتحقق العلاقة $n_p = 1 + tp$ لبعض $t \in \mathbb{Z}^+$، بما أن $|G| = pq$، فإنها تحتوي على 4 قواسم فقط وهي 1 , q , p , pq وبالتالي هناك 4 احتمالات فقط ل n_p.

إذا كانت $n_p = pq$ بالتالي $pq = 1 + tp$ لبعض $t \in \mathbb{Z}^+$ هذا يؤدي إلى أن $pq - tp = 1$، فإن $p(q-t) = 1$ إذن $p = \frac{1}{q-t}$ وهذا تناقض (لأن p عدد أولي)، بالتالي $n_p \neq pq$.

أما إذا كانت $n_p = p$ بالتالي $p = 1 + tp$ لبعض $t \in \mathbb{Z}^+$ هذا يؤدي إلى أن $p - tp = 1$ وبالتالي $p(1-t) = 1$ إذن $p = \frac{1}{1-t}$ وهذا تناقض أيضا ولهذا عليه $n_p \neq p$.

وإذا كانت $n_p = q$ بالتالي $q = 1 + tp$ وهذا تناقض (لأن الفرض $q \not\equiv 1 (mod\ p)$)، إذن $n_p \neq q$. وبالتالي يجب أن تكون $n_p = 1$، ومنه يستنتج أن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G تكون وحيدة ولتكن H، ومن المبرهنة (2-3-1-2) H تكون زمرة جزئية ناظمية من نوع p من الزمرة G. ■

مبرهنة (2-3-1-4) (Keith, 2016)

إذا كانت p, q عوامل أولية مختلفة من $|G|$ ، $n_p = 1$ ، $n_q = 1$، فإن عناصر زمرة سيلو الجزئية من نوع p تكون متبادلة مع عناصر زمرة سيلو الجزئية من نوع q .

البرهان

نفرض أن H زمرة سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G و K زمرة سيلو جزئية من نوع q من الزمرة G. بما أن H و K رتبتهما أعداد أولية وبالتالي فإن $H \cap K = \{e\}$.

بما أن $n_p = 1$ ، $n_q = 1$ إذن الزمر الجزئية H و K تكون زمر جزئية ناظمية من G (من المبرهنة (2-3-1- 2)).

الآن لأي $y \in K, x \in H$ نجد أن:

$$xyx^{-1}y^{-1} = (xyx^{-1})y^{-1} \in Ky^{-1} \subseteq K$$

$$xyx^{-1}y^{-1} = x(yx^{-1}y^{-1}) \in xH \subseteq H$$

إذن: $xyx^{-1}y^{-1} \in H \cap K = \{e\}$ وبالتالي $xy = yx$.

وبما أن $y \in K, x \in H$ عناصر اختيارية، إذن هذا يوضح أن عناصر الزمرة H تكون متبادلة مع عناصر الزمرة K. ■

النتيجة التالية توضح أن رتبة الزمر G التي يمكن وضعها على شكل قوى يجب أن تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة.

نتيجة (2-1-3-2)

إذا كانت $|G| = 50\ or\ 100$، فإن الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو الجزئية ناظمية من نوع 5.

البرهان

لتكن $|G| = 50$، بما أن $50 = 5^2.2$ ، ومن نظرية سيلو الثالثة $n_5 \equiv 1(mod\ 5)$ ، $n_5|50$ هذا يؤدي إلي أن $n_5 = 1$ بالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع 5.

وبالمثل إذا كانت $|G| = 100$ بما أن $100 = 2^2.5^2$، ومن نظرية سيلو الثالثة $n_5 \equiv 1(mod\ 5)$ ، $n_5|100$ ، هذا يؤدي إلي أن $n_5 = 1$ بالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع 5. ■

المبرهنة التالية لا تشمل نظريات سيلو ولكنها تستخدم مع ربط بنظريات سيلو في برهان العديد من المبرهنات حول وجود الزمر الجزئية الناظمية.

مبرهنة (2-3-1-5) (Keith, 2016)

إذا كانت G زمرة تحتوي على K من الزمر الجزئية التي رتبتها p، فإن الزمرة G تحتوي على $K(p-1)$ من العناصر التي رتبتها p.

البرهان

بما أن الزمر الجزئية التي رتبتها p كل عناصرها باستثناء العنصر المحايد رتبتها p، والعكس العنصر التي رتبته p يولد زمرة جزئية من الرتبة p، من مبرهنة لانجرانج كل الزمر الجزئية المختلفة التي رتبتها p يكون تقاطعهما تافه، وبالتالي العناصر باستثناء العنصر المحايد تكون منفصلة كل زمرة عن أخرى، وهذا يؤدي إلى أن كل زمرة جزئية رتبتها p تحتوي على $p-1$ من العناصر التي رتبتها p، وهذه العناصر غير موجودة في الزمر الجزئية الأخرى التي رتبتها p، إذن عدد العناصر في الزمرة G التي رتبتها p تكون $K(p-1)$. ■

نتيجة (2-3-2-2)

إذا كانت $|G| = 12$، فإن الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع 2 أو زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع 3.

البرهان

لتكن $|G| = 12$. بما أن $12 = 2^2.3$ ، من نظرية سيلو الأولى الزمرة G تحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع 2 رتبتها 4 وتحتوي أيضا على زمرسيلو جزئية من نوع 3 رتبتها 3 ، ومن نظرية سيلو الثالثة:

$n_2 \equiv 1(mod\ 2)$، $n_2|12$ إذن $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$.

$n_3 \equiv 1(mod\ 3)$، $n_3|12$ إذن $n_3 = 1$ أو $n_3 = 4$.

الآن سوف يتم توضيح أن $n_2 = 1$ أو $n_3 = 1$.

بفرض أن $n_3 \neq 1$ بالتالي $n_3 = 4$، وبما أن زمر سيلو الجزئية من نوع 3 رتبتها 3 ومن المبرهنة السابقة الزمرة G تحتوي على 8 عناصر رتبتها 3 أي أن : $n_3(p-1) = 4(3-1) = 8$، إذن العناصر المتبقية في الزمرة G التي رتبتها ليس 3 تكون 4 عناصر، وبما أن زمرة سيلو الجزئية من 2 رتبتها 4، وهذه الزمرة تمثل كل العناصر المتبقية وبالتالي $n_2 = 1$، إذن هذا يوضح أن الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع 2. ■

2-3-2 تطبيق نظرية سيلو في تمييز الزمر الدورية

Application Of Sylow Theorems In Characterizing Cyclic Groups

تحتل الزمر الدورية أهمية خاصة في دراسة الزمر، وذلك لانفرادها دون غيرها من الزمر ببعض الخواص التي تسهل عملية التعرف على هذه الزمر، واستخدامها في تصنيف بعض الزمر الأخرى، وفي الفصل السابق عُرفت متى تكون الزمر الدورية باستخدام تعريف الزمرة الدورية، وفي هذا الفصل سيُتعرف على الزمرة كونها دورية باستخدام نظريات سيلو ، والمبرهنات التالية سوف توضح ذلك.

مبرهنة (2-3-2-1) (Gallian, 2012)

إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث إنَ p و q عددان أوليان، $p < q$، p لا تقسم $q-1$، فإن G زمرة دورية.

البرهان

بفرض أن $|G| = pq$،من نظرية سيلو الأولى أن الزمرة G تحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع p من الزمرة G ، و تحتوي أيضا على زمر سيلو جزئية من نوع q من الزمرة G، من نظرية سيلو الثالثة أن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p تكون $n_p = 1 + kp$ لبعض $k \in \mathbb{Z}^+$، n_p تقسم pq، وبما أن قواسم pq هي $1\ ,\ p\ ,\ q\ ,$ pq.

