دولة ليبيا

وزارة التعليـــم العالـــي والبحث العلمـــي

الجـامعـة الأسمرية الإســلاميـــة

كـلية العــلــوم

قســم الريـاضيــات

دراسة مقارنة بعض الطرق التحليلية(فصل المتغيرات– الدوال الذاتية) والطرق العددية(تحليل أدوميان – الفروقات المنتهية) لحل معادلة الموجة

Comparative Study to Solve the Wave Equation by Using Some Analytical Methods[Separation of Variables- Eigen Functions]and Numerical Methods[Adomian Decomposition- Finite Differences]

بحث مقدم ضمن متطلبات الحصول على درجة الإجازة العليا(الماجستير)

إعداد الطالبة: ريم عمران المهدوي

رقم القيد: 21803157

إشراف: أ.د. عمر على العيان

أستاذ الرياضيات – كلية العلوم

العام الجامعي: 2021-2022م

الآيـــة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجاتٍ

وَاللَّهُ بِما تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴾

صَدَقَ الله العَظيم

سورة المجادلة ـ الآية (11)

الإهـداء

أُهدي ثمرة جهدي المتواضع إلى:

أبي العزيز رحمه الله و أسكنه فسيح جنانه،،،

أمي الغالية أطال الله بعمرها ،،،

نور حياتي فلذات كبدي أبنائي(رواد، يقين، متاب)،،،

سر نجاحي وسندي زوجي الغالي ،،،

إخوتي وأخواتي الأعزاء رعاكم الله من كل مكروه ،،،

جميع أعضاء هيئة التدريس بقسم الرياضيات،،،

كل من قدم لي العون خلال فترة البحث والدراسة،،،

شكر وتقديـر

الحمد والشكر لله سبحانه وتعالى ،،،

بكل تقدير واحترام أتقدم بالشكر الجزيل والعرفان وعظيم التقدير والإمتنان لأستاذي الفاضل

أ.د.عمر على العيان

الذي شرفني بقبول الإشراف على بحثي ولما أبداه من تعاون ومتابعة ولما قدمه من توجيهات سديدة فكان له كبير الإسهام في إنجاز بحثي بالصورة التي بين أيديكم.

المحتويات

قائمة الجداول

قائمة جداول طريقة الفروق المنتهية [FDM]

قائمة الأشكال

أولاً: قائمة أشكال طريقة تقريب أدوميان [ADM]

ثانياً: قائمة أشكال طريقة الفروق المنتهية [FDM]

قائمة الرموز

ODE	Ordinary Differential Equation
PDE	Partial Differential Equation
W.E	Wave Equation
B.C	Boundary Condition
D.B.C	Dirichlet Boundary Condition
N.B.C	Neumann Boundary Condition
M.B.C	Mixed Boundary Condition
I.C	Initial Condition
SVM	Separation Variables Method
EFM	EigenFunction Method
ADM	Adomian Decomposition Method
FDM	Finite Differences Method

الملخص

يتضمن هذا البحث حلول معادلة الموجة في بعد واحد وبعدين باستخدام طرق مختلفة ،الطرق التحليلية طريقة فصل المتغيرات [SVM] وطريقة مفكوك الدوال الذاتية [EFM] والطرق العددية طريقة تحليل أدوميان[ADM] وطريقة الفروق المنتهية [FDM] ،وباستخدام برنامج الماتلاب ثم عمل مقارنة بين نتائج حلول الطرق العددية مع الحل التحليلي(الفعلي) ومن خلال النتائج المتحصل عليها وجدنا أنه لا يوجد اختلاف بين الحلول التحليلية والعددية.

ABSTARCT

This research includes solutions to the wave equation in one and two dimensions using different methods, Analytical Methods Separation of variables method[SVM] and Eigen function's method[EFM]and Numerical Method Adomian decomposition method[ADM],and Finite differences method[FDM]. by using Matlab program then comparison of the results was made between the solutions of the numerical solutions with the (exact) analytical solutions, and through the results obtained, we found that there is no difference between the analytical and numerical solutions.

مقدمة Introduction

الحمد لله، والصلاة والسلام على سيد المرسلين خاتم الأنبياء- محمد بن عبدالله- وعلى آله وصحبه أجمعين ،،،

إن معظم القوانين الطبيعية في الفيزياء مثل معادلة الموجة ومعادلات ماكسويل وقوانين نيوتن للتبريد وغيرها من القوانين والمعادلات البعض منها يمكن كتابتها بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية، وبعبارة أخرى فإن هذه القوانين تصف الظواهر الفيزيائية بإيجاد العلاقات بين الفضاء والمشتقات الجزئية بالنسبة للزمن، فالمشتقات الجزئية تظهر في هذه المعادلات لكونها تمثل أشياء طبيعية (مثل السرعة والعجلة والقوة وغيرها)، وعليه نحصل على معادلات تربط بين مشتقات جزئية لكميات مجهولة مراد معرفتها [1].

في هذا البحث سنقوم بدراسة نموذج من الظواهر الفيزيائية التي تمثل بمعادلة تفاضلية جزئية خطية من النوع الزائدي ومن الرتبة الثانية وهي تصف موجات المياه وتعبر عن انتشار الموجات الصوتية والكهرومغناطيسية أو نقل الاشارات الكهربائية في الكابل، تعرف باسم معادلة امتداد أو انتشار الموجة، وسنعمل على مقارنة بعض الطرق التحليلية (لمسألة القيمة الحدية والابتدائية المتجانسة وغير المتجانسة) والطرق العددية لمعادلة الموجة في بعد واحد و بعدين ومن هذا المنطلق سيتم تقسيم هذا البحث إلى أربعة فصول كالتالي:-

الفصل الأول سندرس العديد من التعريفات والمفاهيم الأساسية التي سنتطرق إليها أثناء دراستنا لهذا البحث.

الفصل الثاني سيحتوي على الطرق التحليلية لحل معادلة الموجة في بعد واحد وبعدين، ومن أبرز هذه الطرق طريقة فصل المتغيرات Separation of variables method[SVM] وطريقة الدوال الذاتية EigenFunction method[EFM] وستكون هذه الطرق مدعمة بالعديد من الأمثلة المختلفة.

الفصل الثالث سندرس الطرق العددية لحل معادلة الموجة الخطية مثل طريقة الأدوميان Adomian decomposition method[ADM] والتي قدمت لأول مره بواسطة العالم جورج

أدوميان سنة (1981م)، ومن ذلك الحين تم تطبيق الطريقة لحل المعادلات التفاضلية والتكاملية للمسائل الخطية وغير خطية في الرياضيات والفيزياء والطوبولوجيا والكيمياء، ومن مميزات هذه الطريقة أنه يمكن تطبيقها لكل أنواع المعادلات التفاضلية والتكاملية سواء كانت خطية أو غير خطية متجانسة أو غير متجانسة ذات معاملات ثابتة أو معاملات متغيرة [2].

و الطريقة الأخرى المستخدمة لحل معادلة الموجة في بعد واحد وبعدين طريقة الفروق المنتهية Finite difference method[FDM] والتي تعد من أبسط الطرق وأقدمها لحل المعادلات التفاضلية وقد اكتشفت من قبل العالم أويلر (1707–17833) كاليفورنيا في بعد واحد من الفضاء وامتدت إلى البعد الثاني من قبل رانج (1856–1927) كاليفورنيا1908، وبدأ ظهورها في التطبيقات العددية في أوائل الخمسينات، سيتم توضيح هذه الطرق بالعديد من الامثلة المختلفة [3].

الفصل الرابع سيناقش نتائج الحلول التحليلية لمعادلة الموجة الخطية في بعد وبعدين ومقارنتها بعدة أمثلة مختلفة مع النتائج المتحصل عليها من الطرق العددية، وباستخدام برنامج الماتلاب Matlab سنوضح مقارنة النتائج الموضحة في صورة جداول وأشكال بيانية.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

Fundamental Concepts

1.1 مقدمة Introduction

سنتطرق في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بالمعادلات التفاضلية الجزئية والتحليل العددي.

2.1 مفاهيم أساسية Fundamental concepts

تعريف1.2.1

المعادلة التفاضلية العادية Ordinary Differential Equation[ODE] معادلة تعتمد على متغير مستقل واحد فقط، أي لها مشتقات من متغير واحد فقط.

والصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية :

$$y^m + p_{(m-1)}(x)y^{(m-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x)$$

حيث $p_i(x)$،$g(x)$ دوال في المتغير x و $i = 0,1,2,\dots,m-1$ [4].

تعريف 2.2.1

المعادلة التفاضلية الجزئية Partial Differential Equation[PDE] معادلة تفاضلية تحتوي على دالة واحدة أو أكثر من الدوال المجهولة و مشتقاتها الجزئية.

وبشكل خاص، الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية في المتغير التابع u والمتغيرين المستقلينy, x تكون بالشكل الاتي:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy+}D\left(x,y,u,u_x,u_y\right) = R(x,y)$$

حيث D, C, B, A،$R(x,y)$ ثوابت أو دوال معلومة بدلالة y, x .

إذا كان $B^2 - 4AC = 0$ فإن المعادلة التفاضلية الجزئية تكون معادلة ذات نمط مكافئ.

إذا كان $B^2 - 4AC > 0$ فإن المعادلة التفاضلية الجزئية تكون معادلة ذات نمط زائد.

إذا كان $B^2 - 4AC < 0$ فإن المعادلة التفاضلية الجزئية تكون معادلة ذات نمط ناقص [2].

في هذا البحث سنقتصر على دراسة المعادلة التفاضلية الجزئية من النوع الزائدي وبالتحديد معادلة الموجة الخطية التي تعتبر معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية ومن النوع الزائدي.

تعريف 3.2.1

المعادلة التفاضلية الجزئية إما أن تكون معادلة خطية Linear أو غير خطية Non-linear، فالمعادلة الخطية يكون المتغير التابع u وجميع مشتقاته تظهر بصيغة خطية .

فمثلا:

$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t$ معادلة تفاضلية جزئية خطية.

$u_{tt} = u_{xx} + u^2$ معادلة تفاضلية جزئية غير خطية [5].

تعريف 4.2.1

تصنف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى عدة أصناف كالتالي:

1- رتبة Order المعادلة التفاضلية الجزئية: وهي رتبة أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية، فمثلا

$u_{tt} = c^2u_{xx}$ من الرتبة الثانية

$u_t = u_x$ من الرتبة الأولى

2- عدد المتغيرات وهو عدد المتغيرات المستقلة، فمثلا:

$u_{tt} = c^2u_{xx}$ ذات متغيرين مستقلين t, x.

3- التجانس، فالمعادلة

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (1)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G ثوابت أو دوال معلومة بدلالة y, x، تكون متجانسة Homogenous إذا كان الطرف الأيمن $G(x, y)$ يساوي صفر لكل y, x .

4− نوعيــة المعــاملات: فــي المعادلــة (1) إذا كانــت A, B, C, D, E, F, G ثوابـت فعنـدئـذ تسـمى المعادلة ذات معاملات ثابتة، وإذا لم تكن كذلك تسمى المعادلة ذات معاملات متغيرة .

تعريف5.2.1

الحل التام هو الحل الذي يحتوي على العدد الصحيح من الدوال الاختيارية المناظرة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة، وأي حل أخر يسمي حل خاص particular solution والحل العام general solution هو مجموع الحل التام والحل الخاص، والجدير بالذكر أن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الجزئية يجب أن يحقق إضافة إلى المعادلات التفاضلية شروط أخرى هي الشروط الحدودية Boundary conditions والشروط الابتدائية Initial conditions [6].

تعريف6.2.1

الشروط الحدودية Boundary conditions للمعادلة التفاضلية الجزئية تنقسم على النحو التالي:

1. إذا أعطيت قيمة الدالة u على الحدود فالمسألة تكون مسالة ديرلشيت Dirichlet problem.
2. إذا أعطيـت المشـتقة الاتجاهيـة $\frac{\partial u}{\partial n}$ فـي الاتجـاه العمـودي علـى الحـدود فالمسـألة تكـون مسـألة نيومان Neumann problem .
3. إذا أعطيت تركيب خطي لشرطي ديرلشيت ونيومان (مختلطة) $l\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} + hu$ فالمسألة تكون مسألة روبن Robin problem [7].

نظرية

إذا كان

$$u_i \ \ , i = 1,2,3, \dots$$

تمثل حلول لنفس المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية والمتجانسة فإن أي تركيب خطي للحلول

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$$

حيث c_i ثوابت، تكون حل لنفس المعادلة التفاضلية الجزئية ، وتعرف هذ النظرية بقاعدة بناء الحلول [8].

تعريف7.2.1

نفرض أن $X \subseteq R$ الدالة $f: X \to R$ تكون:

1. دالة زوجية Even Function إذا كان:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

2. دالة فردية Odd Function إذا كان:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X \quad [9].$$

تعريف 8.2.1

المنظومة (المعادلة التفاضلية + الشروط الحدية + الشروط الابتدائية) تكون متجانسة إذا كانت المعادلة التفاضلية والشروط الحدية متجانسة ، وتكون غير متجانسة إذا كانت المعادلة التفاضلية أو الشروط الحدية غير متجانسة أو كلاهما غير متجانس، فمثلا:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t), t > 0 \text{ , ثابت } c$$

$$B.C: \ u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$I.C: \ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), 0 \le x \le l$$

تكون منظومة غير متجانسة وعدم التجانس موجود في المعادلة التفاضلية الجزئية[8].

تعريف9.2.1

الدالة المكاملة$w(x)$ تسمى دالة وزن على الفترة$[a,b]$ إذا كانت$w(x) \ge 0$ لكل$a \le x \le b$ ، ولكن $w(x) \neq 0$ على أي فترة جزئية للفترة$[a,b]$ [8].

تعريف10.2.1

معادلة الموجة Wave Equation مع القوى الخارجية هي معادلة غير متجانسة مع معاملات ثابتة والشكل العام لمعادلة الموجة يكون على الصورة:

معادلة الموجة في بعد واحد

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t)$$

معادلة الموجة في بعدين

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t)$$

معادلة الموجة في ثلاث أبعاد

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + F(x, y, z, t)$$

حيث $F(x,t)$ و$F(x,y,t)$ و$F(x,y,z,t)$ تمثل قوى خارجية، c ثابت [10].

تعريف11.2.1

ليكن m,n أعداد صحيحة غير سالبة.

تعرف خاصية الدوال المتعامدة Orthogonally Functions Properties كالتالي:

$$\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & n = m \\ \pi & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \quad [11].$$

تعريف12.2.1

i. يعرف المؤثر التفاضلي كالتالي

$$L_x(.) = \frac{d}{dx}(.), L_x(u) = \frac{du}{dx}$$

المؤثر التفاضلي L يكون مؤثر خطي إذا كان

$$L(u+v) = l(u) + l(v)$$

$$L(\alpha u) = \alpha l(u), \alpha \in R$$

ii. يعرف المؤثر العكسي كالتالي

$$L_x{}^{-1}(.) = \int (.)dx$$

$$L_x{}^{-1}(u) = \int (u)dx$$

ومن خصائص المؤثر العكسي

$$L[L^{-1}(u)] = u$$

$$L^{-1}[L(u)] = u$$

$$L^{-1}(\propto (u)) = \propto L^{-1}(u), \alpha \in R$$ [2].

تعريف13.2.1

منظومة ستورم ليوفيل Sturm-Liouville هي منظومة تتكون من معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية مع شرطين حديين خطيين متجانسين وتكتب على الصورة

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(r(x).\frac{\mathrm{d}u(\lambda,x)}{\mathrm{d}x}\right) + [\lambda p(x) - q(x)]u(\lambda,x) = 0, a < x < b$$

$$-l_1 u_x(\lambda,a) + h_1 u(\lambda,a) = 0$$

$$l_2 u_x(\lambda,b) + h_2 u(\lambda,b) = 0$$

حيث h_1, h_2, l_2, l_1 ثوابت حقيقية و غير صفرية ، λ وسيط و تسمي بالقيم الذاتية $u(\lambda,x)$ تسمى بالدوال الذاتية.