الآن إذا كانت $n_p = p$ هذا يؤدي إلى أن $p = 1 + kp$ إذن $p = \frac{1}{1-k}$ هذا تناقض (لإن p عدد أولي) وبالتالي $n_p \neq p$.

وإذا كانت $n_p = q$ هذا يؤدي إلى أن $q = 1 + kp$ إذن $\frac{q-1}{p} = k$ ، وهذا يتناقض مع p لا تقسم $q - 1$ وبالتالي $n_p \neq q$.

وإذا كانت $n_p = pq$ هذا يؤدي إلى أن $pq = 1 + kp$ وهذا يؤدي إلى أن $pq - kp = 1$، إذن $p = \frac{1}{q-1}$ وهذا تناقض، وبالتالي $n_p \neq pq$، ومن هذا يستنتج أن $n_p = 1$، وبالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع p من الزمرة G ولتكن H، وهذا يؤدي إلى أن H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G، وبما أن H زمرة جزئية من نوع p من الزمرة G رتبتها p وبالتالي فهي دورية.

وبالمثل بما أن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع q تكون $n_q = 1 + kq$ لبعض $k \in \mathbb{Z}^+$ و n_q تقسم pq، وبما أن قواسم pq هي $1 , p , q, pq$.

إذا كانت $n_q = q$ هذا يؤدي إلى أن $q = 1 + kq$، إذن $q = \frac{1}{1-k}$ هذا تناقض (لإن q عدد أولي) وبالتالي $n_q \neq q$.

إذا كانت $n_q = p$ هذا يؤدي إلى أن $p = 1 + kq$، وهذا يتناقض مع $p < q$ وبالتالي $n_q \neq p$.

إذا كانت $n_q = pq$ هذا يؤدي إلى أن $pq = 1 + kq$ وهذا يؤدي إلى أن $pq - kq = 1$، إذن $q = \frac{1}{p-1}$، وهذا تناقض وبالتالي $n_q \neq pq$، من هذا يستنتج أن $n_q = 1$، وبالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع q من الزمرة G ولتكن K، وهذا يؤدي إلى أن K زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G، وبما أن K زمرة جزئية من نوع q من الزمرة G رتبتها q وبالتالي فهي دورية.

الآن بفرض أن $H = \langle x \rangle$، $K = \langle y \rangle$ ، بما أن $|xy| = |x||y| = pq = |G|$
إذن لتوضيح أن الزمرة G دورية يكفي أن نبرهن أن $x\ ,\ y$ تبديلية.

بما أن $H\ ,\ K$ زمر جزئية ناظمية من الزمرة G فإن:

$$xyx^{-1}y^{-1} = (xyx^{-1})y^{-1} \in Ky^{-1} \subseteq K$$

$$xyx^{-1}y^{-1} = x(yx^{-1}y^{-1}) \in xH \subseteq H$$

إذن $xyx^{-1}y^{-1} \in H \cap K = 1$ وبالتالي فإن $xy = yx$. وهذا يوضح أن G زمرة دورية. ■

نتيجة(2-3-2-1)

كل زمرة رتبتها 15 تكون دورية .

لتكن الزمرة G رتبتها 15، بما أن $15 = 3\ .\ 5$ من المرهنة السابقة نجد أن $p = 3$، $q = 5$، 3 لا تقسم $5 - 1$ إذن شروط المبرهنة السابقة متحققة و بالتالي G زمرة دورية. ■

مبرهنة(2-3-2-2) (Keith, 2016)

الزمرة المنتهية التي تحتوي على الأغلب زمرة جزئية واحدة من كل رتبة تكون دورية .

البرهان

هذا البرهان يبرهن هذه المبرهنة للزمر التي رتبتها قوة للعدد أولي، ثم يستخدم نظرية سيلو الأولى التي تقود من حالة القوة الأولية إلى الحالة العامة.

هناك خطوتان لبرهان هذه المبرهنة:

الخطوة 1: بفرض أن الزمرة G تحتوي على الأكثر زمرة جزئية واحدة من كل رتبة، و $|G| = p^k$ حيث p عدد أولي $k \geq 1$ ، لتوضيح أن G زمرة دورية، يفرض أن $g \in G$ يكون عنصر له أعلى رتبة في الزمرة G، ويريد إثبات أن $\langle g \rangle = G$.

لتكن $h \in G$ بالتالي رتبة h تكون قوة للعدد p، وبفرض أن $|g| = p^m$،
$|h| = p^n$ حيث $m \geq n$، وبالتالي p^n تقسم p^m ولهذا فإن هناك زمرة جزئية من الزمرة الدورية $\langle g \rangle$ ذو رتبة p^n، ولكن $\langle h \rangle$ رتبتها p^n، ومن الفرض الزمرة G تحتوي على الأكثر زمرة جزئية واحدة من كل رتبة وهذا يؤدي إلي أن $\langle g \rangle \subset \langle h \rangle$، وبالتالي $h \in \langle g \rangle$ إذن $G \subset \langle g \rangle$، وهذا يؤدي إلى أن $G = \langle g \rangle$، وبالتالي الزمرة G تكون زمرة دورية.

الخطوة 2: بفرض أن الزمرة G تحتوي على الأغلب زمرة جزئية واحده من كل رتبة، وبالتالي $n_p = 1$ لكل الأعداد الأولية p، لأي عددين أوليين مختلفين p, q بحيث يقسمان رتبة الزمرة G، عناصر زمرة سيلو من نوع p تكون متبادلة مع عناصر زمرة سيلو من نوع q (من المبرهنة (2-3-1-4)).

كل الزمر الجزئية من G تحتوي على الأكثر زمرة جزئية واحدة من كل رتبة (غير ذلك الزمرة G نفسها يجب أن تحتوي على زمرتين جزئيتين من نفس الرتبة)، ولهذا (من الخطوة 1) زمرة سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G ولتكن H تكون دورية، الآن نختار مولد لزمرة H وليكن g_p، وبالتالي رتبة g_p تكون من رتبة H، رتبة g_p تكون مماثلة لرتبة زمرة سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة G. هذه g_p تكون متبادلة بتغير p، ومن المقطع السابق تكون رتبتها أولية نسبيا وهذا يؤدي إلى أن حاصل ضرب g_p المتغيرة، له رتبة مساوية لحاصل ضرب رتب زمر سيلو الجزئية، وهذا مساوي لرتبة الزمرة G، وبالتالي الزمرة G تكون دورية. ■

3-3-2 تطبيق نظرية سيلو في تمييز الزمر التبديلية

Application Of Sylow Theorems In Characterizing Abelian Groups

بما أن كل زمرة رتبتها p^2 تكون تبديلية حيث إن p عدد أولي، وأن كل زمرة رتبتها pq حيث إنَ p ، q عددان أوليان، و$p < q$، و $q \not\equiv 1(mod\ p)$، تكون تبديلية (في الحقيقة هي تكون دورية)، فنظريات سيلو تعتبر أداة إضافية لتوضيح كل الزمر من الرتب المعطاة سلفا تكون تبديلية.

مبرهنة (2-3-3-1) (Keith, 2016)

كل زمرة رتبتها p^2q حيث إن p ، q عددان أوليان و $p < q$ و $q \not\equiv 1(mod\ p)$، تكون زمرة تبديلية.

البرهان

لتكن $|G| = p^2q$. من نظرية سيلو الأولى الزمرة G تحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع p رتبتها p^2، وتحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع q رتبتها q، ومن نظرية سيلو الثالثة $n_p \equiv 1(mod\ p)$ و $n_p|p^2q$، وبما أن قواسم العدد p^2q هي $1, p\ , q, p^2, p^2q$.

إذا كانت $n_p = p^2q$ هذا يؤدي إلى أن $p^2q = 1 + kp$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$ وبالتالي $p^2q - kp = 1$ ،إذن $p = \frac{1}{pq-k}$ وهذا تناقض، وبالتالي $n_p \neq p^2q$. وإذا كانت $n_p = p$ هذا يؤدي إلى أن $p = 1 + kp$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$ وبالتالي $p - kp = 1$ إذن $p = \frac{1}{1-k}$ وهذا تناقض، وبالتالي $n_p \neq p$. وإذا كانت $n_p = p^2$ هذا يؤدي إلي أن $p^2 = 1 + kp$، إذن $p = \frac{1}{p-k}$ وهذا تناقض، وبالتالي $n_p \neq p^2$. وإذا كانت $n_p = q$ هذا يؤدي إلي أن $q = 1 + kp$ وهذا تناقض (لأن في الفرض $q \not\equiv 1(mod\ p)$)،وبالتالي $n_p \neq q$. إذن $n_p = 1$ وبالتالي الزمرة G تحتوي على

زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع p رتبتها p^2 . وبنفس الطريقة $n_q = 1$ وبالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع q رتبتها q، هذا يؤدي إلى أن الزمرة G تحتوي علي زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع p ولتكن H وتحتوي على زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع q ولتكن K، وبما أن $|H| = p^2$، $|K| = q$ فإن H تكون زمرة تبديلية و K تكون زمرة دورية وبالتالي فهي تبديلية.

الآن لدينا المجموعة $HK = \{ab : a \in H , b \in K\}$ تكون زمرة جزئية من G (لأن H و K زمر جزئية ناظمية)، بما أن الزمرة HK تحتوي على H و K كزمر جزئية، وبالتالي من مبرهنة لانجرانج $|HK|$ قابلية القسمة على كلا من $|H|$ و$|K|$، إذن $|HK|$ قابلية القسمة على p^2q، وعليه فإن $HK = G$. وبما أن H و K كلاهما زمر تبديلية، بما أن $n_p = 1$ و $n_q = 1$، فإن من المبرهنة (2-3-1-4) عناصر الزمرة H تكون متبادلة مع عناصر الزمرة K، هذا يؤدي إلى أن G زمرة تبديلية. ■

نتيجة (2-3-3-1)

كل زمرة رتبتها 45 تكون تبديلية.

البرهان

لتكن $|G| = 45$. بما أن $45 = 3^2.5$ ومن نظرية سيلو الثالثة:

$n_3 \equiv 1(mod\ 3)$ ، $n_3|45$ وهذا يؤدي إلى أن $n_3 = 1$.

$n_5 \equiv 1(mod\ 5)$ ، $n_5|45$ وهذا يؤدي إلى أن $n_5 = 1$.

الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع 3 رتبتها 9 ،وتحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع 5 رتبتها 5، وبالتالي الزمرة G تحتوي علي زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع 3 ولتكن H، وتحتوي على زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع 5 ولتكن K. وبما أن $|H| = 9$، $|K| = 5$، فإن H تكون زمرة تبديلية و K تكون زمرة دورية وبالتالي فهي تبديلية.

المجموعة $HK = \{ab : a \in H , b \in K\}$ تكون زمرة جزئية من G، بما أن HK تحتوي على H و K كزمر جزئية إذن من مبرهنة لانجرانج $|HK|$ قابلية القسمة على 9 و5، بالتالي $|HK|$ قابلية القسمة على 45 ولهذا علية $HK = G$، وبما أن H و K كلاهما زمر تبديلية، $n_3 = 1$ و $n_5 = 1$ يؤدي إلى أن عناصر الزمرة H تكون متبادلة مع عناصر الزمرة K، وبالتالي الزمرة G تكون زمرة تبديلية. ■

نتيجة (2-3-3-2)

إذا كانت $|G| = 99$، فإن G تكون زمرة تبديلية.

بما أن $99 = 3^2.11$ من المبرهنة السابقة نجد أن $p^2 = 3^2$ ومنها $p = 3$، $q = 11$، $3 < 11$، $11 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ إذن شروط المبرهنة السابقة متحققة هذا يؤدي إلى أن G زمرة تبديلية. ■

4-3-2 تطبيق نظرية سيلو في تمييز الزمر البسيطة

Application Of Sylow Theorems In Characterizing Simple Groups

بما أن الزمرة G تكون بسيطة إذا لم يكن لها زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهه، فنظريات سيلو تساعد على معرفة أن الزمرة G تكون بسيطة أو غير بسيطة، أي أنه إذا كانت الزمرة G لها زمرة سيلو جزئية وحيدة ولتكن H، فإن H تكون زمرة جزئية ناظمية فعلية من الزمرة G، وهذا يؤدي إلى أن الزمرة Gغير بسيطة.

مبرهنة (2-3-4-1)

كل زمرة رتبتها 20 تكون غير بسيطة.

البرهان

لتكن $|G| = 20$. بما أن $20 = 2^2.5$ وبالتالي الزمرة G تحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع 2 رتبتها 4، وتحتوي أيضا على زمر سيلو جزئية من نوع 5 رتبتها 5، وعدد زمر سيلو الجزئية من نوع 5 تكون $n_5 \equiv 1(mod\ 5)$ و$n_5|20$ هذا يؤدي إلى أن $n_5 = 1$، وبالتالي الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع 5 وهذه زمرة سيلو الجزئية من نوع 5 تكون ناظمية، وهذا يوضح أن الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية فعلية، وبالتالي الزمرة G تكون غير بسيطة. ■

مبرهنة (2-3-4-2)

كل زمرة رتبتها 30 تكون غير بسيطة.

البرهان

لتكن $|G| = 30$. سوف نوضح أن ما إذا كانت الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية من نوع p تكون وحيدة، حيث p عدد أولي وp تقسم 30، من نظريات سيلو

عدد زمر سيلو الجزئية من نوع 5 تكون 6 أو $n_5 = 1$، وعدد زمر سيلو من نوع 3 تكون 10 أو $n_3 = 1$.

الآن إذا كانت $n_5 = 6$، وبالتالي الزمرة G تحتوي على 6 زمر جزئية من نوع 5 رتبتها 5، ومن المبرهنة (2-3-1-5) الزمرة G تحتوي على 24 عنصر رتبته 5. وإذا كانت $n_3 = 10$، وبالتالي الزمرة G تحتوي على 10 زمر جزئية من نوع 3 رتبتها 3، ومن المبرهنة (2-3-1-5) الزمرة G تحتوي على 20 عنصر رتبته 3. وفي هذه الحالة تكون الزمرة G تحتوي على الأقل 44 عنصر، وهذا تناقض (لأن $|G| = 30$)، ومن هذا يستنتج أن الزمرة G تحتوي زمرة جزئية ناظمية من نوع 3 أو تحتوي على زمرة جزئية ناظمية من نوع 5، وهذا يؤدي إلى أن الزمرة G تكون غير بسيطة. ■

مبرهنة (2-3-4-3) (اختبار سيلو للزمر غير البسيطة

(Gallian, 2012) **(Sylow Test For Non simplicity Groups**

ليكن n عدد صحيح غير أولي و p عدد أولي يقسم n. إذا كان العدد 1 هو القاسم الوحيد للعدد n بحيث يساوي 1 بمقياس p، فإن لا توجد زمرة بسيطة رتبتها n.

البرهان

إذا كانت n قوة لعدد أولي، فإن الزمرة التي رتبتها n لها مركز غير تافه وبالتالي فهي غير بسيطة، و إذا كانت n ليست قوة لعدد أولي، فإن كل زمرة سيلو الجزئية فعلية، ومن نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p من الزمرة التي رتبتها n تكون مساواة 1 بمقياس p، وبما أن 1 هو العدد الوحيد التي تقسم n بحيث يساوي 1 بمقياس p، ولهذا عليه زمرة سيلو الجزئية من نوع p تكون وحيدة ، وبالتالي فهي تكون ناظمية، إذاً لا توجد زمرة بسيطة رتبتها n.■

مبرهنة (2-3-4-4) (Fieseler, 2010)

إذا كانت p, q عددين أوليين و كانت $p < q$، فإن كل زمرة G رتبتها pq لها زمرة جزئية ناظمية فعلية من G وبالتالي فهي غير بسيطة.