والدوال المعيارية المتعامدة لمنظومة ستورم– ليوفيل هي:

$$u_n(\lambda,x) = \frac{1}{N}u(\lambda,x)$$

$$N^2 = \|u(\lambda,x)\|^2 = \int_a^b w(x)(u(\lambda(x))^2 dx$$

حيث$w(x)$ دالة الوزن [8].

مثال1

أوجد الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة للمنظومة التالية:

$$X``(x) + \lambda^2 X(x) = 0\ , 0 \le x \le l\ , \lambda > 0$$

$$(B.C):\ \ X`(0) = X`(l) = 0$$

الحل

حل المعادلة التفاضلية يكون:

$$X_n(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

وبتطبيق الشرطين الحديين نحصل على

$$X`(0) = 0 = B$$

$$X`_n(L) = -A\lambda\sin(\lambda l) = 0$$

أي أن

$$\lambda l = n\pi, n = 1,2,3, \ldots$$

وهكذا القيم الذاتية تكون

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, n = 1,2,3, \ldots$$

والدوال الذاتية تكون

$$X_n(x) = A\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

هذا يعني أن الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة هي

$$X_n(x) = \frac{1}{N}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

حيث أن

$$N^2 = \int_0^l (\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right))^2 dx = \frac{l}{2}$$

أي أن الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة هي

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), n = 1,2,3, \ldots$$

تعريف14.2.1

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة مقطعيا ودورية على الفترة $-l \leq x \leq l$ ،فإن متسلسلة فوريه لدالة $f(x)$ تعرف كما يلي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx , n = 1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx , n = 1,2, \ldots\_ [9].$$

تعريف15.2.1

1. إذا كانت$f(x)$ دالة فردية ومتصلة مقطعيا على الفترة $0 \leq x \leq l$، فإن متسلسلة فورييه لدالة الجيب للدالة $f(x)$ تكون:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

حيث أن

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \,, n = 1,2,3, \dots$$

2. إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية و متصلة مقطعيا على الفترة $0 \leq x \leq l$ ، فإن متسلسلة فورييه لدالة جيب التمام لدالة $f(x)$ تكون:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

حيث أن

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \,, n = 1,2,3, \dots$$

مثال1

أوجد متسلسلة فورييه للدالة:

$$f(x) = x^2, 0 < x < l$$

الحل

حيث أن الدالة $f(x)$ دالة زوجية إذاً

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

و

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x^2 dx$$

$$a_0 = \frac{l^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$a_n = \frac{4l^2 \cos(n\pi)}{(n\pi)^2} = \frac{4l^2(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$f(x) = \frac{l^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^2(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), n = 1,2,3, \ldots$$

نظرية

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، $f'(x)$ دالة متصلة مقطعيا على الفترة $a < x < b$ فإن متسلسلة فورييه العامة تكون :

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)$$

حيث

$$c_n = \int_a^b W(x) f(x) X_n(x) dx$$

و $X_n(x)$ الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة، $W(x)$ دالة الوزن ، وتعرف هذه النظرية بمفكوك متسلسلة فورييه بدلالة الدوال الذاتية[8].

3.1 متسلسلة تايلور Taylor series

ليكن $f(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق عند جوار $x = a$، نستطيع تقريب هذه الدالة إلى دالة كثيرة الحدود بحيث تكتب على شكل متسلسلة متقاربة والتي تسمى متسلسلة تايلور Taylor series وتعطى بالصيغة :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

أو بصيغة أخرى

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

تعريف 1.3.1

في متسلسلة تايلور Taylor series إذا كانت $a = 0$، عندئذ تسمى المتسلسلة بمتسلسلة ماكلورين Maclaurin series التي تأخذ الصيغة :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

ومن الأمثلة المألوفة لمتسلسلة ماكلورين Maclaurin series:

$$1. \quad e^x = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$2. \quad \sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$3. \quad \cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad [12].$$

تعريف 2.3.1

مفكوك تايلور لدالة $f(x)$ عند نقطة تبعد عنها مسافة صغيرة h أي أن $f(x+h)$ يكون:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

وبإعادة ترتيب الحدود

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!} f''(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \cdots$$

وبإهمال الحدود التي تحتوي على المشتقة الثانية صعودا نحصل على:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(\mathrm{h})$$

وهذا ما يمسى تقريب الفرق الأمامي Forward difference approximation.

تعريف3.3.1

مفكوك تايلور لدالة $f(x)$ عند نقطة مجاورة تقع قبل النقطة بمسافة $h-$ أي أن $f(x-h)$ يكون

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)-\cdots$$

وبإعادة ترتيب الحدود

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2!}f''(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x)+\cdots$$

وبإهمال الحدود التي تحتوي على المشتقة الثانية صعودا نحصل على:

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x+h)}{h}+\mathrm{O(h)}$$

وهذا ما يمسى تقريب الفرق الخلفي Backward difference approximation.

تعريف4.3.1

مفكوك تايلور لدالة $f(x)$عند نقطتين وهما $f(x+h)$،$f(x-h)$ على التوالي يكون

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots \quad (1)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)-\cdots \quad (2)$$

بطرح المعادلة (1) من (2) نحصل على

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^3}{3}f'''(x)$$

وبإهمال الحدود التي تحتوي على المشتقة الثانية صعودا نحصل على:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\mathrm{O}(h^2)$$

وهذا ما يمسى تقريب الفرق المركزي Central difference approximation.

تعريف5.3.1

للحصول على تعبير رياضي تقريبي للمشتقة الثانية ، لنأخذ الدالة $f(x)$، ولنجد مفكوك تايلور عند نقطتين وهما $f(x+h)$ و $f(x-h)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \quad (1)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) - \cdots \quad (2)$$

بجمع المعادلتين(1) و(2) نحصل على

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^4 + \cdots$$

وبإهمال الحدود $\frac{h^2}{12}f^4$ صعودا نحصل على:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathrm{O}(\mathrm{h}^2) \ \ [3].$$

الفصل الثاني

الطرق التحليلية(فصل المتغيرات–الدوال الذاتية)

Analytical Methods(Separation of variables-Eigen function's)

1.2 مقدمة Introduction

سندرس في هذا الفصل بعض الطرق التحليلية لحل معادلة الموجة الخطية في بعد واحد وفي بعدين سواءً كانت متجانسة أو غير متجانسة والشروط الحدية متجانسة أو غير متجانسة، ومن أهم مميزات الطرق التحليلية أنه يمكن تعميمها إلى البعد n وبالتالي يمكن الحصول على حل معادلة الموجة في أي بعد ومن أبرز هذه الطرق:

- طريقة فصل المتغيرات Separation of variables method[SVM]
- طريقة مفكوك الدوال الذاتية Eigen function's method[EFM]

2.2 طريقة فصل المتغيرات لحل معادلة الموجة المتجانسة في بعد واحد

تعتبر طريقة فصل المتغيرات الطريقة الأساسية لحل معادلة الموجة المتجانسة ذات الشروط الحدية المتجانسة، و يمكن اللجوء إليها أحيانا في حالة الشروط الحدية غير المتجانس ولتوضيح فكرة الحل بفصل المتغيرات ندرس الحالات التالية

1.2.2 معادلة الموجة المتجانسة والشروط الحدية المتجانسة

ندرس الحالات الاتية لمعادلة الموجة من هذا النوع وذلك حسب نوع الشروط الحدية

(i) شرط ديرشليت الحدودي Dirichlet boundary condition

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}\, , t > 0, 0 < x < l \qquad (1)$$

$$u\,(0, t) = u(l, t) = 0, t > 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x, 0) = f(x)\ \ , u_t(x, 0) = g(x), 0 \leq x \leq l \quad (I.C)$$

حيث l, c ثوابت.

الحل

- **الخطوة الأولى**

نفرض أن الحل يكون على الصورة

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (2)$$

حيث $X(x)$ دالة في x و $T(t)$ دالة في t .

بالتعويض عن $u(x,t)$ في المعادلة (1) نحصل على

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t)$$

بالقسمة على $c^2X(x)T(t)$ نتحصل على

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (3)$$

كل من طرفي المعادلة (3) يعتمد على متغير مستقل واحد فقط لذلك كلا من طرفي المعادلة يساوي $\propto$.

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \propto$$

وبالتالي نحصل على

$$X''(x) - \propto X(x) = 0 \qquad (4)$$

$$T''(t) - \propto c^2T(t) = 0 \qquad (5)$$

وتبعاً لثابت $\propto$ تظهر ثلاث حالات:

الحالة الأولى عندما $\propto = 0$

حل المعادلة (4) يكون

$$X''(x) = 0$$
$$X(x) = c_1x + c_2$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت.

وبتطبيق الشرطين الحديين.

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

وهذا يعني أن أحدهما على الأقل يساوي صفر.

وحيث أن $T(t) \neq 0$ لأنها أحد عوامل $u(x,t)$ ، $t > 0$ إذاً $X(x) = 0$ وبالمثل

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

إذاً $T(t) \neq 0$ ، فإن $X(l) = 0$ وهذا يحقق

$$X(0) = c_1(0) + c_2 \quad \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X(l) = c_1(l) + c_2 \;\; \Longrightarrow \;\; c_1 l = 0\,, \qquad l \neq 0$$

$$\Longrightarrow c_1 = 0$$

أي أن $X(x) = 0$ وبالتالي $u(x,t) = 0$ نحصل على حل صفري فقط .

الحالة الثانية عندما $\propto > 0$، نفرض أن $\propto = \lambda^2$

$$\mathrm{X}''(x) - \lambda^2 \mathrm{X}(x) = 0$$

و الحل العام لها يكون

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

وبتطبيق الشرطين الحدين

$$X(0) = A + B \Longrightarrow A + B = 0 \Longrightarrow A = -B$$

$$X(x) = A\left[e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}\right]$$

$$X(l) = A\left[e^{-\lambda l} - e^{\lambda l}\right] = 0$$

$$\Longrightarrow A = 0$$

$$, A = -B \Longrightarrow B = 0$$

وبالتالي $u(x,t) = 0$ نحصل على حل صفري فقط.

الحالة الثالثة عندما $\propto < 0$، بوضع $\propto = -\lambda^2$ حيث λ عدد حقيقي.

وبالتعويض عن قيمة $\propto$ في المعادلة (4) والمعادلة (5) نحصل على

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (6)$$

$$T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0 \qquad (7)$$

الحل العام للمعادلة (6) يكون

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \qquad (8)$$

حيث A ، B ثابتين.

- **الخطوة الثانية**

تطبيق الشروط الحدية $u(0,t) = u(l,t) = 0$ في المعادلة (8) نحصل على

$$X(0) = A = 0$$

$$X(l) = B\sin(\lambda l) = 0$$

وحتى لا نحصل على الحل الصفري فإن $B \neq 0$ وبالتالي

$$\sin(\lambda l) = 0 \Longrightarrow \lambda l = n\pi\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, n = 1,2,3,\ldots$$

وبذلك

$$X_n(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), n = 1,2,3,\ldots$$

وحل المعادلة (7) يكون

$$T(t) = a_n\cos(\lambda_n ct) + b_n\sin(\lambda_n ct)\,, n = 1,2,3,\ldots$$

وبالتعويض عن $X(x)$،$T(t)$ في المعادلة (2) نحصل على

$$u(x,t) = \sin(\lambda_n x)\,(A_n\cos(\lambda_n ct) + B_n\sin(\lambda_n ct))$$

وبأخذ تركيب خطي لانهائي للحلول

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\,(A_n(\cos\lambda_n ct) + B_n \sin(\lambda_n ct)) \quad (9)$$

- **الخطوة الثالثة**

نطبق الشرط الابتدائي $u(x,0) = f(x)$ نجد أن

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

أي أن A_n معامل متسلسلة فورييه لدالة الجيب للدالة $f(x)$ فيكون

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad (10)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي $u_t(x,0) = g(x)$ نجد أن

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\lambda_n \mathrm{c}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

أي أن B_n معامل متسلسلة فورييه لدالة الجيب للدالة $g(x)$ فيكون

$$B_n = \frac{2}{\lambda_n cl}\int_0^l u_t(x,0)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda_n cl}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad (11)$$

إذاً حل المعادلة (1) هو المعادلة

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\,(A_n(\cos\lambda_n ct) + B_n \sin(\lambda_n ct))$$

وA_n معطى بالمعادلة (10)، B_n معطى بالمعادلة (11).

ملاحظة:

1- عندما $g(x) = 0$ فإن $B_n = 0$ وبالتالي

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (12)$$

حيث A_n تعطى بالمعادلة (10).

2- عندما $f(x)=0$ فإن $A_n=0$ وبالتالي

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (13)$$

حيث B_n تعطى بالمعادلة (11).

مثال 2

أوجد حل معادلة الموجة التالية:

$$u_{tt}-4u_{xx}=0, t>0\ , 0<x<\pi$$

$$B.C: u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

$$I.C: u(x,0)=\sin 2x\ , u_t(x,0)=0$$

الحل

من المثال 1

وحيث أن $c=2\ , l=\pi$ فإن شكل الحل يكون

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)\left(A_n\cos(2nt)+B_n\sin(2nt)\right)$$

وبما أن $g(x)=0$ فإن $B_n=0$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\sin(nx)\,dx$$

ومن خلال خواص الدوال المتعامدة نجد أن

$$A_n=\begin{cases}1 & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases}$$

أي أن

$$u(x,t) = \cos(4t)\sin(2x)$$

مثال 3

أوجد حل معادلة الموجة التالية:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, t > 0\,, 0 < x < 1$$

$$B.C:\; u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$I.C: u(x,0) = \sin(5\pi x) + 2\sin(7\pi x), u_t(x,0) = 0$$

الحل

من المثال 1، وحيث $c \in \mathcal{R}\,, l = 1$ فإن شكل الحل يكون

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\left(A_n \cos(cn\pi t) + B_n \sin(cn\pi t)\right)$$

وبما أن $g(x) = 0$، فإن $B_n = 0$ و

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l (\sin(5\pi x) + 2\sin(7\pi x))\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= \begin{cases} 1 & n = 5 \\ 2 & n = 7 \\ 0 & \mathrm{n} \neq 5,7 \end{cases}$$

أي أن

$$u(x,t) = \sin(5\pi x)\cos(5c\pi t) + 2\sin(7\pi x)\cos(7\pi ct)$$

(ii) شرط نيومان الحدودي **Neumann boundary condition**

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}\;\;, t > 0\,, 0 < x < l \qquad (1)$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \qquad (I.C)$$

الحل

نفرض أن

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (2)$$

حيث $X(x)$ دالة في x و $T(t)$ دالة في t .

بالتعويض عن $u(x,t)$ في المعادلة (1) نحصل على

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t)$$

بالقسمة على $c^2X(x)T(t)$ نحصل على

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

نلاحظ أن طرفي المعادلة (3) يعتمد على متغير مستقل واحد فقط ولا يوجد عامل مشترك بينهما لذلك كلا من طرفي المعادلة يساوي $\propto$.

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \propto$$

ومنها نحصل على

$$X''(x) - \propto X(x) = 0 \qquad (4)$$

$$T``(t) - \propto c^2T(t) = 0 \qquad (5)$$

وتبعاً لثابت $\propto$ توجد ثلاث حالات

الحالة الأولى عندما $\propto = 0$ ، حل المعادلة (4) يكون

$$X''(x) = 0 \Longrightarrow X'(x) = c_1 \Longrightarrow X(x) = c_1x + c_2$$

ومن خلال الشرطين الحديين

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0$$
$$u_x(l,t) = X'(l)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(l) = 0$$

نجد أن

$$X(x) = c_2$$

حيث c_2 ثابت اختياري.

الحالة الثانية عندما $\propto > 0$ ، نفرض أن $\propto = \lambda^2$

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$$

و الحل العام لها يكون

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

وبتطبيق الشرطين الحدين

$$X'(l) = 0 \text{ ، } X'(0) = 0$$

أي أن $c_1 = c_2 = 0$ ومنها يكون $u(x,t) = 0$ نحصل على حل صفري فقط.