البرهان

لتكن n_p عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p، من نظرية سيلو الثالثة $n_p \equiv 1(mod\, p)$، ويمكن التعبير عن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p بالشكل التالي $n_p = 1 + kp$ حيث k عدد صحيح موجب، وأن n_p تقسم $|G| = pq$، وبما أن n_p لا تقسم p إذن يجب أن تقسم q، هذا يؤدي إلي أن $k = 0$، إذن $n_p = 1$ وبالتالي زمر سيلو الجزئية من نوع p تكون وحيدة، وهذا يؤدي إلى أن زمرة سيلو الجزئية من نوع p تكون ناظمية من المبرهنة (2-3-1-2)، والتي تكون زمرة جزئية ناظمية فعلية من الزمرة G، إذن G زمرة غير بسيطة. ■

نتيجة (2-3-4-1)

كل زمرة رتبتها 15 تكون غير بسيطة .

لتكن G زمرة رتبتها 15، بما أن $15 = 3\,.\,5$، لتكن $p = 3$ ، $q = 5$ ، $3 < 5$ وبالتالي شروط المبرهنة السابقة متحققة إذن G زمرة غير بسيطة. ■

الفصل الثالث

تصنيف الزمر المنتهية باستخدام نظرية سيلو

CLASSIFYING FINITE GROUPS
BY USING SYLOW THEORY

1-3 تصنيف الزمر المنتهية باستخدام نظريات سيلو

Classifying Finite Groups By Using Sylow Theories

في هذا الفصل سيتم تطبيق نظريات سيلو في كل ما يتعلق بتصنيف الزمر المنتهية من حيث التماثل، ومن المهم استنتاج قائمة من الزمر بحيث يكون كل زمرة منتهية تماثل إحدى هذه الزمر التي في القائمة، ولكن لا يوجد تصنيف متكامل لجميع الزمر المنتهية، فالمبرهنة الأساسية للزمر المنتهية التبديلية تصنف جميع الزمر التبديلية، فنظريات سيلو دورها هنا تساعد في معرفة أن الزمرة تبديلية، ثم تستخدم هذه المبرهنة في تصنيف الزمر المنتهية، والمبرهنة (4-7-1) تصنف جميع الزمر دورية، فيربط نظريات سيلو مع مبرهنات أخرى لمعرفة أن الزمرة دورية، ثم يستخدم هذه المبرهنة في تصنيف الزمر المنتهية. أما فيما يتعلق بتصنيف الزمر المنتهية غير تبديلية فمسألة صعبة، فنظريات سيلو كان لها دور كبير في تصنيف هذه الزمر.

وسيتناول هذا الفصل كل ما يتعلق بتصنيف الزمر المنتهية، حيث سيبدأ تصاعديا في تصنيف الزمر من حيث الرتبة، بالنسبة للزمرة التي تحتوي على العنصر المحايد فقط تكون رتبتها 1، وهذه الزمرة تحتوي على زمرة منتهية واحدة، وهذا النوع من الزمر يكون تافه لا يحتاج التحدث عنه هنا، ولهذا سيتم البدء بالزمر المنتهية التي رتبتها عدد أولي وتعتبر هذه الزمر أسهل الرتب من حيث التصنيف.

مبرهنة (1-3) (Stearns, 2015)

كل زمرة رتبتها عدد أولي p تماثل Z_p.

البرهان

لتكن $|G| = p$ و $a \in G$ و $a \neq e$، يمكن أن يحصل على زمرة جزئية دورية مولدة بالعنصر a ولتكن $\langle a\rangle$ بحيث أن $|\langle a\rangle| \neq 1$، ومن مبرهنة لاجرانج $|\langle a\rangle| \,\big|\, |G|$ أي أن $|\langle a\rangle| \,\big|\, p$ ولكن p عدد أولي وبالتالي $|\langle a\rangle| = p$ و لهذا عليه $\langle a\rangle = G$، وهذا يؤدي إلى أن G زمرة دورية ، ومن المبرهنة (4-7-1) يستنتج أن $G \cong Z_p$. ■

مثال (3-1)

إذا كانت G زمرة بحيث $|G| = 7$، بما أن 7 عدد أولي، وبالتالي بتطبيق المبرهنة السابقة $p = 7$ ومنها يستنتج أن هناك زمرة واحده من الرتبة 7 تكون متماثلة مع كل الزمر من الرتبة 7 وهي بالتحديد Z_7.

وبنفس الطريقة كل الزمر المنتهية من الرتب الآتية : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، ...

هناك زمرة واحدة لكل رتبة تماثلها. ■

مبرهنة (3-2) (Axler & Ribeb , 2007)

ليكن p عدد أولي. كل زمرة رتبتها p^2 تماثل الزمرة Z_{p^2} أو الزمرة $Z_p \times Z_p$.

البرهان

بما أن كل زمرة رتبتها p^2 تكون تبديلية، ومن المبرهنة الأساسية للزمر المنتهية التبديلية أن كل زمرة تبديلية منتهية تماثل الضرب المباشر للزمر الدورية التي على الشكل:

$$Z_{{p_1}^{r_1}} \times Z_{{p_2}^{r_2}} \times \dots \times Z_{{p_n}^{r_n}}$$

حيث إن p_i أعداد أولية ليس من الضروري أن تكون مختلفة و r_i أعداد صحيحة موجبة وبالتالي الزمرة التي رتبتها p^2 تماثل $Z_p \times Z_p$ أو Z_{p^2}. ■

مثال (3-2)

إذا كانت G زمرة بحيث $|G| = 4$، بما أن $4 = 2^2$، 2 عدد أولي، وبالتالي بتطبيق المبرهنة السابقة هناك زمرتين من الرتبة 4 تكون متماثلة مع كل الزمر من الرتبة 4 وهي بالتحديد Z_4 أو $Z_2 \times Z_2$.

وبنفس الطريقة لكل الزمر من الرتب الآتية : 4 ، 9 ، 25 ، 49 ،...

هناك زمرتين لكل رتبة تماثلها. ■

مبرهنة (3-3) (Axler & Ribeb , 2007)

ليكن p عدد أولي و $p > 2$. كل زمرة رتبتها $2p$ تماثل الزمرة Z_{2p} أو الزمرة D_p (Dihedral (p)).

البرهان

بفرض أن $p > 2$ و $|G| = 2p$، من نظريات سيلو الزمرة من الرتبة $2p$ لها زمرة سيلو جزئية من نوع p ولتكن A رتبتها p، ولها زمرة سيلو جزئية من نوع 2 ولتكن B رتبتها 2، وهذا يؤدي إلى أن الزمرتين A و B زمر دورية (لأن رتبتهما عدد أولي) وبالتالي يوجد $a \in A$ و $b \in B$ بحيث:

$$B = \langle b \rangle \cong Z_2 \ , \quad A = \langle a \rangle \ \cong Z_p$$

الآن: بما أن $[G : A] = 2$، فإن A زمرة جزئية ناظمية من G، وبما أن $A \cap B = 1$ و $|G| = |A||B| = |AB|$، هذا يؤدي إلى أن $G = AB$، وبالتالي الزمرة G مولدة بالعنصرين $\{a , b\}$، والعنصران a و b يحققان العلاقة $a^p = 1$ و $b^2 = 1$، وبما أن A زمرة جزئية ناظمية من G، فإن $bab^{-1} \in A$ وبالتالي $bab^{-1} = a^k$ لبعض k، وبما أن $b^2 = 1$ يكون:

$$a = bbab^{-1}b^{-1} = ba^k b^{-1} = (bab^{-1})^k = (a^k)^k = a^{k^2}$$

إذن $a = a^{k^2}$ وهذا يؤدي إلى أن $a^{k^2-1} = 1$ وبالتالي $a^{k^2-1} = a^p$، وعليه فإن $k^2 - 1 = p$ وبالتالي p تقسم $k^2 - 1$، وبما أن $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ وهذا يؤدي إلى أن p تقسم $(k-1)(k+1)$. و بما أن p عدد أولي، فإن p يجب أن تقسم $(k+1)$ أو $(k-1)$.

إذا كانت p تقسم $(k-1)$، فإن $bab^{-1} = a^k = a$ وهذا يؤدي إلى أن $ba = ab$ إذن الزمرة G تبديلية، وبالتالي من المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية:

$$G \cong Z_p \times Z_2 \cong Z_{2p}$$

وإذا كانت p تقسم $(k+1)$، فإن $bab^{-1} = a^k = a^{-1}$ ويمكن إعادة كتابتها على الشكل التالي $ba = a^{-1}b$ وهذا يؤدي إلى أن الزمرة G غير تبديلية، مولدة بالعنصرين a و b وبالتالي $|G| = |AB| = 2p$.

الآن: بما أن $ba = a^{-1}b$ ولدينا $a^p = 1$ و $b^2 = 1$ و بالتالي $|a| = p$ و $|b| = 2$ ومن هذا يستنتج احتمال أن تكون عناصر الزمرة G على الشكل التالي:

$$G = \{a\,, b\,:\; |a| = p\,, |b| = 2\,, ba = a^{-1}b\;\} = D_p$$

وبالتالي $G \cong D_p$.

وهذا يوضح أن الزمرة التي رتبتها $2p$ حيث p عدد أولي إذا كانت زمرة تبديلية فإنها تماثل Z_{2p}، و إذا كانت زمرة غير تبديلية فإنها تماثل الزمرة D_p. ■

مثال (3-3)

إذا كانت G زمرة بحيث $|G| = 6$، بما أن $3 \times 2 = 6$ و 3 عدد أولي، وبالتالي بتطبيق المبرهنة السابقة يجد أن $p = 3$، ومنها يستنتج أن هناك زمرتين من الرتبة 6 تكون متماثلة مع كل الزمر من الرتبة 6، وهي بالتحديد $G \cong Z_6$ أو $G \cong D_3$.

وبنفس الطريقة لكل الزمر من الرتب الآتية :

10 ، 14 ، 22 ، 26 ، 34 ، 38 ، 46 ، 58 ، 62 ، 74 ، 82 ، 86 ، 94 ، ....

هناك زمرتين لكل رتبة تماثلها . ■

مبرهنة (3-4) (Axler & Ribeb , 2007; Hungerford, 2003)

لتكن G زمرة رتبتها 8. إذا كانت G زمرة تبديلية، فإنها تماثل إحدى ثلاثة زمر تبديلية $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$، $Z_2 \times Z_4$، Z_8. وإذا كانت G زمرة غير تبديلية، فإنها تماثل D_4 أو Q_4.

البرهان

أولا: بفرض أن G زمرة تبديلية رتبتها 8.

من المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية أن كل زمرة تبديلية تماثل الضرب المباشر من الزمر الدورية التي على الشكل الآتي:

$$Z_{{p_1}^{r_1}} \times Z_{{p_2}^{r_2}} \times \ldots \times Z_{{p_n}^{r_n}}$$

حيث إن p_i أعداد أولية ليس من الضروري أن تكون مختلفة ، r_k أعداد صحيحة موجبة وبذلك يكون هناك الاحتمالات الآتية:

الحالة 1: ليكن $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ و $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ بالتالي:

$$G \cong Z_{2^1} \times Z_{2^1} \times Z_{2^1} \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$$

الحالة 2: ليكن $p_1 = p_2 = 2$ و $r_1 = 1$ و $r_2 = 2$ بالتالي:

$$G \cong Z_{2^1} \times Z_{2^2} \cong Z_2 \times Z_4$$

الحالة 3: ليكن $p_1 = 2$ و $r_1 = 3$ بالتالي:

$$G \cong Z_{2^3} \cong Z_8$$

إذن هذا يبرهن أن إذا كانت G زمرة تبديلية، فإنها تماثل إحدى ثلاثة زمر تبديلية:

$G \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ ، $G \cong Z_2 \times Z_4$ ، $G \cong Z_8$.

ثانيا: بفرض أن الزمرة G غير تبديلية رتبتها 8.

بما أن رتبة كل عنصر في الزمرة G يجب أن تقسم رتبة الزمرة G، فإن رتبة كل عنصر في الزمرة G باستثناء العنصر المحايد تكون إما 2 أو 4 أو8، بما أن الزمرة G غير تبديلية، وبالتالي فإنها غير دورية، من المعاكس الإيجابي للمبرهنة (كل زمرة دورية تكون تبديلية)، وهذا يؤدي إلى أن الزمرة G لا تحتوي على عنصر رتبته 8.

وإذا كان كل عنصر في الزمرة G باستثناء العنصر المحايد رتبته 2، وبالتالي من المبرهنة (2-3-1) يستنتج أن G زمرة تبديلية، وهذا يتناقض مع الفرض كوِن أن G زمرة غير تبديلية، إذن هناك عنصر $a \in G$، $a \neq e$، بحيث إن $|a| = 4$.
الآن بفرض أن $\langle a\rangle = \{e, a^1, a^2, a^3\}$ تكون زمرة جزئية دورية من الزمرة G مولدة بالعنصر a. وإذا كان $b \in G$ و $b \notin \langle a\rangle$ ، وبما أن اتحاد المصاحبات يعطي كل الزمرة $G = \langle a\rangle \cup b\langle a\rangle$، وبالتالي الزمرة G مولدة بالعنصرين a و b.

الآن من نظريات سيلو، الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية من نوع 2 رتبتها 4 ولتكن $\langle a\rangle$، بالتالي $bab^{-1} \in \langle a\rangle$ لكل $a \in \langle a\rangle$، $b \in G$.

الآن $(bab^{-1})^4 = ba^4b^{-1} = beb^{-1} = bb^{-1} = e$ بالتالي $|bab^{-1}| = 4$، وهذا يؤدي إلى أن $bab^{-1} = a$ أو $bab^{-1} = a^3 = a^{-1}$.

إذا كان $bab^{-1} = a$، فإن $ba = ab$ وهذا ينتج أن الزمرة G تبديلية، وهذا يتناقض مع الفرض كوِن أن G زمرة غير تبديلية، وبالتالي $bab^{-1} \neq a$ إذن $bab^{-1} = a^{-1}$ ويمكن إعادة كتابتها على الشكليين التاليين $ba = a^{-1}b$ ، $aba = b$.

بما أن $[G : \langle a\rangle] = 2$ بالتالي من المبرهنة (3-6-1) فإن $b^2 \in \langle a\rangle = \{e,\ a, a^2,\ a^3\}$، إذن هناك أربعة احتمالات مختلفة ل b^2.

1) إذا كانت $b^2 = e$ وهذا يؤدي إلى أن $|b| = 2$.
2) إذا كانت $b^2 = a$ وهذا يؤدي إلى أن $|b^2| = |a| = 4$ وبالتالي $|b| = 8$، وهذا يتناقض مع الفرض كون أن G زمرة غير تبديلية إذن $b^2 \neq a$.

3) إذا كانت $b^2 = a^2$ وهذا يؤدي إلى أن $|b| = 4$.

4) إذا كانت $b^2 = a^3 = a^{-1}$ وهذا يؤدي إلى أن $|b^2| = |a^{-1}| = 4$ وبالتالي $|b| = 8$، وهذا يتناقض مع الفرض كون أن G زمرة غير تبديلية إذن $b^2 \neq a^3$.