الحالة الثالثة عندما $\propto < 0$ ، بوضع $\propto = -\lambda^2$ حيث λ عدد حقيقي.

وبالتعويض عن قيمة $\propto$ في المعادلة (4) والمعادلة (5) نحصل على

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (6)$$

و حلها العام يكون

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \qquad (7)$$

حيث A ، B ثابتين.

ومن خلال الشرطين الحدين

$$X'(l) = 0 \,, X'(0) = 0$$

نحصل على

$$X_n(x) = A_n \cos(\lambda_n x)\,, \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 , n = 1,2, \dots$$

الحل العام للمعادلة

$$T^{``}(t) - \propto c^2 T(t) = 0$$

عندما $\propto < 0$ و $\propto = -\lambda^2$، يكون

$$T(t) = c_1 \cos(\lambda_n ct) + c_2 \sin(\lambda_n ct) \ , n = 1,2,3, \dots$$

وعندما $\propto = 0$، يكون

$$T_0(t) = a_0 + \mathrm{b}_0 \mathrm{t}$$

إذا

$$u_0(x,t) = X_0(x) T_0(t)$$

$$u_0(x,t) = c_2(a_0 + \mathrm{b}_0\mathrm{t}) = A_0 + \mathrm{B}_0\mathrm{t}$$

لذلك حل المعادلة (1) يكون

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$u(x,t) = X_0(x)T_0(t) + X_n(x)T_n(t)$$

حيث

$$u_0(x,t) = A_0 + \mathrm{B}_0\mathrm{t}$$

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + \mathrm{B}_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

إذاً

$$u(x,t) = A_0 + \mathrm{B}_0\mathrm{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + \mathrm{B}_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

و حيث أن A_0 , A_n عوامل متسلسلة فورييه لدالة جيب التمام للدالة $f(x)$ فإن

$$A_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

و B_0 , B_n عوامل متسلسلة فورييه لدالة جيب التمام للدالة $g(x)$ فإن

$$B_0 = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

مثال2

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = 5u_{xx} \quad ,t > 0\,,0 < x < 1$$

$$B.C:\ \ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

$$I.C: u(x,0) = 34 + \cos(\pi x) + 3\cos(5\pi x)$$

$$u_t(x,0) = 23 + \cos(5\pi x) - 26\cos(9\pi x)$$

الحل

من المثال 1

وحيث أن $c = \sqrt{5}$ ، $l = 1$ إذا:

الصيغة العامة للحل تكون على الصورة

$$u(x,t) = A_0 + \mathrm{B}_0\mathrm{t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + \mathrm{B}_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

لإيجاد A_0 , A_n نعوض بالشرط الابتدائي $u(x,0) = f(x)$

$$A_0 = 2\int_0^1 (34 + \cos(\pi x) + 3\cos(5\pi x))dx = 34$$

$$A_n = 2\int_0^1 (34 + \cos(\pi x) + 3\cos(5\pi x))\cos(n\pi x)\,dx$$

$$A_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3 & n = 5 \\ 0 & n = 9 \\ 0 & n \neq 1,5,9 \end{cases}$$

ولإيجادB_0 , B_n نعوض بالشرط الابتدائي $u_x(x,0) = g(x)$

$$B_0 = 2\int_0^1 (23 + \cos(5\pi x) - 26\cos(9\pi x))dx = 23$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^1 (23 + \cos(5\pi x) - 26\cos(9\pi x))\cos(n\pi x)\,dx$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 1 & n = 5 \\ 0 & n = 9 \\ 0 & n \neq 1,5,9 \end{cases}$$

إذا

$$u(x,t) = 34 + 23t + \cos(5\pi x)\big(3\cos\big(3\sqrt{5}\pi t\big) + \sin\big(\sqrt{5}\pi t\big)\big) + \cos(\sqrt{5}\pi t)\cos(\pi x)$$

مثال3

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = 4u_{xx}\ , t > 0\ , 0 < x < \pi$$

$$B.C:\ \ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$

$$I.C:\ \ u_t(x,0) = 0\ , u(x,0) = 2 + \cos(x)$$

الحل

من المثال 1، الصيغة العامة للحل تكون على الصورة

$$u(x,t)=A_0+\mathrm{B}_0\mathrm{t}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)+\mathrm{B}_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

بما أن $u_t(x,0)=0$ فإن

$$B_n=0$$

وحيث أن $c=2\,,l=\pi$ إذا

$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(2nt)\cos(nx)$$

لإيجاد A_0,A_n نعوض بالشرط الابتدائي

$$u(x,0)=2+\cos(x)$$

$$A_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2+\cos(x)dx=4$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2+\cos(x))\cos(nx)dx$$

$$A_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

إذاً

$$u(x,t)=4+\cos(x)\cos(2t)$$

(iii) شرط الحدودي المختلط **Mixed boundary condition**

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt}=c^2u_{xx},t>0\,,0<x<l \qquad (1)$$

$$u(0,t)=u_x(l,t)=0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = f(x)\, , u_t(x,0) = g(x) \qquad (I.C)$$

الحل

باستخدام نفس أسلوب الحل للحالتين السابقتين نجد أن الصيغة العامة للحل تكون كالتالي:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi ct}{2l}\right) + B_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi ct}{2l}\right)\right] \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right)$$

حيث A_n معامل متسلسلة فورييه لدالة الجيب لدالة $f(x)$ أي أن

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right) dx$$

و B_n معامل متسلسلة فورييه لدالة الجيب لدالة $g(x)$ أي أن

$$B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi l}\int_0^l g(x) sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right) dx$$

2.2.2 معادلة الموجة المتجانسة والشروط الحدية غير المتجانسة

في هذه الحالة أحيانا لا يمكن تطبيق طريقة فصل المتغيرات مباشرةً وذلك لعدم تجانس الشروط الحدية، لذلك نلجأ إلى طريقة تعرف باسم طريقة التعويض يتم فيها معالجة عدم التجانس في المسألة أولا ثم نطبق فصل المتغيرات، وحيث أن في مسائل القيم الحدية يوجد نوعان من عدم التجانس، عدم تجانس معتمد على الزمن وعدم تجانس مستقل عن الزمن، إذا كان عدم التجانس مستقل عن الزمن نستخدم طريقة التعويض أي نفرض أن الحل على الصورة:

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$$

هذا الفرض يتم استخدامه أيضا في حالة عدم التجانس موجود في المعادلة التفاضلية الجزئية.

إذا كان عدم التجانس معتمد على الزمن نفرض أن الحل على الصورة

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x,t)$$

يتم اختيار $\psi(x,t)$ بحيث يتم نقل عدم التجانس من الشروط الحدية إلى المعادلة التفاضلية في $v(x,t)$ ، واحدى طرق اختيار $\psi(x,t)$ كالتالي:

- في حالة عدم التجانس مع شروط ديرشليت أو الشروط المختلطة نفرض أن

$$\psi(x,t) = a(t)x + b(t)$$

أي أن $\psi(x,t)$ تركيب خطي لعدم التجانس.

- في حالة عدم التجانس مع شروط نيومان نفرض أن

$$\psi(x,t) = a(t)x^2 + b(t)$$

أي أن $\psi(x,t)$ متعددة حدود من الدرجة الثانية [8].

ولتوضيح هذه الحالة ندرس الحالات الاتية:

(i) شرط ديرشليت الحدودي **Dirichlet boundary condition**

مثال1

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}\ , t > 0\ , 0 < x < l \qquad (1)$$

$$B.C:\ u(0,t) = \alpha\ , u(l,t) = \beta\ , t > 0$$

$$I.C:\ u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x), 0 \le x \le l$$

حيث β, α ثوابت غير صفرية.

الحل

نفرض أن حل المعادلة (1) كالتالي:

$$u(x,t) = \psi(x) + v(x,t) \qquad (2)$$

نعوض عن $u(x,t)$ في المعادلة (1) فنحصل على

$$v_{tt} = c^2 \left(v_{xx} + \frac{d^2\psi}{dx^2} \right)$$

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + c^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

بتطبيق الشرطين الحديين

$$u(0,t) = v(0,t) + \psi(0) = \alpha$$

$$u(l,t) = v(l,t) + \psi(l) = \beta$$

وبتطبيق الشرطين الابتدائيين

$$u(x,0) = v(x,0) + \psi(0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) = g(x)$$

يمكن فصل هذه المسألة إلى:

المسألة A

$$c^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

$$\psi(0) = \alpha$$

$$\psi(l) = \beta$$

والمسألة B

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}$$

$$B.C: \ \ v(0,t) = 0 \ , v(l,t) = 0$$

$$I.C: \ \ v(x,0) = f(x) - \psi(x) \ , \ v_t(x,0) = g(x)$$

حل المسألة A

$$\psi(x) = \alpha + \frac{x}{l}(\beta - \alpha)$$

وحل المسألة B

حيث هي معادلة متجانسة ذات شروط حدية متجانسة يمكن حلها بفصل المتغيرات، وحلها يكون على الصورة التالية

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\quad (3)$$

حيث A_n معامل متسلسلة فوريه لدالة الجيب للدالة $f(x)-\psi(x)$ أي أن

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\big(f(x)-\psi(x)\big)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

و B_n معامل متسلسلة فوريه لدالة جيب للدالة $g(x)$ أي أن

$$B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

وبالتالي حل المعادلة المتجانسة ذات شروط حدية غير متجانسة يكون على الصورة التالية

$$u(x,t)=\psi(x)+v(x,t)$$
$$=\alpha+\frac{x}{l}(\beta-\alpha)+v(x,t)$$

حيث

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

مثال2

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt}=u_{xx}\,,t>0\,,0<x<1\qquad (1)$$

$$B.C:\ u(0,t)=2\,,u(1,t)=3$$

$$I.C:\ u(x,0)=2+x+2\sin(\pi x)\,,u_t(x,0)=0$$

الحل

من المثال 1

وحيث أن $\alpha = 2$ ، $\beta = 3$ ، $c = 1$ و $l = 1$

نفرض أن حل المعادلة (1) كالتالي:

$$u(x,t) = \alpha + \frac{x}{l}(\beta - \alpha) + v(x,t) \qquad (2)$$

نعوض $u(x,t)$ في المعادلة (1) لنحصل على

$$v_{tt} = v_{xx}$$

نعوض بالشرط الحدي $u(0,t) = 2$ في المعادلة (2)

$$u(0,t) = 2 + \frac{0}{l}(3-2) + v(0,t) = 2$$

إذا

$$u(0,t) = 2$$

$$\Rightarrow v(0,t) = 0$$

وبالمثل نعوض بالشرط الحدي $u(1,t) = 3$ في المعادلة (2)

$$u(1,t) = 2 + (3-2) + v(l,t) = 3$$

إذا

$$u(1,t) = 0$$

$$\Rightarrow v(1,t) = 0$$

من خلال الشروط الابتدائية $u(x,0) = 2 + x + 2\sin(\pi x)$ نجد أن

$$v(x,0) = f(x) - \left[\alpha + \frac{x}{l}(\beta - \alpha)\right]$$

إذا

$$v(x,0) = 2\sin(\pi x)$$

وبالمثل

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u_t(x,0) = \ v_t(x,0) = 0$$

ومن خلال ذلك نحصل على

$$v_{tt} = v_{xx} \qquad (3)$$

$$B.C: \ \ v(0,t) = 0\ , v(l,t) = 0$$

$$I.C: v(x,0) = 2\sin(\pi x)\ \ ,\ v_t(x,0) = 0$$

وهي معادلة متجانسة ذات شروط حدية متجانسة ويمكن حلها بفصل المتغيرات، وحلها العام يكون على الصورة التالية

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)) \sin(n\pi x)$$

حيث$v(x,0) = 2\sin(\pi x)$ ، فإن

$$A_n = 2\int_0^1 (2\sin(\pi x))\sin(n\pi x)dx$$

$$A_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

وحيث أن$v_t(x,0) = 0$ فإن

$$B_n = 0 \qquad \forall n$$

إذا حل المعادلة (3) يكون

$$v(x,t) = 2\sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

وبالتالي حل المعادلة (1)

$$u(x,t) = \alpha + \frac{x}{l}(\beta - \alpha) + v(x,t)$$

$$u(x,t) = 2 + x + 2\sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

Neumann boundary condition (ii) شرط نيومان الحدودي

مثال1

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}\ , t > 0\ , 0 < x < l \qquad (1)$$

$$u_x(0,t) = f_1(t), u_x(l,t) = f_2(t)\ , t > 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ u_t(x,0) = g(x)\ \ ,0 \le x \le l \qquad (I.C)$$

الحل

المسألة(1)غير متجانسة الشروط الحدية وعدم التجانس معتمد على الزمن، لذلك نفرض أن

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x,t) \qquad (2)$$

وبتطبيق الشرطين $u_x(0,t) = f_1(t), u_x(l,0) = f_2(t)$

نجد أن

$$v_x(0,t) = f_1(t) - \psi_x(0,t)$$

$$v_x(l,t) = f_2(t) - \psi_x(l,t)$$

وبفرض أن الدالة $\psi(x,t)$ تكون

$$\psi(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x$$

وبتطبيق الشرطين

$$\psi_x(l,t) = f_2(t)، \psi_x(0,t) = f_1(t)$$

نجد أن

$$b(t) = f_1(t)\ ،\ a(t) = \frac{f_2(t) - f_1(t)}{2l}$$

أي أن

$$\psi(x,t)=\frac{(f_2(t)-f_1(t))}{2l}x^2+f_1(t)x \qquad (3)$$

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على

$$v_{tt}=c^2v_{xx}+R(x,t) \qquad (4)$$

حيث أن

$$R(x,t)=\frac{c^2}{l}\left(f_2(t)-f_1(t)\right)-\frac{\left(f''_2(t)-f''_1(t)\right)}{2l}x^2-f_1{}''(t)x$$

وبالتعويض من الشروط الحدية والابتدائية للمسألة (1) في المعادلة (2) نحصل على

$$v_x(0,t)=0\ ,\ v_x(l,t)=0$$

$$v(x,0)=f(x)-\psi(x,o),v_t(x,0)=g(x)-\psi_t(x,o)$$

المعادلة (4) غير متجانسة المعادلة التفاضلية لذلك نستخدم مفكوك الدوال الذاتية.

وبما أن حل المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (4) يكون :

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(c\lambda_n t)+B_n\sin(c\lambda_n t)+k_n\mathrm{t})\cos(\lambda_n x)$$

حيث أن

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l},n=0,1,2,\dots$$

وبالتالي حل المعادلة غير المتجانسة (4) يكون

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T(t)\cos(\lambda_n x) \qquad (5)$$

حيث

$$T_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l v(x,t)\cos(\lambda_n x)dx \qquad (6)$$

وبالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (4) وبوضع

$$R(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t)\cos(\lambda_n x)$$

حيث

$$R_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l R(x,t)\cos(\lambda_n x)\,dx$$

نجد أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T''_n(t) + c^2{\lambda_n}^2 T_2(t) - R_n(t)\right)\cos(\lambda_n x) = 0$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية العادية التالية

$$T''_n(t) + c^2{\lambda_n}^2 T_2(t) = R_n(t) \qquad (7)$$

وحلها العام يكون

$$T_n(t) = c_1 \sin c(\lambda_n t) + c_2\cos(c\lambda_n t) + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t R_n(\xi)\sin\left(c\lambda_n(t-\xi)\right)d\xi \qquad (8)$$

حيث أن

$$T_n(0) = c_2$$

وبتطبيق الشرط $v(x,0) = f(x) - \psi(x,o)$ على (5) نجد أن

$$T'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l (f(x) - \psi(x,0))\cos(\lambda_n x)\,dx$$

إذا

$$c_2 = \frac{2}{l}\int_0^l (f(x) - \psi(x,0)) \cos(\lambda_n x)\, dx$$

ومن المعادلة (8) نجد أن

$$T_n'(0) = c_1 c \lambda_n$$

وبتطبيق الشرط $v_t(x,0) = g(x) - \psi_t(x,o)$ على المعادلة (5) نحصل على

$$T_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l (g(x) - \psi_t(x,0)) \cos(\lambda_n x)\, dx$$

وهذا يعني

$$c_1 = \frac{2}{cl\lambda_n}\int_0^l (g(x) - \psi_t(x,0)) \cos(\lambda_n x)\, dx$$

إذاً حل المعادلة غير المتجانسة (4) يعطى بالمعادلة (5)، حيث $T_n(t)$ معطى بالمعادلة (8).
ومن ذلك نجد أن حل المعادلة غير المتجانسة (1) يكون كالتالي:

$$u(x,t) = \psi(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(\lambda_n x)$$

حيث أن $\psi(x,t)$ تعطى بالصورة التالية

$$\psi(x,t) = \frac{(f_2(t) - f_1(t))}{2l} x^2 + f_1(t) x$$

(iii) شرط الحدودي المختلط **Mixed boundary condition**

مثال1

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}\, , t > 0\, , 0 < x < l \qquad (1)$$

$$u(0,t) = 0, u_x(l,t) = E \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0\, , 0 \le x \le l \quad (I.C)$$

حيث E ثابت .