ومن هذه الاحتمالات يستنتج أن $|b| = 2$ أو $|b| = 4$. إذا كانت $|b| = 2$ و $ba = a^{-1}b$ و $|a| = 4$ وهذا يعطي احتمالية للعناصر الزمرة G كالآتي: $G = \{a\,, b\colon\ |a| = 4\,, |b| = 2\,,\ ba = a^{-1}b\} = D_4$ ومن هذا يستنتج أن $G \cong D_4$.

وإذا كانت $|b| = 4$، فإن $a^2 = b^2$ ولدينا $aba = b$ و $|a| = 4$ وهذا يعطي احتمالية للعناصر الزمرة G كالآتي:

$G = \{a\,, b\colon\ |a| = 4\,, b^2 = a^2,\ aba = b\} = Q_4$ ومن هذا يستنتج أن $G \cong Q_4$.

وهذا يوضح أنه إذا كانت G زمرة غير تبديلية، فإنها تماثل $G \cong D_4$ أو $G \cong Q_4$.

مما سبق يتضح أن $Q_4 \ncong D_4$، لأن الزمرة D_4 لها عنصرين فقط من الرتبة 4 وهما a و a^3، والزمرة Q_4 كل عناصرها من الرتبة 4 ما عدا e وa^2، أي أن الزمرة Q_4 لها ستة عناصر من الرتبة 4.

مبرهنة (3-5) (Axler & Ribeb , 2007; Hungerford, 2003)

لتكن G زمرة رتبتها 12. إذا كانت G زمرة تبديلية، فإنها تشاكل إحدى زمرتين تبديليتين $Z_4 \times Z_3$، $Z_2 \times Z_2 \times Z_3$، وإذا كانت G زمرة غير تبديلية، فإنها تماثل D_6 أو Q_6 أو A_4.

البرهان

أولا : بفرض أن G زمرة تبديلية رتبتها 12.

من المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية أن كل زمرة تبديلية تماثل الضرب المباشر من الزمر الدورية التي على الشكل الآتي:

$$Z_{{p_1}^{r_1}} \times Z_{{p_2}^{r_2}} \times \dots \times Z_{{p_n}^{r_n}}$$

حيث إن p_i أعداد أولية ليس من الضروري أن تكون مختلفة، r_k أعداد صحيحة موجبة، بذلك يكون هناك حالتين:

الحالة 1: $p_3 = 3$ ، $p_1 = p_2 = 2$ ، $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ أي أن:

$$G \cong Z_{2^1} \times Z_{2^1} \times Z_{3^1} \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_3$$

الحالة 2: $p_1 = 2$ ، $p_2 = 3$ ، $r_1 = 2$ ، $r_2 = 1$ أي أن:

$$G \cong Z_{2^2} \times Z_{3^1} \cong Z_4 \times Z_3$$

وهذا يوضح أنه إذا كانت G زمرة تبديلية رتبتها 12، فإنها تماثل إحدى الزمرتين التبديليتين:

$G \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_3$ ، $G \cong Z_4 \times Z_3$.

ثانيا : بفرض أن G زمرة غير تبديلية رتبتها 12.

بما أن $|G| = 12 = 2^2.3$، وبالتالي من تطبيق نظريات سيلو كما في المثال (2-2-2) أن الزمرة G تحتوي على زمر سيلو جزئية من نوع 3 رتبتها 3، ولتكن إحدى هذه الزمر P، فإن $|P| = 3$. إذا كانت G تؤثر على المجموعات المصاحبة اليسرى ولتكن $S = aP$ لكل $a \in G$ بواسطة الضرب اليساري، وهذا يؤدي إلى أن $|S| = [G : P] = \frac{12}{3} = 4$ ، وبالتالي من المبرهنة (1-8-6) فإنه يوجد تشاكل $f : G \to S_4$ التي تكون نواة التشاكل الناتجة من هذا التشاكل محتواه في P وبالتالي $Ker(f) = \{e\}$ أو $Ker(f) = \{P\}$.

إذا كانت $Ker(f) = \{e\}$، وبالتالي من المبرهنة (8-7-1) الدالة f تكون دالة أحادية، بما أن $Im(f) = f(G)$ زمرة جزئية من S_4 وبما أن f دالة أحادية، هذا يؤدي إلى أن $f(G)$ تكون زمرة جزئية من S_4 رتبتها 12، وتوجد زمرة جزئية وحيدة من S_4 ورتبتها 12 وهي A_4 وبالتالي $G \cong A_4$.

وإذا كانت $Ker(f) = \{P\}$ بما أن نواة التشاكل تكون ناظمية هذا يؤدي إلى أن P تكون ناظمية في G، وبالتالي P تكون زمرة سيلو جزئية من نوع 3 تكون وحيدة، وبما أن الترافق من الزمر الجزئية يكون كذلك زمرة جزئية، إذن الزمرة G تحتوي على عنصرين من الرتبة 3، وليكن إحدى هذه العناصر g، ومن المبرهنة (6-8-1) $[G : C(g)]$ تساوي عدد العناصر المترافقة مع g، وبما أن كل العناصر المترافقة من g رتبتها 3، هذا يؤدي إلى أن $[G : C(g)] = 1$ أو $[G : C(g)] = 2$ وبالتالي $|C(g)| = 12$ أو $|C(g)| = 6$ بالترتيب.

وفي كلا الحالتين من مبرهنة كوشي، فإنه يوجد عنصر $c \in C(g)$ بحيث $|c| = 2$، ويمكن أن نضرب العنصر g في c لنحصل على عنصر رتبته 6 وليكن هذا العنصر a، أي أن $a = cg$ و $|a| = 6$، الزمر الدورية المولدة بالعنصر a ولتكن $\langle a\rangle$ تحتوي على 6 عناصر، ولهذا يكون $[G : \langle a\rangle] = 2$، هذا يؤدي إلى أن $\langle a\rangle$ تكون زمرة جزية ناظمية من G، إذا كان $b \in G$ بحيث $b \notin \langle a\rangle$ و $b^2 \in \langle a\rangle$ وبالتالي $bab^{-1} \in \langle a\rangle$، وبما أن $|bab^{-1}| = |a|$ هذا يؤدي إلى أن $|bab^{-1}| = 6$ وبالتالي $bab^{-1} = a$ أو $bab^{-1} = a^5 = a^{-1}$، ولكن إذا كان $bab^{-1} = a$ هذا يؤدي إلى أن G زمرة تبديلية وهذا تناقض، إذن $bab^{-1} \neq a$، وبالتالي $bab^{-1} = a^5 = a^{-1}$ ويمكن إعادة كتابتها على الشكل $aba = b$.

الآن $b^2 \in \langle a\rangle$ لها ستة احتمالات مختلفة:

1) إذا كانت $b^2 = e$ هذا يؤدي إلى أن $|b| = 2$، وبما أن $aba = b$، $|a| = 6$ إذن تعريف D_6 متحقق وبالتالي $G \cong D_6$.

2) إذا كانت $b^2 = a$، فإن $|b^2| = |a|$ وهذا يؤدي إلى أن $|b| = 12$، وهذا يناقض كون G زمرة غير تبديلية وبالتالي $b^2 \neq a$.

3) إذا كانت $b^2 = a^2$، فإن $b^3 = a^2b = ba^{-2} = ba^4$ وبالضرب الطرفين في b^{-1} من اليسار يحصل على $b^2 = a^4$ وبالتالي $a^2 = a^4$ وهذا يؤدي إلى أن $|a| = 2$ وهذا تناقض وبالتالي $b^2 \neq a^2$.

4) إذا كانت $b^2 = a^3$، وبما أن $aba = b$، و $|a| = 6$ إذن تعريف Q_6 متحقق وبالتالي $G \cong Q_6$.

5) إذا كانت $b^2 = a^4$، فإن $b^3 = a^4b = ba^{-4} = ba^2$ وبالضرب الطرفين في b^{-1} من اليسار يحصل على $b^2 = a^2$ وبالتالي $a^2 = a^4$، وهذا يؤدي أن $|a| = 2$ وهذا تناقض وبالتالي $b^2 \neq a^4$.

6) إذا كانت $b^2 = a^5$، فإن$|b^2| = |a^5|$ وهذا يؤدي إلى أن $|b| = 12$ وهذا يناقض كون G زمرة غير تبديلية، إذن $b^2 \neq a^5$.

وهذا يوضح أن إذا كانت G زمرة غير تبديلية رتبتها 12، فإنها تماثل إحدى الزمر الأتية A_4 أو D_6 أو Q_6.

واضح من المثالين (1-7-1) و (1-7-2) أن الزمر A_4 و D_6 و Q_6 غير متماثلات.

■

مبرهنة(3-6) (Gallian, 2012; Stearns, 2015)

إذا كانت G زمرة رتبتها pq حيث p و q أعداد أولية و بحيث $p < q$ و p لا تقسم $(q-1)$، فإن $G \cong Z_{pq}$.

من المبرهنة (2-3-2-1) الزمرة G تكون دورية، وبالتالي فهي تماثل Z_{pq}. ولكن سنستخدم هنا برهان يختلف عن البرهان الموجود في المبرهنة (2-3-2-1).

البرهان

بفرض أن $|G| = pq$، فإنه بتطبيق نظريات سيلو في المبرهنة (2-3-2-1) يستنتج أن $n_p = 1$ و $n_q = 1$، وبالتالي عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p تكون وحيدة ولتكن K ورتبتها p (وبالتالي فهي دورية)، أيضا عدد زمر سيلو الجزئية من نوع q تكون

وحيدة ولتكن H ورتبتها q (وبالتالي فهي دورية)، ومن المبرهنة (2-3-1-2) الزمرتين K و H زمر جزئية ناظمية من G، وبما أن $K \cap H$ تكون زمرة جزئية من K و H، ومن مبرهنة لانجرانج فإن $K \cap H = 1$. ومن المبرهنة (2-3-4) يجد أن $|KH| = |K||H| = pq = |G|$، وبما أن $KH \leq G$ وبالتالي $G = KH$، وبما أن K زمرة دورية رتبتها p وبالتالي $K \cong Z_p$، وأيضا الزمرة H تكون زمرة دورية رتبتها q إذن $H \cong Z_q$، وبالتالي شروط المبرهنة (1-7-11) متحققة وهذا يؤدي إلى أن $G \cong Z_p \times Z_q \cong Z_{pq}$. ■

مثال (3-4)

إذا كانت G زمرة بحيث $|G| = 15$، بما أن $15 = 3 \times 5$، وبالتالي بتطبيق المبرهنة السابقة نجد أن $P = 3$، $q = 5$ ومنها نستنتج أن هناك زمرة واحده تكون متماثلة مع كل الزمر من الرتبة 15 وهي بالتحديد $G \cong Z_{15}$.

وبنفس الطريقة لكل الزمر من الرتب الأتية : 33، 35، 51، 65، 69، 77،87، 91...
هناك زمرة واحدة لكل رتبة تماثلها. ■

يختتم هذا الفصل بأخر تطبيق لنظرية سيلو في تصنيف الزمر المنتهية التي رتبتها p^2q حيث إن p ، q عددان أوليان و $p < q$ و $q \not\equiv 1(mod\ p)$، هنا سنربط نظريات سيلو بمبرهنات أخرى أساسية لنحصل على تصنيف هذه الزمرة.

مبرهنة (3-7)

إذا كانت G زمرة رتبتها p^2q حيث p و q عددان أوليان و $p < q$، $q \not\equiv 1(mod\ p)$، فإنها تماثل إحدى الزمرتين $Z_{p^2} \times Z_q$ أو $Z_p \times Z_p \times Z_q$.

من المبرهنة (2-3-3-1) الزمرة G تكون تبديلية، فإن من المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية الزمرة G تماثل إحدى الزمرتين $Z_{p^2} \times Z_q$ أو $Z_p \times Z_p \times Z_q$. ولكن سيستخدم هنا برهان مختلف عن برهان المبرهنة (2-3-3-1).

البرهان

بفرض أن $|G| = p^2 q$، فإنه بتطبيق نظريات سيلو في المبرهنة (2-3-3-1) يستنتج أن $n_p = 1$،$n_q = 1$ وهذا يؤدي إلى أن الزمرة G تحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع p رتبتها p^2، وتحتوي على زمرة سيلو جزئية وحيدة من نوع q رتبتها q . وبالتالي من المبرهنة (2-3-1-2) الزمرة G تحتوي علي زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع p ولتكن H وتحتوي على زمرة سيلو جزئية ناظمية من نوع q ولتكن K، وبما أن $|H| = p^2$ ،$|K| = q$ وبالتالي H تكون زمرة تبديلية و K تكون زمرة دورية، وبما أن $K \cap H$ تكون زمرة جزئية من K و H، ومن مبرهنة لانجرانج $K \cap H = 1$، وبالتالي من المبرهنة (2-3-4) $|KH| = |K||H| = pq = |G|$، وبما أن $KH \leq G$ إذن $G = KH$، وبما أن K زمرة دورية رتبتها q، فإن $K \cong Z_q$. وبما أن H زمرة تبديلية رتبتها p^2،فإن من المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية $H \cong Z_{p^2}$ أو $H \cong Z_p \times Z_p$، وهذا يؤدي إلى أن شروط المبرهنة (1-7-11) متحققة وبالتالي

$G \cong Z_{p^2} \times Z_q$ أو $G \cong Z_p \times Z_p \times Z_q$. ■

مثال (3-5)

إذا كانت G زمرة بحيث $|G| = 45 = 3^2.5$، وليكن $p = 3$ ، $q = 5$ ، $3 < 5$ ، $5 \not\equiv 1(mod3)$ وبالتالي بالتطبيق المبرهنة السابقة يتضح أن هناك زمرتين من الرتبة 45 تكون متشاكلة مع كل الزمر من الرتبة 45 وهي بالتحديد $Z_{3^2} \times Z_5$ أو $Z_3 \times Z_3 \times Z_5$. ■

الجدول التالي يبين تصنيف الزمر التي رتبتها أقل من 16.

جدول (1-3) يبين جدول تصنيف الزمر المنتهية التي رتبتها أقل من 16.

الزمر غير تبديلية	الزمر التبديلية	رتبة الزمرة
	$\{e\}$	1
	Z_2	2
	Z_3	3
	$Z_4 , Z_2 \times Z_2$	4
	Z_5	5
D_3	Z_6	6
	Z_7	7
D_4 , Q_4	$Z_8 , Z_2 \times Z_4,$ $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$	8
	$Z_9 , Z_3 \times Z_3$	9
D_5	Z_{10}	10
	Z_{11}	11
D_6 , Q_6 , A_4	Z_{12} , $Z_3 \times Z_2 \times Z_2$	12
	Z_{13}	13
D_7	Z_{14}	14
	Z_{15}	15

الخـــلاصـــــــــــــــــة

تناولت هذه الدراسة المفاهيم الأساسية للزمرة، ونظريات سيلو الأولى والثانية والثالثة، وتم برهان هذه النظريات باستخدام مبرهنة كوشي وتأثير الزمرة على المجموعة، وتناولت أيضا بعض تطبيقات نظريات سيلو ومن هذه التطبيقات: تمييز زمر سيلو الجزئية الناظمية، وتمييز الزمر الدورية، وتمييز الزمر التبديلية، وتمييز الزمر البسيطة، وكل ذلك كان بالترتيب حتى تم الوصول إلي الهدف المطلوب وهو تصنيف الزمر المنتهية، وتم تصنيف الزمر المنتهية باستخدام نظريات سيلو.