الحل

حيث أن المعادلة (1) غير متجانسة الشروط الحدية وعدم التجانس مستقل عن الزمن لذلك نفرض أن

$$u(x,t)=v(x,t)+\psi(x) \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة السابقة في المعادلة (1) نحصل على

$$v_{tt}=c^2v_{xx}+c^2\psi_{xx} \qquad (3)$$

وبالتعويض من الشروط الابتدائية والحدية في المعادلة (2) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} B.C:\quad & u(0,t)=v(0,t)+\psi(0) \\ & u_x(l,t)=v_x(l,t)+\frac{d\psi(l)}{dx}=E \\ I.C:\quad & u(x,0)=v(x,0)+\psi(x)=0 \\ & u_t(x,0)=v_t(x,0)=0 \end{aligned}\right\}(4)$$

وبوضع

$$\left.\begin{aligned} c^2\frac{d^2\psi}{dx^2}=0 \\ \psi(0)=0 \\ \psi'(l)=E \end{aligned}\right\}(5)$$

وبالتعويض عن $c^2\psi_{xx}=0$ في المعادلة (3) نحصل على

$$v_{tt}=c^2v_{xx}$$

وبالتعويض عن الشرطين $\psi(0)=0$ ، $\psi'(l)=E$ في المعادلة (4) نحصل على

$$B.C:\ v(0,t)=0$$

$$v_x(l,t)=0$$

$$I.C:\ v_t(x,0)=0$$

$$v(x,0)=-\psi(x)$$

إذا حل المعادلة (5)

$$\psi(x) = Ex$$

الان نحصل على

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} \qquad (6)$$

$$v(0,t) = v_x(l,t) = 0$$

$$v_t(x,0) = 0 \ , v(x,0) = -\psi(x)$$

وهي معادلة متجانسة ذات شروط حدية متجانسة يمكن حلها بفصل المتغيرات وذلك بفرض أن

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

بالتعويض من المعادلة السابقة في المعادلة (6) نحصل على

$$X^{``}(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad (7)$$

$$T^{``}(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 \qquad (8)$$

ومن خلال الشروط الحدية

$$X(x) = 0$$

$$X^{`}(l) = 0$$

$$T^{`}(0) = 0$$

حل المعادلة (7) يكون

$$X_n(x) = b \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} x\right) \ , n = 1,2,3, \dots$$

وحل المعادلة(8) يكون

$$T(t) = c \cos\left(\frac{(2n-1)\pi c}{2l} t\right)$$

وبالتالي حل المعادلة (6) يكون

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi c}{2l}t\right)$$

حيث أن

$$b_n = -2\frac{E}{l}\int_0^l x \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)dx$$

$$= \frac{-8El(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}$$

وبالتالي حل المعادلة (1) يكون

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi c}{2l}t\right)\right] + Ex$$

أي أن

$$u(x,t) = Ex - \frac{-8El}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2l}\right)$$

مما سبق نلاحظ أن فصل المتغيرات طبقت على معادلة الموجة المتجانسة فقط ولكن هذه الطريقة في بعض الحالات لا تصلح لحل معادلة الموجة غير المتجانسة لذلك نلجأ إلى طريقة أخرى تعرف باسم طريقة مفكوك الدوال الذاتية.

3.2 طريقة الدوال الذاتية لحل معادلة الموجة غير المتجانسة في بعد واحد

إذا كان عدم التجانس في المعادلة التفاضلية ، فيتم استخدام طريقة[EFM] كالتالي:

- نوجد حل المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة غير المتجانسة.
- نكتب الحل للمعادلة غير المتجانسة على الصورة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$$

حيث$X_n(x)$ هي الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة الناتجة من منظومة ستورم–ليوفيل والناتجة من تطبيق فصل المتغيرات على المعادلة المتجانسة.

- نعوض من الخطوة السابقة في المعادلة التفاضلية الجزئية للمسألة غير المتجانسة.
- نحصل على معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية وحلها في $T_n(t)$.
- نطبق الشروط الابتدائية على المعادلة التفاضلية الجزئية لإيجاد الثوابت.

ولتوضيح طريقة الحل باستخدام مفكوك الدوال الذاتية ندرس الحالات التالية:

1.3.2 معادلة الموجة غير المتجانسة والشروط الحدية المتجانسة

وتتضمن عدة حالات وذلك حسب نوع الشروط الحدية

(i) شرط ديرشليت الحدودي Dirichlet boundary condition

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+F(x,t), t>0\ , 0<x<l \qquad (1)$$

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0\ , t\geq 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x)\ ,0\leq x\leq l \qquad (I.C)$$

الحل

المعادلة(1) غير متجانسة وعدم التجانس معتمد على الزمن، لذلك نفرض أن

$$u(x,t)=v(x,t)+\psi(x,t)$$

حيث أن $v(x,t)$ حل للمعادلة غير المتجانسة

$$v_{tt}=c^2v_{xx}+F(x,t)$$

ويحقق الشرطين الحدوديين

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

والشرطين الابتدائيين

$$v(x,0) = 0\ , v_t(x,0) = 0$$

وحيث أن $\psi(x,t)$ حل المعادلة المتجانسة

$$\psi_{tt} = c^2\psi_{xx}$$

يحقق الشرطين الحدوديين

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0$$

والشرطين الابتدائيين

$$\psi(x,0) = f(x)\ ,\ \psi_t(x,0) = g(x)$$

وحيث أنه فيما سبق درسنا حل المعادلة المتجانسة ذات شروط حدية متجانسة بنفس الطريقة يمكن ايجاد حل $\psi(x,t)$، أي أن

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left(\mathrm{A}_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + \mathrm{B}_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)$$

حيث A_n معامل متسلسلة فوريه لدالة جيب التمام للدالة $f(x)$، $\frac{n\pi c}{l}\mathrm{B}_n$ معامل متسلسلة فوريه لدالة الجيب للدالة $g(x)$.

والان سنقوم بإيجاد حل المعادلة غير المتجانسة

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + F(x,t)$$

وذلك باستخدام الدوال الذاتية، حيث أن

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

بالتعويض $v(x,t)$ في الشروط الحدية نجد أن

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

بالتعويض عن $v(x,t)$ في المعادلة$v_{tt} = c^2 v_{xx} + F(x,t)$ نتحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n{}''(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + F(x,t)$$

أي أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n{}''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{l^2} T_n(t)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = F(x,t)$$

ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$T_n{}''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{l^2} T_n(t) = b_n(t)\,, n = 1,2,3, \dots$$

حيث $b_n(t)$ معامل متسلسلة فورييه لدالة الجيب للدالة $F(x,t)$ أي أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = F(x,t)$$

ومن ذلك يكون

$$b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 1,2,3, \dots$$

عندئذ حل المعادلة التفاضلية يكون على الصورة التالية

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + D_n \frac{1}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + \frac{1}{n\pi c} \int_0^l b_n(s) \sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)(t-s) ds \qquad (2)$$

حيثC_n , D_n ثوابت اختيارية.

نحقق الان الشرطين الابتدائيين

$$v(x,0)=0 \Longrightarrow T_n(0)=0$$

$$\Longrightarrow\ C_n-\frac{1}{n\pi c}\int_0^l b_n(s)\sin\left(\frac{n\pi cs}{l}\right)ds=0$$

$$\Rightarrow C_n=0$$

$$v_t(x,0)=0 \Rightarrow {T_n}'(0)=0$$

$$\left[D_n\frac{1}{n\pi c}\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)t+\frac{1}{n\pi c}\int_0^t b_n(s)\sin\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right)ds\right]_{t=0}=0$$

$$\Rightarrow D_n=0$$

وبالتعويض عن قيمتي D_n ، C_n في المعادلة(2) نجد أن حل المعادلة هو

$$T_n(t)=\frac{1}{n\pi c}\int_0^t b_n(s)\sin\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right)ds$$

بما أن

$$u(x,t)=v(x,t)+\psi(x,t)$$

نجد أن

$$=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left(\mathrm{A}_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)+\mathrm{B}_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)$$

حيث

$$T_n(t)=\frac{1}{n\pi c}\int_0^t b_n(s)\sin\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right)ds\,,n=0,1,2,\dots$$

(ii) شرط نيومان الحدودي **Neumann boundary condition**

مثال1

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos(2\pi x)\cos(2\pi t)\,, t > 0 \;\; 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$u_x(0,t) = 0\,, u_x(1,t) = 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = \cos^2(\pi x)\,, u_t(x,0) = 2\cos(2\,\pi x) \qquad (I.C)$$

الحل

من الملاحظ أن الدوال الذاتية والقيم الذاتية لمعادلة الموجة المتجانسة تعطى بالصورة

$$X_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \cos(n\pi x)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = (n\pi)^2 \;\; , n = 0,1,2, \ldots$$

حيث أن

$$u(x,t) = \frac{1}{2}T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos(\,n\pi x)$$

الان

$$u_{tt} = \frac{1}{2}T''_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T''_n(t)\cos(\,n\pi x)$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\;\, n^2\pi^2\cos(\,n\pi x)$$

بالتعويض عن u_{xx} , u_{tt} في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{1}{2}T''_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(T''_n(t) + T_n(t)\;\, n^2\pi^2)\cos(\,n\pi x) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t)$$

عند $n = 0$ يكون $T''_0(t) = 0$ وبالتالي

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t$$

عند $n = 2$ يكون $T''_0(t) = 0$ وبالتالي

$$T_2(t) = A_2\cos(2\pi t) + B_2\sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)$$

عند $n \neq 0,2$ ، يكون

$$T''_n(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = 0 \,, \forall\, \mathrm{n} \neq 0,2$$

وحلها العام يكون

$$T_n(t) = A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t)\,, \forall\, \mathrm{n} \neq 0,2$$

وبالتالي حل المسألة (1)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos(n\pi x)$$

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \frac{t}{4\pi}\sin(2\pi t)\cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t)\right)\cos(n\pi x)$$

ولإيجاد A_0, A_n نعوض بالشرط الابتدائية في $u(x,0) = \cos^2\pi x$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi t)\cos(n\pi x) = \cos^2\pi x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$$

ولذلك

$$A_0 = 1\,, A_2 = \frac{1}{2}\,, A_n = 0 \quad \forall n \neq 1,2$$

ولإيجاد B_0, B_n نعوض بالشرط الابتدائية في $u_x(x,0) = 2\cos(2\pi x)$

$$u_x(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n\cos(n\pi x) = 2\cos(2\pi x)$$

ولذلك

$$B_2 = \frac{1}{\pi}\,, B_n = 0 \quad \forall n \neq 2$$

إذاً الحل العام $u(x,t)$ يكون على الصورة

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \frac{t+4}{4\pi}\sin(2\pi t)\right)\cos(2\pi x)$$

(iii) شرط الحدودي المختلط **Mixed boundary condition**

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + g \,, t > 0 \,, 0 < x < l \quad , g \text{ ثابت} \qquad (1)$$

$$u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0, t > 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \,, 0 \le x \le l \qquad (I.C)$$

الحل

باستخدام اسلوب الحل للحالتين السابقتين نجد أن الصيغة العامة للحل تكون كالتالي

$$u(x,t) = \frac{gx(2l-x)}{2c^2}$$
$$- \frac{16gl^2}{c^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi ct}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

حيث g , c ثوابت.

2.3.2 حل معادلة الموجة غير المتجانسة والشروط الحدية غير المتجانسة

تتضمن عدة حالات وذلك حسب نوع الشروط الحدية

(i) شرط ديرشليت الحدودي **Dirichlet boundary condition**

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t) \,, t > 0 \,, 0 < x < l \qquad (1)$$

$$B.C:\ u(0,t) = f_1(t), u(l,t) = f_2(t), t > 0$$

$$I.C:\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq l$$

الحل

المسألة (1) غير متجانسة الشروط الحدية والمعادلة التفاضلية الجزئية وعدم التجانس معتمد على الزمن، نتبع طريقة التعويض وذلك بفرض أن

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x,t) \quad (2)$$

وبتطبيق الشرطيين $u(0,t) = f_1(t)$ ، $u(l,t) = f_2(t)$ نحصل على

$$v(0,t) = f_1(t) - \psi(0,t)$$

$$v(l,t) = f_2(t) - \psi(l,t)$$

حيث يتم فرض الدالة $\psi(x,t)$ كالتالي

$$\psi(x,t) = a(t)x + b(t) \qquad (3)$$

وبتطبيق الشرطين $\psi(0,t) = f_1(t)$ و $\psi(l,t) = f_2(t)$ نجد أن

$$b(t) = f_2(t) \text{ ، } a(t) = \frac{1}{l}\big(f_2(t) - f_1(t)\big)$$

أي أن

$$\psi(x,t) = f_1(t) + \frac{x}{l}\big(f_2(t) - f_1(t)\big) \qquad (4)$$

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + R(x,t) \qquad (5a)$$

حيث أن

$$R(x,t) = -f_1{}''(t) - \frac{x}{l}\Big(f_2{}''(t) - f_1{}''(t)\Big) + F(x,t)$$

وبالتعويض من الشروط الحدية والابتدائية للمسألة (1) في المعادلة (2) نجد أن

$$v(0,t) = 0 \qquad (5b)$$

$$v(l,t) = 0 \qquad (5c)$$

$$v(x,0) = f(x) - f_1(0) - \frac{x}{l}\big(f_2(0) - f_1(0)\big) \qquad (5d)$$

$$v_t(x,0) = g(x) - {f_1}'(0) - \frac{x}{l}\Big({f_2}'(0) - {f_1}'(0)\Big) \quad (5e)$$

المعادلـة (5) هـي متجانسـة المعادلـة التفاضـلية الجزئيـة ولحـل هـذه المنظومـة نتبـع طريقـة مفكـوك الدوال الذاتية .

لذللك حل المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (5) يكون كالتالي

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(c\lambda_n t) + B_n \sin(c\lambda_n t)) \sin(\lambda_n x)\,, \lambda_n = \frac{n\pi}{l}$$

ولذلك نفرض أن حل المعادلة غير المتجانسة (5) يكون

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t) \sin(\lambda_n x) \qquad (6)$$

حيث أن

$$D_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l v(x,t)\sin(\lambda_n x)dx \qquad (7)$$

وبالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5a) نحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty} {D_n}''(t)\sin(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t)\left(-c^2{\lambda_n}^2\right)\sin(\lambda_n x) + R(x,t)$$

وبوضع

$$R(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t)\sin(\lambda_n x)$$

حيث

$$R_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l R(x,t)\sin(\lambda_n x)dx$$

نجد أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n{}''(t) + c^2\lambda_n{}^2 T_n(t) - R_n(t)\right)\sin(\lambda_n x) = 0$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية العادية التالية

$$T_n{}''(t) + c^2\lambda_n{}^2 T_n(t) = R_n(t) \qquad (8)$$

الحل العام للمعادلة (8) يكون

$$T_n(t) = c_1\sin(c\lambda_n t) + c_2\cos(c\lambda_n t) + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t R_n(\xi)\sin c\lambda_n(t-\xi)d\xi \qquad (9)$$

وبوضع $t = 0$ في المعادلة (9) نحصل على

$$T_n(0) = c_2$$

وبوضع $t = 0$ في المعادلة (7) والتعويض من الشرط (5d) نجد أن

$$T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \left[f(x) - f_1(0) - \frac{x}{l}\left(f_2(0) - f_1(0)\right)\right]\sin(\lambda_n x)dx$$

إذاً

$$c_2 = \frac{2}{l}\int_0^l \left[f(x) - f_1(0) - \frac{x}{l}\left(f_2(0) - f_1(0)\right)\right]\sin(\lambda_n x)dx$$

وباشتقاق المعادلة (9)عندما $t = 0$ نحصل

$$c_1 = \frac{1}{c\lambda_n} T_n'(0)$$

وباشتقاق المعادلة (7)عندما $t = 0$ والتعويض من الشرط (5e) نجد أن

$$T_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \left[g(x) - f_1'(0) - \frac{x}{l}\left(f_2'(0) - f_1'(0)\right)\right] \sin(\lambda_n x) dx$$

وبالتالي حل المعادلة غير المتجانسة (5) يعطى بالمعادلة (6) وحل المعادلة غير المتجانسة (1) يكون:

$$u(x,t) = f_1(t) + \frac{x}{l}(f_2(t) - f_1(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

حيث

$$T_n(t) = c_1 \sin(c\lambda_n t) + c_2 \cos(c\lambda_n t) + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t R_n(\xi) \sin c\lambda_n (t - \xi) d\xi$$

مثال2

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + x + 2 - 6t \ , t > 0 \, , 0 < x < 3 \qquad (1)$$

$$B.C: \ u(0,t) = t^2 - t^3 \, , u(l,t) = 1 + t^2 - t^3$$

$$I.C: \ u(x,0) = \sin(\pi x) \, , \ u_t(x,0) = \cos(\pi x)$$

الحل

حيث أن:

$f_1(t) = t^2 - t^3$ ، $f_2(t) = 1 + t^2 - t^3$ ، $l = 3$ ،إذاً

$$v(x,t) = t^2 - t^3 + \frac{x}{3}$$

و

$$R(x,t) = F(x,t) - v_{tt}(x,t)$$

$$R(x,t) = x$$

ومن ذلك نجد أن

$$R_n(t) = \frac{2}{3}\int_0^3 x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

نحسب المقدار $\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t R_n(\xi)\sin c\lambda_n(t-\xi)d\xi$ أي أن

$$\frac{1}{n\pi c}\int_0^t \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{3}(t-\xi)d\xi = \frac{54(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3c^3}\left[1-\cos\frac{n\pi ct}{3}\right]$$

إذا

$$T_n(t) = c_1\sin\frac{n\pi c}{3}t + c_2\cos\frac{n\pi c}{3}t + \frac{54(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3c^3}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi ct}{3}\right)\right] \qquad (2)$$

الان نوجد c_1 , c_2 حيث أن

$$f_1(x) = f(x) - v(x,0) = \sin(\pi x) - \frac{x}{3}$$

ومنها

$$c_1 = \frac{2}{l}\int_0^l (f_1(x))\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$$

إذا

$$c_1 = \frac{2}{3}\int_0^3 \left(\sin(\pi x) - \frac{x}{3}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$$

$$=\begin{cases}\frac{2(-1)^n}{n\pi} & n\neq 3\\ \frac{2(-1)^n}{n\pi}+1 & n=3\end{cases}\qquad (3)$$

و

$$g_1(x)=g(x)-v(x,0)=\cos(\pi x)$$

$$c_2=\frac{2}{n\pi c}\int_0^3(\cos\pi x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

إذا

$$c_2=\begin{cases}0 & n=3\ \text{أوعدد فردي}\\ \frac{1}{c\pi^2(n^2-9)} & n\neq 3\ \text{أوعدد زوجي}\end{cases}\qquad (4)$$

إذا حل العام للمعادلة (1) يكون

$$u(x,t)=t^2-t^3+\frac{x}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

حيث $T_n(t)$ معطى بالمعادلة (2) و c_1 , c_2 معطى بالمعادلة (3) و(4) على التوالي.

(ii) شرط نيومان الحدودي **Neumann boundary condition**

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt}-4u_{xx}=(1-x)\cos(t)\,,t>0\,,0<x<\pi\qquad (1)$$

$$B.C:\ u_x(0,t)=\cos(t)-1,u_x(\pi,t)=\cos(t)$$

$$I.C:\ u(x,0)=\frac{x^2}{2\pi}\ ,\ u_t(x,0)=\cos(3x)$$

الحل

المسألة (1) غير متجانسة الشروط الحدية والمعادلة التفاضلية الجزئية كذلك وعدم التجانس معتمد على الزمن، نتبع طريقة التعويض وذلك بفرض أن

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x,t)$$

حيث

$$\psi(x,t) = x(\cos t - 1) + \frac{x^2}{2\pi}[\cos t - (\cos t - 1)]$$

$$\psi(x,t) = x(\cos t - 1) + \frac{x^2}{2\pi}$$

ومنها نجد أن

$$\psi_{tt} = -x\cos(t) \ ,\psi_{xx} = \frac{1}{\pi}$$

$$\psi(x,0) = \frac{x^2}{2\pi}$$

$$\psi_t(x,0) = 0$$

الدالة$v(x,t)$ يجب أن تكون حل للمسألة

$$v_{tt} - 4v_{xx} = \cos(t) + \frac{4}{\pi} \ ,t > 0\ ,0 < x < \pi \qquad (2)$$

$$v_x(0,t) = 0\ ,v_x(\pi,t) = 0$$

$$v(x,0) = 0 \ ,\ v_t(x,0) = \cos(3x) \ ,0 \le x \le \pi$$

نستخدم طريقة الدوال الذاتية لحل المسألة (2) والذي يكون على الصورة

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$$

لاحظ أن

$$X_n(x) = \cos(nx)\ ,n \ge 0$$

لذلك

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(nx)$$

وبالتعويض من المعادلة السابقة في المعادلة (2) نحصل على

$$v_{tt} - 4v_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} [T_n''(t) + 4nT_n(t)]\cos(nx) = \cos(t) + \frac{4}{\pi}$$

وهذا يعطي

$$T_n''(t) + 4nT_n(t) = \begin{cases} \cos(t) + \frac{4}{\pi} & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

من الشرط الابتدائي

$$v(x,0) = 0$$

نجد أن

$$0 = v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos(nx)$$

ومن الشرط الابتدائي

$$v_t(x,0) = \cos(3x)$$

نجد أن

$$\cos 3x = v_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)\cos(nx)$$

أي أن

$$T_n(0) = 0$$

إذاً

$$T_n'(0) = \begin{cases} 1 & n = 3 \\ 0 & n \neq 3, n > 3 \end{cases}$$

ومن ذلك يكون الحل العام للمعادلة

$$T_n''(t) + 4nT_n(t) = \begin{cases} \cos(t) + \frac{4}{\pi} & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

هو

$$T_n(t) = \mathrm{A}_n \cos(2nt) + \mathrm{B}_n \sin(2nt)$$

حيث $\mathrm{A}_n = 0$,$T_n(t)$ لذلك

$$T_n'(t) = 2n\mathrm{B}_n \cos(2nt) \text{ ، } T_n(t) = \mathrm{B}_n \sin(2nt)$$

إذا $T_n'(0) = 0$ لكل $n \geq 3$ أي أن:

$$T_n(t) = 0\ , \forall n \geq 1, n \neq 3$$

إذا كان $n = 3$ فإن

$$T_3'(0) = 6\ ,\ \mathrm{B}_n = 1$$

ومنها $\mathrm{B}_n = \frac{1}{6}$

وبذلك يكون

$$T_3(t) = \frac{1}{6}\sin(6t)$$

إذا كان $n = 0$ فإن

$$T_0'(t) = T_0'(0) + \int_0^t \left[\cos(t) + \frac{4}{\pi}\right] d\xi = \sin(t) + \frac{4t}{\pi}$$

و

$$T_0(t) = T_0(0) + \int_0^t T_0{}'(\xi)d\xi = \int_0^t \left[\sin(\xi) + \frac{4\xi}{\pi}\right] d\xi$$

$$= [-\cos(\xi)]_0^t + \frac{2t^2}{\pi}$$

$$= (1 - \cos(t)) \ + \frac{2t^2}{\pi}$$

إذا حل المسألة غير المتجانسة (2) يكون

$$v(x,t) = (1 - \cos(t)) + \frac{2t^2}{\pi} + \frac{1}{6}\sin(6t)\cos(3x)$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة (1)

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{x^2}{2\pi} + (1 - \cos(t))(1 - x) + \frac{2t^2}{\pi} + \frac{1}{6}\sin(6t)\cos(3x)$$

(iii) شرط الحدودي المختلط **Mixed boundary condition**

مثال1

ناقش حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t) \, , t > 0 \, , 0 < x < l \qquad (1)$$

$$u(0,t) = f_1(t), u_x(l,t) = f_2(t), t > 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = f(x), u(x,0) = g(x), 0 \le x \le l \qquad (I.C)$$

الحل

المسألة (1) غير متجانسة الشروط الحدية والمعادلة التفاضلية الجزئية كذلك وعدم التجانس معتمد على الزمن، نتبع طريقة التعويض وذلك بفرض أن

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x,t)$$

ونختار $\psi(x,t)$ بحيث يتم نقل عدم التجانس من الشروط الحدية إلى المعادلة التفاضلية في $v(x,t)$ وحيث أن عدم التجانس مع شروط المختلطة نفرض أن

$$\psi(x,t) = a(t)x + b(t)$$

حيث $a(t)$ و $b(t)$ دوال في المتغير t.

4.2 معادلة الموجة في بعدين Wave Equation in Two Dimensional

يمكن تعميم طريقة فصل المتغيرات وطريقة الدوال الذاتية إلى مسألة القيمة الحدية الابتدائية في بعدين ولتوضيح الطريقة ندرس الحالتين التاليتين:

1.4.2 معادلة الموجة المتجانسة في بعدين

مثال1

لندرس معادلة الموجة التالية :

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \; ,0 < t, 0 < x < l, 0 < y < l' \qquad (1a)$$

$$I.C:\; u(x,y,0) = f(x,y) \; ,0 < x < l, 0 < y < l' \qquad (1b)$$

$$u_t(x,y,0) = g(x,y) \; ,0 < x < l, 0 < y < l' \qquad (1c)$$

$$B.C:\; u(0,y,t) = 0 \; , 0 < t, 0 < y < l' \qquad (1d)$$

$$u(l,y,t) = 0 \; ,0 < t, 0 < y < l' \qquad (1e)$$

$$u(x,0,t) = 0 \; ,0 < t, 0 < x < l \qquad (1f)$$

$$u(x,l',t) = 0 \; , 0 < t, 0 < x < l \qquad (1g)$$

الحل

نفرض أن

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t) \qquad (2)$$

نعوض عن المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} + \frac{T''}{c^2 T} = \propto \qquad (3)$$

وبالتعويض من الشروط الحدية في المعادلة (2) نحصل على

$$u(x, y, 0) = X(0)Y(y)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(l, y, 0) = X(l)Y(y)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$$

$$u(x, 0, t) = X(0)Y(y)T(t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$u(x, l', t) = X(0)Y(l')T(t) = 0 \Rightarrow Y(l') = 0$$

وبالتالي فإن

$$X'' - \alpha X = 0 \qquad (4a)$$

$$X(0) = 0 \qquad (4b)$$

$$X(l) = 0 \qquad (4c)$$

حل المنظومة(4) يكون

$$X_n(x) = A\sin(\lambda_n x)$$

حيث

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}\ , n = 1,2,, \dots$$

وبالاستمرار في الفصل للمعادلة (3) نجد أن

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{c^2 T} - \propto = \beta \qquad (5)$$

وبذلك نحصل على

$$Y'' - \beta Y = 0 \qquad (6a)$$

$$Y(0) = 0 \qquad (6b)$$

$$Y(l') = 0 \qquad (6c)$$

حل المنظومة(6)عندما $\beta = -\mu^2$ ، $\mu > 0$ يكون

$$Y_n(y) = B\sin(\mu_m y)$$

حيث

$$\mu_m = \frac{m\pi}{l'} \quad , m = 1,2,,\ldots$$

كذلك المعادلة

$$T'' - (\alpha + \beta)c^2 T = 0 \qquad (7)$$

بالتعويض في المعادلة (7) عن $\alpha = -{\lambda_n}^2$، $\beta = -{\mu_m}^2$ نحصل على

$$T'' - c^2({\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2)T = 0$$

وحلها العام يكون

$$T(t) = c_1 \cos\left(c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2 t}\right) + c_2 \sin\left(c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2 t}\right)$$

حيث أن c_1 , c_2 ثابتين.

ومن الشرطين الابتدائيين (1c), (1b) نوجد الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة للمنظومتين (4) ، (6) فتكون :

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ , n = 1,2,\ldots$$

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l'}}\sin\left(\frac{m\pi y}{l'}\right) \ , m = 1,2,\ldots$$

وبأخذ تركيب خطي لانهائي للحلول

$$u(x,y,) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{mn}\cos\left(c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2 t}\right) + d_{mn}\sin\left(c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2 t}\right)\right)X_n(x)Y_n(y) \qquad (8)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي (1b) نحصل على

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\,X_n(x)Y_m(y)\qquad(9)$$

حيث أن c_{mn} معامل متسلسلة فورييه في متغيرين للدالة $f(x,y)$ فإن:

$$c_{mn}=\int_0^{l'}\int_0^{l}f(x,y)\,X_n(x)Y_m(y)dxdy$$

أي أن

$$c_{mn}=\frac{2}{\sqrt{ll'}}\int_0^{l'}\int_0^{l}f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi y}{l'}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dxdy\qquad(10)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي (1c) على المعادلة (8) نحصل على

$$g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_{mn}\,c\sqrt{{\lambda_n}^2+{\mu_m}^2}X_n(x)Y_m(y)\qquad(11)$$

حيث $d_{mn}c\sqrt{{\lambda_n}^2+{\mu_m}^2}$ معامل متسلسلة فورييه في متغيرين للدالة $g(x,y)$ فإن:

$$d_{mn}c\sqrt{{\lambda_n}^2+{\mu_m}^2}=\int_0^{l'}\int_0^{l}g(x,y)\,X_n(x)Y_n(y)dxdy$$

أي أن

$$d_{mn}=\frac{2}{c\sqrt{{\lambda_n}^2+{\mu_m}^2}\ \sqrt{ll'}}\int_0^{l'}\int_0^{l}g(x,y)\,X_n(x)Y_n(y)dxdy\quad(12)$$

وبالتالي حل المنظومة (1) يعطي بالمعادلة (8) حيث d_{mn} ، c_{mn} معرفتان أعلاه.