وصنفت هذه الدراسة الزمر المنتهية التي رتبتها تكون على احدى الصور التالية:

1. الزمرة التي رتبتها عدد أولي.
2. الزمرة التي رتبتها p^2 حيث p عدد أولي.
3. الزمرة التي رتبتها $2p$ حيث p عدد أولي.
4. الزمرة التي رتبتها pq حيث p, q عددان أوليان، $p < q$ ، p لا تقسم $q - 1$.
5. زمرة رتبتها p^2q حيث p ، q عددان أوليان و $p < q$ و $q \not\equiv 1(mod\ p)$.
6. الزمرة التي رتبتها 8.
7. الزمرة التي رتبتها 12.

وتوصلت هذه الدراسة إلي مجموعة نتائج:

- أن نظرية سيلو الأولى توضح وجود زمر سيلو الجزئية من نوع p، وأن نظرية سيلو الثانية توضح أن أي زمرتين سيلو جزئيتين من نوع p تكون مترافقة، وأن نظرية سيلو الثالثة تعطي معلومات عن عدد زمر سيلو الجزئية من نوع p من زمرة معطاة، وكل هذه المعلومات عن زمرة معطاة استخدمت للوصول إلى تصنيف الزمر المنتهية.
- زمرة سيلو الجزئية الناظمية تكون وحيدة.
- رتبة الزمرة التي يمكن وضعها على شكل قوى تحتوى على زمرة جزئية ناظمية.
- الزمرة التي تحتوي على الأغلب زمرة جزئية واحدة من كل رتبة تكون دورية.

- الزمرة تكون غير بسيطة إذا كانت لها زمرة سيلو جزئية وحيدة.
- ومن أهم النتائج التي توصلت إليها هذه الدراسة هو تصنيف الزمر المنتهية التي رتبتها أقل من 16، وتصنيف الزمر التي رتبتها تنطبق على الصور السابقة.

وتوصي هذه الدراسة بالبحث في تصنيف الزمر المنتهية التي رتبتها لا تنطبق على احدى الصور السابقة، كما توصي أيضا بالبحث في تصنيف الزمر المنتهية البسيطة باستخدام مبرهنة تصنيف الزمر المنتهية البسيطة.

قائمـــــــــة المصادر

سمحان, م. ع., الذكير، ب. ف. (2008). *نظرية الزمر*. الرياض: جامعة الملك سعود.

Axler, S., & Ribeb , K. A. (2007). *Graduate Texts in Mathematics Pierre Antoine Grillet Abstract Algebra* (Second Edition). New York: Springer-Verlag.

Burton, D. M. (1972). *Abstract and Linear Algebra*. Poston: Addison-Wesley Publishing.

Clark, A. (1984). *Elements of Abstract Algebra*. New York: Dover Publication , Inc.

Dummiit, D. S., & Foote, R. M. (2003). *Abstract Algebra*. Hoboken , NJ: John Wiley and Sobs INC.

Fraleigh, J. B. (2002). *Instructor`s Solution Manual to Accompany : A Frist Course in Abstract Algebra* (Seventh Edition). Maryland: Canyang jan.

Fraleigh, J. B. (2003). *A Frist Course in Abstract ALgebra* (Seventh Edition). Maryland: Canyang jan.

Gallian, J. A. (2012). *Contemporary Abstract Algebra* (Eighth Edition). Poston: Cengage Learning.

Herstein, I. N. (1996). *Abstract Algebra* (Third Edition). New Jersey: Prentice-Hall .

Hungerford, T. W. (1990). *Abstract Algebra Introduction.* philadelphia: Sannuers College Publishing.

Hungerford, T. W. (2003). *ALGEBRA* (Twelfth Edition). New York: Springer.

Idelhaj, A. (2016, July). *The Sylow Theorem and Their Applications*. Retrieved from https://www.semanticscholar.org/paper/THE-SYLOW-THEOREMS-AND-THEIR.

judson, T. W., & Stephen , F. (2013). *Abstract Algebra Theory and Applications.* Michgan: Orthogonal Publishing.

Keith, C. (2016). *Consequences of The Sylow Theorems*. Retrieved 8 20, 2020, from https:/www.coursehero.com/file/48513065/sylowapppdf.

Khanna, V. K., & Bhambri, S. (1998). *Course in Abstract Algebea.* New Delhi: Vikas Publishing Hoouse Put Limited.

Pinter, C. C. (2010). *A Book of Abstract ALgebra* . New York: Dover Publications.

Rotman, J. J. (2003). *Advanced Modrn Algebra* (Second Edition). New Jersey: Prentice - Hall.

Rotman, J. J. (2006). *A First Couese in Abstract Algebea.* New Jersey: Prentice Hall , Upper Saddle River.

Stearns, W. (2015). *The Sylow Theorem and Classification of Small Finite Order Group*. Retrieved 02 03, 2020, from https://digitalworks.union.edu/theses/395.

Therefore, this study reached a set of results, most notably:

- The first Sylow theorem states that there are Sylow p- subgroups, as the second Sylow theorem states that any two Sylow p- subgroups are conjugate, and the third Sylow theorem tells us about the number of Sylow p- subgroups of a given group, and all this information about a given group assisted me to classify finite groups.
- The Sylow p- subgroup normal is unity.
- The group's order can be put into the form of powers that contain a non-trivial normal subgroup.
- A group finite with at most one subgroup of any size is cyclic.
- A group is not simple if it has a single Sylow subgroup.
- The most important findings in this study are the classification of finite groups, which are order at last 16, and the classification of the finite groups that it was ordered apply to one of the previous concepts.

Therefore, this study recommends investigating the classification of finite groups whose order does not apply to one of the previous models or forms, also recommends investigating the classification of simple finite groups using classification simple finite group theorem.

Conclusion

This study provided the basic concepts of the group and Sylow's first, second and third theories. These theories were proven using Cauchy's theorem and action group on set. Furthermore, this study dealt with some applications of Sylow theories, including normal Sylow subgroup, non-trivial normal subgroup, characterizing cyclic group, characterizing abelian group, characterizing a simple group, all in order to reach the study's main purpose, which is to classify finite groups using Sylow's theories.

This study classified the finite groups, which were of order to one of the following forms:

1. The group that was ordered p where p is a prime number.
2. The group that was ordered p^2 where p is a prime number.
3. The group that was ordered $2p$ where p is a prime number.
4. The group that was ordered by pq where $q\ ,p$ are primes , $p < q$, p does not divide $q - 1$.
5. The group that was ordered by p^2q where $q\ ,p$ are primes , $q > p, q \not\equiv 1(mod\ p)$. .
6. A group of order 8.
7. A group of order 12.

ABSTRACT

This research project specifically focused on the basic concepts of the group, as all this was done in order. In addition, This study introduces the first, second and third Sylow theories and present the proof of these theories in detail using Cauchy's theorem and group action on set . Moreover, this study aims to illustrate some applications of Sylow theories, such as normal Sylow subgroup, non-trivial normal subgroup, characterizing cyclic group, characterizing Abelian group, characterizing a simple group. All these objectives lead us to the study's primary purpose, which is to classify finite groups using Sylow's theories .

In this study, the descriptive-analytical method was used and the information was collected through a general search in the information sources. Thus, this study reached the most important findings, which are:

- The Sylow p- subgroup normal is unity.
- The group's order can be put into the form of powers that contain a non-trivial normal subgroup.
- A group finite with at most one subgroup of any size is cyclic.
- A group is not simple if it has a single Sylow subgroup.
- A classification of finite groups, which are order at last 16.

State of Libya
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Alasmarya Islamic University
Faculty of Science
Department of Mathematics

Application of Sylow Theory in Classifying Finite Groups

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of Requirements for the Degree of master in Mathematics

BY:

ASMAA ATIA ALEYAN

Supervised By :

Dr . MUKHTAR ELTAHER ELZOBI

2022