مثال2

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = 36(u_{xx} + u_{yy})\,, t > 0\,, 0 < x < 2{,}0 < y < 3$$

$$B.C:\ u(0,y,t) = u(2,y,t) = u(x,0,t) = u(x,3,t) = 0$$

$$I.C:\ u(x,y,0) = xy(2-x)(3-y)\,, u_t(x,y,0) = 0$$

الحل

من المثال1، حيث أن $l' = 3, l = 2\ , c = 6$

إذا الصيغة العامة للحل

$$u(x,y,) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{mn}\cos\left(c\sqrt{\lambda_n{}^2 + \mu_m{}^2 t}\right) + d_{mn}\sin\left(c\sqrt{\lambda_n{}^2 + \mu_m{}^2 t}\right)\right)X_n(x)Y_n(y)$$

حيث أن $l' = 3$،$l = 2$،$c = 6$ ، ولإيجاد حل معادلة الموجة المتجانسة ذات الشروط الحدية المتجانسة نقوم أولا بحساب c_{mn}، d_{mn} :

بما أن $g(x,y) = 0$ فإن $d_{mn} = 0$

إذا

$$c_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ll'}}\int_0^{l'}\int_0^{l} f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi y}{l'}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dxdy$$

$$c_{mn} = \frac{2}{\sqrt{2\times 3}}\int_0^{2}\int_0^{3} xy(2-x)(3-y)\sin\left(\frac{m\pi y}{l'}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dxdy$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{16(1+(-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3}\right)\left(\frac{54(1+(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}\right)$$

$$= \frac{576}{\pi^6} \frac{(1 + (-1)^{m+1})(1 + (-1)^{n+1})}{m^3 n^3}$$

كذلك يمكن إيجاد قيمة الثابت $c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2}$ كالتالي

$$c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2} = 6\pi \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{9}}$$

إذا الصيغة العامة للحل $u(x, y)$ تكون

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{3}\right) \cos\left(\pi\sqrt{9m^2 + 4m^2}t\right)\right)$$

حيث

$$c_{mn} = \frac{576}{\pi^6} \frac{(1 + (-1)^{m+1})(1 + (-1)^{n+1})}{m^3 n^3}$$

مثال3

أوجد حل معادلة الموجة التالية

$$u_{tt} = 2(u_{xx} + u_{yy}), t > 0\ , 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$$

$$B.C\ : u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0$$

$$I.C: \ u(x, y, 0) = \sin(2x)\sin(2y)\ , u_t(x, y, 0) = 0$$

الحل

حيث أن $c = \sqrt{2}$ ، $l' = l = \pi$ ، وبما أن الصيغة العامة للحل تكون على الصورة

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(c_{mn} \cos c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2}\, t + d_{mn} \sin c\sqrt{{\lambda_n}^2 + {\mu_m}^2\, t} \Bigg) X_n(x) Y_n(y)$$

إذاً لإيجاد حل معادلة الموجة المتجانسة ذات الشروط الحدية المتجانسة نقوم أولا بحساب c_{mn}، d_{mn}.

بما أن $g(x,y)=0$ فإن $d_{mn}=0$

$$c_{mn}=\frac{2}{\sqrt{ll'}}\int_0^{l'}\int_0^{l} f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi y}{l'}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dxdy$$

$$c_{mn}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2x)\sin(2y)]\sin(my)\sin(nx)dxdy$$

$$c_{mn}=\begin{cases}1 & n=m=2\\ 0 & n=m\neq 2\end{cases}$$

كذلك يمكن إيجاد قيمة الثابت $c\sqrt{{\lambda_n}^2+{\mu_m}^2}$ كالتالي

$$c\sqrt{{\lambda_n}^2+{\mu_m}^2}=c\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\pi^2}+\frac{m^2\pi^2}{\pi^2}}=\sqrt{2n^2+2m^2}=4$$

$$c\sqrt{{\lambda_n}^2+{\mu_m}^2}=4$$

$$u(x,y,t)=\sin(2x)\sin(2y)\cos(4t)$$

2.4.2 معادلة الموجة غير المتجانسة في بعدين

مثال

لندرس معادلة الموجة التالية :

$$u_{tt}=c^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(x,y,t)\ ,0<t,0\le y,x\le l' \quad (1)$$

$$I.C:\ u(x,y,0)=f(x,y)\ ,0<x<l,0<y<l' \quad (1b)$$

$$u_t(x,y,0)=g(x,y)\ ,0<x<l,0<y<l' \quad (1c)$$

$$B.C:\ u(0,y,t)=0\ ,0<t,0<y<l' \quad (1d)$$

$$u(l,y,t)=0\ \ ,0<t,0<y<l' \quad (1e)$$

$$u(x,0,t) = 0\ ,0 < t, 0 < x < l \qquad (1f)$$

$$u(x,l',t) = 0\ \ ,0 < t, 0 < x < l \qquad (1g)$$

الحل

لاحظ أن عدم التجانس موجود في المعادلة التفاضلية الجزئية ومعتمد على الزمن لذلك نوجد حل المنظومة المتجانسة المناظرة لمعادلة (1) ، ويكون:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{mn}\cos\left(c\sqrt{\lambda_n{}^2 + \mu_m{}^2 t}\right)\right.$$
$$\left. + d_{mn}\sin\left(c\sqrt{\lambda_n{}^2 + \mu_m{}^2 t}\right)\right)X_n(x)Y_n(y)$$

حيث أن

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad ,n = 1,2,\dots$$

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l'}}\sin\left(\frac{m\pi y}{l'}\right) \qquad ,m = 1,2,\dots$$

إذا شكل الحل للمعادلة (1) يكون

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn}\,X_n(x)Y_m(y) \qquad (2)$$

حيث

$$D_{mn}(\mathrm{t}) = \int_0^{l'}\int_0^{l} u(x,y,t)\sin\left(\frac{m\pi y}{l'}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dxdy \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D''_{mn}(t)\, X_n(x) Y_m(y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c^2(-\lambda_n{}^2 - \mu_m{}^2) D_{mn}(t)\, X_n(x) Y_m(y) + F(x,y,t)$$

أي ان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (D''_{mn}(t) + c^2\left(\lambda_n{}^2 + \mu_m{}^2\right)) X_n(x) Y_m(y) D_{mn}(t) = F(x,t)$$

نضع $K^2{}_{mn} = \lambda_n{}^2 + \mu_m{}^2$

و

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t)\, X_n(x) Y_m(y)$$

حيث

$$a_{mn}(t) = \int_0^{l'}\int_0^{l} f(x,y,t)\, X_n(x) Y_m(y) dxdy$$

نجد أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} [D''_{mn}(t) + c^2 K^2{}_{mn} D_{mn}(t) - a_{mn}(t)]\, X_n(x) Y_m(y) = 0$$

منها نحصل على معادلة تفاضلية عادية

$$D''_{mn}(t) + c^2 K^2{}_{mn} D_{mn}(t) = a_{mn}(t)$$

وحلها العام

$$D_{mn}(t) = c_1 \sin(cK_{mn}t) + c_2 \cos(cK_{mn}t) + \frac{1}{cK_{mn}} \int_0^t a_{mn}(\zeta) \sin(cK_{mn}(t-\zeta)) d\zeta \quad (4)$$

بوضع $t = 0$ في المعادلة (4) نحصل على

$$D_{mn}(0) = 0$$

حيث

$$D_{mn}(0) = \int_0^{l'} \int_0^{l} f(x,y)\, X_n(x) Y_m(y) dxdy$$

إذا

$$c_2 = \int_0^{l'} \int_0^{l} f(x,y)\, X_n(x) Y_m(y) dxdy$$

وباشتقاق المعادلة (4) عند $t = 0$ نحصل على

$$D'_{mn}(0) = c_1 cK_{mn}$$

وحيث أن

$$D'_{mn}(0) = \int_0^{l'} \int_0^{l} g(x,y)\, X_n(x) Y_m(y) dxdy$$

هذا يعني

$$c_1 = \frac{1}{cK_{mn}} \int_0^{l'} \int_0^{l} g(x,y)\, X_n(x) Y_m(y) dxdy$$

إذا حل المعادلة غير المتجانسة (1) يعطى بالمعادلة (2)، $D_{mn}(t)$ تعطى بالمعادلة (4).

مما سبق نلاحظ أن طريقة فصل المتغيرات طبقت على المعادلات المتجانسة في بعد واحد وبعدين، وفي حالة المعادلات غير المتجانسة و كان عدم التجانس معتمد على الزمن يتم تطبيق طريقة التعويض أو مفكوك الدوال الذاتية ، أما في حالة عدم التجانس المستقل عن الزمن في الشروط الحدودية يتم تطبيق طريقة التعويض لإزالة عدم التجانس الموجود في الشروط الحدية وإذا كان عدم التجانس معتمد على الزمن يتم اختيار الدالة ليتم نقل عدم التجانس من الشروط الحدية إلى المعادلة التفاضلية الجزئية ومنها يتم تطبيق طريقة مفكوك الدوال الذاتية لإيجاد الحل المطلوب.

الفصل الثالث

الطرق العددية(تقريب أدوميان–الفروق المنتهية)

Numerical Methods(Adomian decomposition- Finite differences)

1.3 مقدمة Introduction

يوجد العديد من الظواهر الطبيعية والعلمية التي شكلت معادلات تفاضلية ليس من السهل إيجاد الحل التحليلي لها ولكن مؤخراً تم تطبيق بعض الطرق العددية لحل مثل هذه المعادلات، حيث أن حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام الطرق التحليلية يصعب إيجاده، لذلك نلجأ إلى الطرق العددية لإيجاد الحل. لذلك هذا الفصل يدرس الحل العددي لمعادلة الموجة في بعد واحد وبعدين و ذلك باستخدام بعض الطرق العددية، وسنركز في هذا البحث على طريقتين عدديتين وهما طريقة تقريب أدوميان Adomian decomposition method[ADM] وطريقة الفروق المنتهية Finite differences method[FDM].

2.3 طريقة تقريب أدوميان Adomian decomposition method[ADM]

لتوضيح هذه الطريقة، ندرس المعادلة التالية

$$lu + Nu + Ru = g \qquad (1)$$

حيث l هو أعلى رتبة تفاضلية وقابلة للعكس، N مؤثر غير خطي ،R مؤثر تفاضلي خطي برتبة أقل من أو تساوي رتبة l.

نطبق المؤثر المعكوس l^{-1} لطرفي المعادلة (1) فنحصل

$$l^{-1}lu = l^{-1}g - l^{-1}Nu - l^{-1}Ru$$

$$u - \varphi = l^{-1}g - l^{-1}Nu - l^{-1}Ru$$

حيث φ نحصل عليها من الشروط الابتدائية أو الحدية أو كلاهما .

الان نعبر عن الحل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي أن

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \qquad (2)$$

ونعوض في الجزء غير خطي Nu بمتسلسلة غير منتهية:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad (3)$$

حيث A_n كثيرات حدود أدوميان للحد غير الخطي ، وتعرف بالعلاقة:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\lambda^i u_i\right)\right]_\lambda, n = 0,1,2,\dots$$

ومنها

$$A_0 = N(u)$$

$$A_1 = u_1 N'(u_0)$$

$$A_2 = u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2}(u_1)^2 N''(u_0)$$

$$\vdots$$

وهكذا.

نعوض عن المعادلتين (2)،(3) في المعادلة

$$u - \varphi = l^{-1}g - l^{-1}Nu - l^{-1}Ru$$

فنحصل

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \varphi + l^{-1}g - l^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n - l^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \qquad (4)$$

ومن المعادلة (4) نحصل على مجموعة الحلول التالية

$$u_0(x,t) = \varphi + l^{-1}g$$

$$u_{n+1}(x,t) = -l^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(A_n + Ru_n)\right], n = 0,1,2,\dots$$

حيث u_0 تكون معطى وتعرف حسب الشروط الابتدائية و باقي حدود u يمكن حسابها بشكل تكراري من

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

وهكذا.

1.2.3 طريقة تقريب أدوميان لحل معادلة الموجة في بعد واحد

يمكن استخدام طريقة تقريب أدوميان[ADM] لحل معادلة الموجة في بعد واحد متجانسة أو غير متجانسة، ولتوضيح ذلك ندرس معادلة الموجة التالية:

مثال1

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [ADM]:

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), 0 < x < l, t > 0 \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,0) = f(x)\ , u_t(x,0) = g(x)\ , 0 \leq x \leq l \qquad (I.C)$$

الحل:

نطبق المؤثران L_{tt} ، L_{xx} على طرفي المعادلة (1):

$$L_{tt}(u(x,t)) = L_{xx}(u(x,t)) + F(x,t) \qquad (2)$$

حيث المؤثران L_{tt} ، L_{xx} معرفان كالتالي:

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.), L_{xx}(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$$

نطبق المؤثر العكسي لطرفي المعادلة (2) والمعرف كالتالي

$$L_{tt}{}^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)dtdt$$

إذا

$$L_{tt}{}^{-1}\big(L_{tt}(u(x,t))\big) = L_{tt}{}^{-1}\big(L_{xx}(u(x,t)) + F(x,t)\big)$$

$$u(x,t) = f(x) + g(x)t + L_{tt}{}^{-1}\big(L_{xx}(u(x,t))\big) + L_{tt}{}^{-1}\big(F(x,t)\big)$$

وعند التعويض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

نجد أن

$$u(x,t) = f(x) + g(x)t + L_{tt}{}^{-1}\big(F(x,t)\big) + l_{tt}{}^{-1}\left(L_{xx}\big(u_n(x,t)\big)\right)$$

حيث

$$u_0(x,t) = f(x) + g(x)t + L_{tt}{}^{-1}(F(x,t))$$

$$u_{n+1}(x,t) = l_{tt}{}^{-1}\big(L_{xx}(u_n(x,t))\big), n = 0,1,2, \dots$$

ومن ذلك الحل العام يكون على الصورة التالية

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

مثال2

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [ADM]:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0\,, 0 < x < 1\,, t > 0 \qquad (1)$$

$$B.C:\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0$$

$$I.C:\ u(x,0) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x)\ , u_t(x,0) = 0, 0 \le x \le 1$$

الحل

حيث أن

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.)\,, L_{xx}(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$$

إذا

$$L_{tt}\big(u(x,t)\big) = 4L_{xx}\big(u(x,t)\big) \qquad (2)$$

نطبق المؤثر العكسي ${L_{tt}}^{-1}$ لطرفي المعادلة (2) حيث أن

$$
{L_{tt}}^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)dtdt
$$

نحصل على

$$
{L_{tt}}^{-1}\left(L_{tt}\big(u(x,t)\big)\right) = {L_{tt}}^{-1}\left(4L_{xx}\big(u(x,t)\big)\right)
$$

$$
\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dtdt = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt
$$

$$
\int_0^t \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_0^t dt = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt
$$

$$
\int_0^t \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right] = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt
$$

$$
[u(x,t)]_0^t - u_t(x,0)t = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt
$$

$$
u(x,t) - u(x,0) = u_t(x,0)t + 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt
$$

إذا

$$
u(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)t + 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt
$$

وبالتعويض عن الشروط الابتدائية نحصل على

$$
u(x,t) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) + 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt
$$

الان نعوض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي ان

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) + 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t))}{\partial x^2} dtdt$$

إذاً

$$u_0(x,t) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x)$$

$$u_{n+1}(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t))}{\partial x^2} dtdt, n \geq 0$$

ومنها نحصل على

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\big(u_0(x,t)\big)}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(\sin(\pi x) + \sin(2\pi t))}{\partial x^2} dtdt$$

$$= 4\int_0^t\int_0^t (-2\pi^2 \sin(\pi x) - 4\pi^2 \sin(2\pi x))dtdt$$

$$u_1(x,t) = -2\pi^2 t^2 \sin(\pi x) - 8\pi^2 t^2 \sin(2\pi x)$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\big(u_1(x,t)\big)}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(-2\pi^2 t^2 \sin(\pi x) - 8\pi^2 t^2 \sin(2\pi t))}{\partial x^2} dtdt$$

$$= 4\int_0^t\int_0^t (2\pi^4t^2\sin(\pi x) + 32\pi^4t^2\sin(2\pi x))dtdt$$

$$u_2(x,t) = \frac{2}{3}\pi^4t^2\sin(\pi x) + \frac{32}{3}\pi^4t^4\sin(2\pi x)$$

$$u_3(x,t) = \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\big(u_2(x,t)\big)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_3(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\left(\frac{2}{3}\pi^4t^4\sin(\pi x) - \frac{32}{3}\pi^4t^4\sin(2\pi t)\right)}{\partial x^2}dtdt$$

$$= 4\int_0^t\int_0^t (-4\pi^6t^4\sin(\pi x) - 256\pi^6t^4\sin(2\pi x))dtdt$$

$$u_3(x,t) = -\frac{4}{45}\pi^6t^6\sin(\pi x) - \frac{256}{45}\pi^6t^6\sin(2\pi x)$$

$$\vdots$$

وهكذا، إذا

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - 2\pi^2t^2\sin(\pi x) \\ & - 8\pi^2t^2\sin(2\pi x) + \frac{2}{3}\pi^4t^4\sin(\pi x) + \frac{32}{3}\pi^4t^4\sin(2\pi x) \\ & - \frac{4}{45}\pi^6t^6\sin(\pi x) - \frac{256}{45}\pi^6t^6\sin(2\pi x) + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \sin(\pi x)\left(1 - 2\pi^2t^2 + \frac{2}{3}\pi^4t^4 - \frac{4}{45}\pi^6t^6 + \cdots\right) \\ & + \sin(2\pi x)\left(1 - 8\pi^2t^2 + \frac{32}{3}\pi^4t^4 - \frac{256}{45}\pi^6t^6 + \ldots\right) \end{aligned}$$

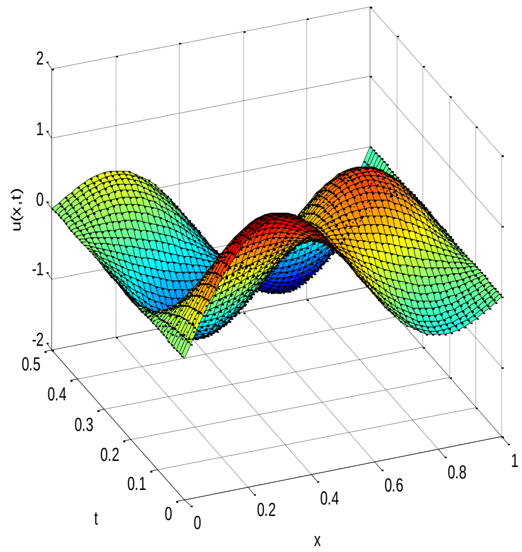
حيث أن

$$\cos(2\pi t) = 1 - 2\pi^2t^2 + \frac{2}{3}\pi^4t^4 - \frac{4}{45}\pi^6t^6 + \cdots$$

$$\cos(4\pi t) = 1 - 8\pi^2 t^2 + \frac{32}{3}\pi^4 t^4 - \frac{256}{45}\pi^6 t^6 + \ldots$$

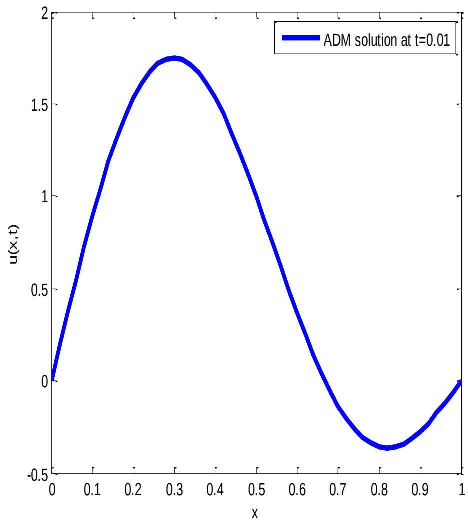
ومن ذلك يكون الحل التقريبي على الصورة التالية

$$u(x,t) \cong \sin(\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\cos(4\pi t)$$



شكل(i.1.2.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2

بطريقة [ADM] لكل $0 < t < 0.5, 0 < x < 1$



شكل(ii.1.2.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2

بطريقة [ADM] عندما $t = 0.01$

مثال3

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [ADM]:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = xe^{-t}, 0 < x < 1, t > 0 \quad (1)$$

$$B.C: \; u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$I.C: \; u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = 0$$

الحل

حيث أن

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.), L_{xx}(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$$

إذا

$$L_{tt}\big(u(x,t)\big) = 4L_{xx}\big(u(x,t)\big) + xe^{-t}$$

نطبق المؤثر العكسي ${L_{tt}}^{-1}$ لطرفي المعادلة (1) حيث أن

$${L_{tt}}^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)dtdt$$

نحصل على

$${L_{tt}}^{-1}\left(L_{tt}\big(u(x,t)\big)\right) = {L_{tt}}^{-1}\left(4L_{xx}\big(u(x,t)\big)\right) + {L_{tt}}^{-1}(xe^{-t})$$

$$\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dtdt = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt + \int_0^t \int_0^t xe^{-t} dtdt$$

$$\int_0^t \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_0^t dt = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt + \int_0^t x(1-e^{-t})dt$$

$$\int_0^t \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right] = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt + x(e^{-t}+t-1)$$

$$[u(x,t)]_0^t - u_t(x,0)t = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt + x(e^{-t}+t-1)$$

$$[u(x,t)]_0^t = u_t(x,0)t + 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt + x(e^{-t}+t-1)$$

إذا

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x,0) + u_t(x,0)t \\ &\quad + 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt + x(e^{-t}+t-1) \end{aligned}$$

وبالتعويض عن الشروط الابتدائية نحصل على

$$u(x,t) = \sin(x) + x(e^{-t} + t - 1) + 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dtdt$$

الان نعوض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي ان

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sin(x) + x(e^{-t} + t - 1) + 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 (\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t))}{\partial x^2} dtdt$$

إذاً

$$u_0(x,t) = \sin(x) + x(e^{-t} + t - 1)$$

$$u_{n+1}(x,t) = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 (\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t))}{\partial x^2} dtdt\ , n \geq 0$$

ومنها نحصل على

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 \big(u_0(x,t)\big)}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 (\sin(x) + x(e^{-t} + t - 1))}{\partial x^2} dtdt$$

$$= 4\int_0^t \int_0^t (-\sin(x)) dtdt$$

$$u_1(x,t) = -2t^2 \sin(x)$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 \big(u_1(x,t)\big)}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(-2t^2\sin(x))}{\partial x^2}\,dtdt$$

$$= 4\int_0^t\int_0^t (2t^2\sin(x))\,dtdt$$

$$u_2(x,t) = \frac{2}{3}t^4\sin(x)$$

$$u_3(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\big(u_2(x,t)\big)}{\partial x^2}\,dtdt$$

$$u_3(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\left(\frac{2}{3}t^4\sin(x)\right)}{\partial x^2}\,dtdt$$

$$u_3(x,t) = -4\int_0^t\int_0^t \frac{2}{3}t^4\sin(x)\,dtdt$$

$$u_3(x,t) = -\frac{4}{45}t^6\sin(x)$$

$$\vdots$$

وهكذا، إذاً

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$u(x,t) = \sin(x) + x(e^{-t} + t - 1) - 2t^2\sin(x) + \frac{2}{3}t^4\sin(x) - \frac{4}{45}t^6\sin(x) + \cdots$$

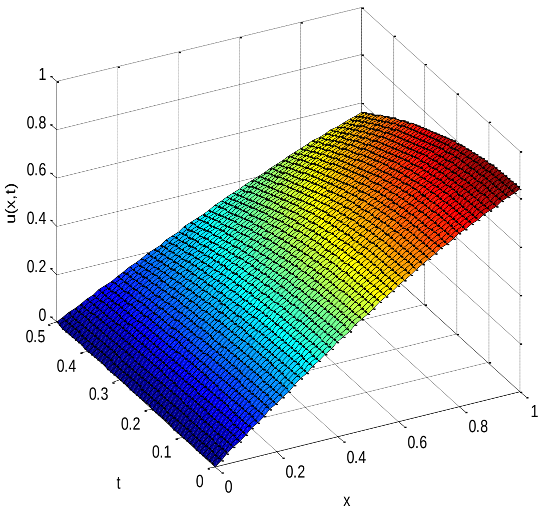
$$u(x,t) = \sin(x)\left(1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{4}{45}t^6 + \cdots\right) + x(e^{-t} + t - 1)$$

حيث أن

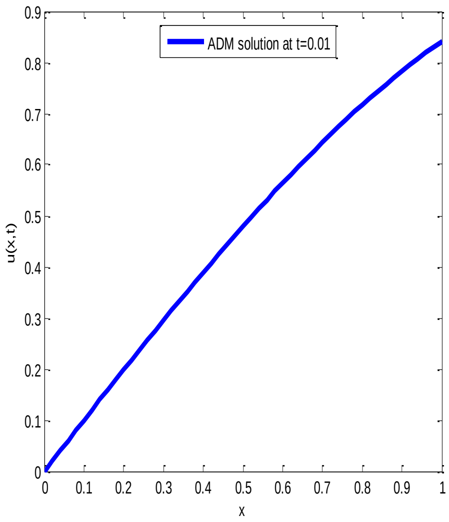
$$\cos(2t) = 1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{4}{45}t^6 + \cdots$$

ومن ذلك يكون الحل التقريبي على الصورة التالية

$$u(x,t) \cong \sin(x)\cos(2t) + x(e^{-t} + t - 1)$$



شكل(i.2.2.3) يوضح الحل التقريبي للمثال3
بطريقة [ADM] لكل $0 < t < 0.5, 0 < x < 1$



شكل(ii.2.2.3) يوضح الحل التقريبي للمثال3
بطريقة [ADM] عندما $t = 0.01$

2.2.3 طريقة تقريب أدوميان لحل معادلة الموجة في بعدين

لتوضيح طريقة الحل ندرس معادلة الموجة التالية:

مثال1

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [ADM]:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), 0 < t, 0 < x < l, 0 < y < l' \quad (1)$$

$$B.C: \ u(0,y,t) = u(l,y,t) = u(x,0,t) = u(x,l',t) = 0$$

$$I.C: \ u(x,y,0) = f(x,y)\,, u_t(x,y,0) = g(x,y)$$

حيث أن l, c ثوابت.

خطوات الحل:

نطبق المؤثرات L_{xx} ، L_{yy} ، L_{tt} على طرفي المعادلة (1):

$$L_{tt}(u(x,y,t)) = c^2\left[L_{xx}(u(x,y,t)) + L_{yy}(u(x,y,t))\right] \quad (2)$$

حيث المؤثرات L_{xx} ، L_{yy} ، L_{tt} معرفة كالتالي:

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.)\,, L_{xx}(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)\,, L_{yy}(.) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(.)$$

نطبق المؤثر المعكوس ${L_{tt}}^{-1}$ على طرفي المعادلة (2)

$${L_{tt}}^{-1}\big(L_{tt}(u(x,y,t))\big) = {L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t)) + +L_{yy}(u(x,y,t))\right)$$

حيث أن

$${L_{tt}}^{-1} = \int_0^t\int_0^t (.)dtdt$$

إذا

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = u(x,y,0) + u_t(x,y,0)t \\ + {L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t)) + L_{yy}(u(x,y,t))\right) \end{aligned}$$

الان نعوض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي ان

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y,t)$$

حيث

$$u_0(x,y,t) = u(x,y,0) + u_t(x,y,0)$$

$$u_{n+1}(x,y,t) = {l_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u_n(x,y,t)) + L_{yy}(u_n(x,y,t))\right), n = 0,1,2,\ldots$$

ومن ذلك نجد أن الحل العام يكون على الصورة التالية

$$u(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y,t)$$

مثال2

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [ADM]:

$$u_{tt}=2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),0<t,0<y,x<\pi \qquad (1)$$

$$B.C:\ u(0,y,t)=y,u(\pi,y,t)=\pi+y$$

$$u(x,0,t)=x,u(x,\pi,t)=\pi+x$$

$$I.C:\ u(x,y,0)=x+y+\sin(x)\sin(y)$$

$$u_t(x,y,0)=0$$

الحل

نطبق المؤثرات L_{xx} ، L_{yy} ، L_{tt} على طرفي المعادلة (1):

$$L_{tt}(u(x,y,t))=2\left[L_{xx}(u(x,y,t))+L_{yy}(u(x,y,t))\right] \qquad (2)$$

حيث المؤثرات L_{xx} ، L_{yy} ، L_{tt}معرفة كالتالي:

$$L_{tt}(.)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(.)\ ,L_{xx}(.)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)\ ,L_{yy}(.)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(.)$$

نطبق المؤثر المعكوس ${L_{tt}}^{-1}$ على طرفي المعادلة (2)

$${L_{tt}}^{-1}\left(L_{tt}(u(x,y,t))\right)=\frac{1}{2}{L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t))++L_{yy}(u(x,y,t))\right)$$

حيث

$${L_{tt}}^{-1}=\int_0^t\int_0^t(.)dtdt$$

$$u(x,y,t) = u(x,y,0) + u_t(x,y,0)t + 2{L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t)) + L_{yy}(u(x,y,t))\right)$$

$$u(x,y,t) = x + y + \sin(x)\sin(y) + 2{L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t)) + L_{yy}(u(x,y,t))\right)$$

الان نعوض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي ان

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y,t)$$

حيث

$$u_0(x,y,t) = x + y + \sin(x)\sin(y)$$

$$u_1(x,y,t) = 2{l_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u_0(x,y,t)\ ) + L_{yy}\big(u_0(x,y,t)\big)\right)$$

$$= 2{l_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(x + y + \sin(x)\sin(y)\ ) + L_{yy}(x + y + \sin(x)\sin(y))\right)$$

$$u_1(x,y,t) = \frac{1}{2}(2t)^2\sin(x)\sin(y)$$

$$u_2(x,y,t) = 2{l_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}\big(u_1(x,y,t)\big) + +L_{yy}\big(u_1(x,y,t)\big)\right)$$

$$= 2{l_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}\left(\frac{1}{2}(2t)^2\sin(x)\sin(y)\ \right) + +L_{yy}\left(\frac{1}{2}(2t)^2\sin(x)\sin(y)\ \right)\right)$$

$$u_2(x,y,t) = \frac{1}{24}(2t)^4\sin(x)\sin(y)$$

$$\vdots$$

وهكذا، إذاً

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y,t)$$

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + u_1(x,y,t) + u_3(x,y,t) + \cdots$$

$$u(x,y,t) = x + y + \sin(x)\sin(y) - \frac{1}{2}(2t)^2 \sin(x)\sin(y) + \frac{1}{24}(2t)^4 \sin(x)\sin(y) - \cdots$$

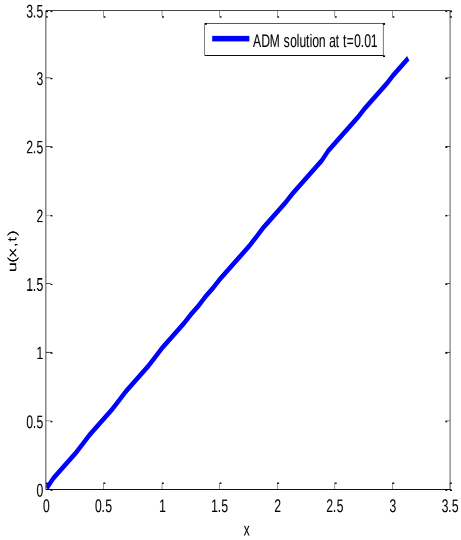
$$u(x,y,t) = x + y + \sin(x)\sin(y)\left[1 - \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^4}{24} + \cdots\right]$$

حيث أن

$$\cos(2t) = 1 - \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^4}{24} + \cdots$$

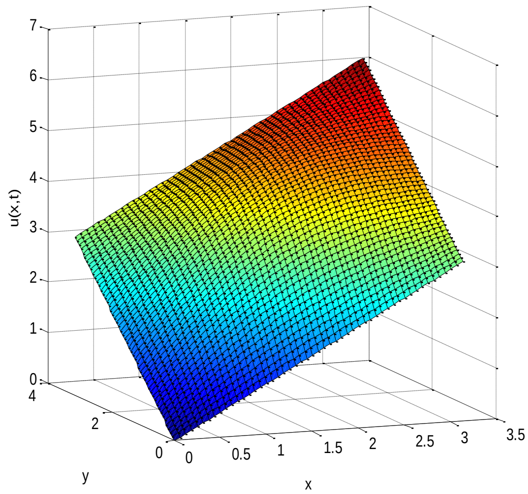
ومن ذلك يكون الحل العددي على الصورة التالية

$$u(x,y,t) \cong x + y + \sin(x)\sin(y)\cos(2t)$$



شكل(ii.3.2.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2

بطريقة[ADM] عندما $t = 0.01$



شكل(i.3.2.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2

بطريقة[ADM] لكل $t = 0.01, 0 < x, y < \pi$

3.3 طريقة الفروق المنتهية Finite differences method[FDM]

إن فكرة طريقة تقريب الفروق المنتهية [FDM] هي التعويض عن المشتقات الجزئية في المعادلة التفاضلية الجزئية بفروقات منتهية وعليه يقرب حل المعادلة التفاضلية الجزئية بحل معادلة الفروقات المنتهية. وللاشتقاق الطريقة نتبع الخطوات التالية:

يتم أولاً تقسيم الفترة $[a, b]$ والفترة $[c, d]$ إلى m, n من الأجزاء المتساوية على التوالي وذلك باختيار n, m بحيث

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ , } k = \frac{d-c}{m}$$

ومن خلال متسلسلة تايلور

$$u(x_k + h) = u(x_k) + \frac{h}{1!}u'(x_k) + \frac{h^2}{2!}u''(x_k) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_k) + O(h^4) \quad (1)$$

$$u(x_k + h) - u(x_k) = \frac{h}{1!}u'(x_k) + \frac{h^2}{2!}u''(x_k) + \cdots$$

$$\frac{u(x_k + h) - u(x_k)}{h} = u'(x_k) + \frac{h}{2}u''(x_k) + \cdots$$

$$u'(x_k) = \frac{u(x_k + h) - u(x_k)}{h} + \frac{h}{2}u''(x_k) + \cdots$$

أي أن

$$u'(x_k) = \frac{u(x_k + h) - u(x_k)}{h} + O(h) \qquad (2)$$

وبالمثل

$$u(x_k - h) = u(x_k) - \frac{h}{1!}u'(x_k) + \frac{h^2}{2!}u''(x_k) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_k) + O(h^4) \quad (3)$$

نجد أن

$$u'(x_k) = \frac{u(x_k) - (x_k - h)}{h} + O(h) \qquad (4)$$

حيث المعادلتين (2)،(4) تمثل صيغة الفروق الأمامية والخلفية على التوالي .

و بطرح المعادلة (3) من (1) والقسمة على $2h$ نحصل

$$u'(x_k) = \frac{u(x_k + h) - u(x_k - h)}{2h} + O(h^2) \qquad (5)$$

المعادلة (5) أفضل تقريب ل$u'(x_k)$ من المعادلتين (2) و(4).

وبجمع المعادلة (1) من (3) نحصل

$$u''(x_k) = \frac{u(x_k + h) - 2u(x_k) - u(x_k - h)}{h^2} + O(h^2) \quad (6)$$

المعادلة (6) أفضل تقريب لفروقات ل$u''(x_k)$.

حيث $O(h^2) \to 0$ كلما $h \to 0$.

1.3.3 طريقة الفروق المنتهية لحل معادلة الموجة في بعد واحد

لتوضيح طريقة الفروق المنتهية لحل معادلة الموجة في بعد واحد ندرس الحالة التالية:

مثال1

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [FDM]:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad (1)$$

مع شروط حدية

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

وشروط ابتدائية

$$u(x,0) = f(x)\,, u_t(x,0) = g(x)$$

حيث l, c ثوابت.

تتلخص الطريقة في عدة خطوات:

- الخطوة الأولى: نقسم النطاق $\Omega = \{(x,t): 0 < x < l, t > 0\}$

نختار عدد صحيح N بحيث

$$h = \frac{l - 0}{N} = \frac{l}{N}$$

$$x_i = ih, i = 0,1,2, \dots, n$$

$$t_j = jk, j = 0,1,2, \dots$$

- الخطوة الثانية: نستبدل المشتقات في المعادلة (1) بمعادلة الفرق المركزي أي أن

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2}$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

نفرض أن $\lambda = \frac{ck}{h}$ ، نحصل على معادلة الفروق التالية:

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \lambda^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

وعندما $\lambda = 1$ تصبح المعادلة

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \qquad (2)$$

المعادلة (2) تمثل تقريب الفروقات المنتهية لمعادلة الموجة في بعد واحد باستخدام الفرق المركزي وتتحقق لكل من $i = 1,2, \dots, n-1$ و $j = 1,2, \dots$.

بما أن $\lambda = 1$ فإن

$$1 = \frac{ck}{h} \Rightarrow k = \frac{h}{c}$$

- الخطوة الثالثة: الشروط الحدية تعطى

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow u(0,jk) = 0 \Longrightarrow u_{0,j} = 0, \qquad \forall j = 1,2, \dots$$

$$u(l,t) = 0 \Rightarrow u(l,jk) = 0 \Longrightarrow u_{n,j} = 0, \qquad \forall j = 1,2, \dots$$

- الخطوة الرابعة: الشروط الابتدائية تؤدي إلى أن

$$u(ih,0) = f(x_i) \Rightarrow u_{i,0} = f(x_i), \qquad \forall i = 1,2, \dots, n-1$$

لاحظ من خلال المعادلة (2) لإيجاد قيم الدالة $u(x,t)$ عند $j+1$ نستخدم قيم الدالة عند j , $j-1$، فمثلا لحساب $u_{i,2}$ نحتاج إلى $u_{i,1}$ و $u_{i,0}$.

هذه القيم يمكن الحصول عليها من خلال الشرط الابتدائي $u_t(x,0)=g(x)$ ، وذلك باستبدال المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ بالفرق المركزي، أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2k}=g(x_i)$$

بحيث $u_{i,-1}$ قيمة الدالة $u(x,t)$ عند $j=1$.

و حيث أن $u_{i,0}=f(x_i)$ ، و بالتعويض عن $j=0$ في المعادلة (2) نحصل على

$$u_{i,1}=u_{i+1,0}+u_{i,-1}-u_{i-1,0} \qquad (2)$$

$$u_{i,1}=\frac{1}{2}[f(x_{i+1})+f(x_{i-1})+kg(x_i)], \qquad \forall i=1,2,\dots,n-1$$

مثال2

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [FDM]:

$$u_{tt}-4u_{xx}=0,0\le x\le \pi, t>0 \qquad (1)$$

$$B.C:\ u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

$$I.C:\ u(x,0)=\sin(3x)\ ,u_t(x,0)=0$$

الحل

من المثال 1

- نفرض أن $h=\frac{\pi}{8}$ ومن العلاقة $k=\frac{h}{c}$ يمكن إيجاد قيمة k أي أن

$$k=\frac{h}{c}=\frac{\pi}{16}$$

ومنها نحصل على قيم x_i ، t_j ، أي أن

$$x_i = \frac{i\pi}{8} \; , i = 0,1,2, \dots ,8$$

$$x_i = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \pi$$

$$t_j = \frac{j\pi}{16} \quad , j = 0,1,2, \dots ,8$$

$$t_j = 0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}$$

- حيث أن معادلة الفرق للمعادلة (1) هي

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} \qquad (2)$$

- الشروط الحدية تعطى كالتالي

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow u(0,jk) = 0$$

$$\Rightarrow u_{0,j} = 0, \qquad \forall j = 1,2, \dots ,7$$

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow u(\pi,jk) = 0$$

$$\Rightarrow u_{8,j} = 0 \, , \qquad \forall j = 1,2, \dots ,7$$

- الشروط الابتدائية تؤدي إلى أن

$$u(x,0) = \sin(3x) \Rightarrow u(ih,0) = \sin(3x_i)$$

$$\Rightarrow u_{i,0} = \sin(3x_i)$$

$$, u_t(x,0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = 0 \Rightarrow u_{i,1} = u_{i,-1}$$

ولحساب الصف $u_{i,1}$ نفرض أن $j = 0$ في المعادلة (2) نحصل على

$$u_{i,1} = u_{i+1,0} - u_{i,-1} + u_{i-1,0}$$

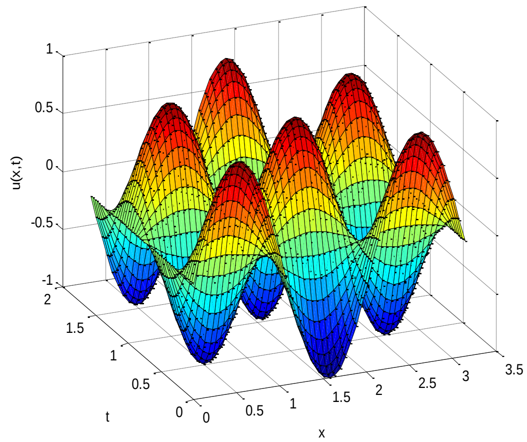
وحيث أن $u_{i,1} = u_{i,-1}$ فإن:

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}\left[u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right], \qquad \forall i = 0, \dots 8$$

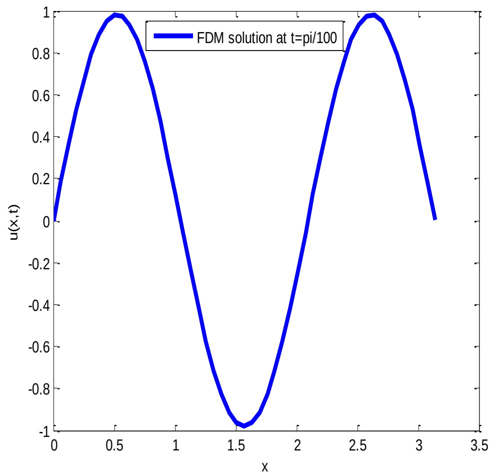
إذا من معادلة الفرق (2) والشروط الحدية والشروط لابتدائية نكون جدول لنحصل على قيم $u_{i,j}$ لكل $i = 0,1,2, \dots, 8$ و $j = 0,1,2, \dots, 8$.

جدول(1.3) يوضح قيم $u_{i,j}$ عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

t_j \ x_i	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708	1.9635	2.3562	2.7489	3.1416
0	0	0.9239	0.7071	-0.3827	-1	-0.3827	0.7071	0.9239	0
0.1963	0	0.3536	0.2706	-0.1465	-0.3827	-0.1465	0.2706	0.3536	0
0.3927	0	-0.6533	-0.5	0.2706	0.707	0.2706	-0.5	-0.6533	0
0.5890	0	-0.8536	-0.6533	0.3536	0.9239	0.3536	-0.6533	-0.8536	0
0.7854	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.9817	0	0.8536	0.6533	-0.3536	-0.9239	-0.3536	0.6533	0.8536	0
1.1781	0	0.6533	0.5	-0.2706	-0.7071	-0.2706	0.5	0.6533	0
1.3744	0	-0.3536	-0.2706	0.1464	0.3827	0.1464	-0.2706	-0.3536	0
1.5708	0	-0.9239	-0.7071	0.3827	1	0.3827	-0.7071	-0.9239	0



شكل(i.1.3.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2 بطريقة [FDM] عندما $0 \le x \le \pi, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$



شكل(ii.1.3.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2 بطريقة [FDM] عندما $t = \frac{\pi}{100}$

مثال 3

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [FDM]:

$$u_{tt} = u_{xx} + \pi^2 \sin(2\pi x), 0 \le x \le 1, t > 0 \qquad (1)$$

$$B.C: \;\; u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$I.C:\ u(x,0) = 0\ , u_t(x,0) = 0$$

الحل

من المثال1، نفرض أن $h = \frac{1}{8}$ ومن العلاقة $k = \frac{h}{c}$ يمكن إيجاد قيمة k ، أي أن:

$$k = \frac{h}{c} = \frac{1}{8}$$

ومنها نحصل على قيم x_i ، t_j كالتالي:

$$x_i = ih = \frac{i}{8}, i = 0,1,2, \dots ,8$$

$$x_i = 0,0.125,0.25,0.375,0.5,0.625,0.75,0.875,1$$

$$t_j = jk = \frac{j}{8}, j = 0,1,2, \dots ,8$$

$$t_j = 0,0.125,0.25,0.375,0.5,0.625,0.75,0.875,1$$

وحيث أن معادلة الفرق هي

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + k^2\pi^2 \sin(2\pi x_i) \qquad (2)$$

والشروط الحدية

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow u_{0,j} = 0, \forall j = 1,2, \dots ,7$$

$$u(1,t) = 0 \Rightarrow u_{8,j} = 0, \forall j = 1,2, \dots ,7$$

والشروط الابتدائية

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow u_{i,0} = 0$$

$$u_t(x,0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = 0 \Rightarrow u_{i,1} = u_{i,-1}$$

ولحساب الصف $u_{i,1}$ نفرض أن $j = 0$ في المعادلة (2) نحصل على

$$u_{i,1} = u_{i+1,0} - u_{i,-1} + u_{i-1,0} + k^2\pi^2 \sin(2\pi x_i)$$

وحيث أن $u_{i,1} = u_{i,-1}$ فإن:

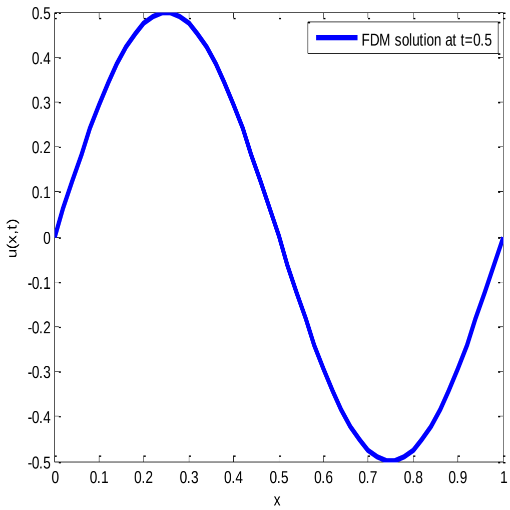
$$u_{i,1} = u_{i+1,0} - u_{i,1} + u_{i-1,0} - k^2\pi^2 \sin(2\pi x_i)$$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}\left[u_{i+1,0} + u_{i-1,0} + k^2\pi^2 \sin(2\pi x_i)\right]$$

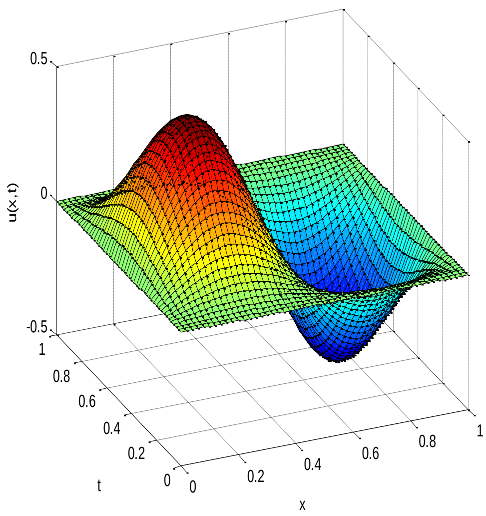
إذاً من معادلة الفروق(2) والشروط الحدية و الشروط الابتدائية نكون جدول لنحصل على قيم $u_{i,j}$ لكل $i = 0,1,2, \dots ,8$، $j = 0,1,2, \dots ,8$.

جدول(2.3) يوضح كل قيم $u_{i,j}$ عند $0 \le t \le 1$

t_j \ x_i	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.125	0	0.0518	0.0732	0.0518	0	-0.0518	-0.0732	-0.0518	0
0.25	0	0.1768	0.25	0.1768	0	-0.1768	-0.25	-0.1768	0
0.375	0	0.3018	0.4268	0.3018	0	-0.3018	-0.4268	-0.3018	0
0.5	0	0.3536	0.5	0.3536	0	-0.3536	-0.5	-0.3536	0
0.625	0	0.3018	0.4268	0.3018	0	-0.3018	-0.4268	-0.3018	0
0.75	0	0.1768	0.25	0.1768	0	-0.1768	-0.25	-0.1768	0
0.875	0	0.0518	0.0732	0.0518	0	-0.0518	-0.0732	-0.0518	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0



شكل(ii.2.3.3) يوضح الحل التقريبي للمثال3
بطريقة [FDM] عندما $t = 0.5$



شكل(i.2.3.3) يوضح الحل التقريبي للمثال3
بطريقة [FDM] عندما $0 \le t, x \le 1$

1.3.3 طريقة الفروق المنتهية لحل معادلة الموجة في بعدين

يمكن تعميم طريقة الفروق المنتهية لحل معادلة الموجة في بعدين ولتوضيح الطريقة ندرس معادلة الموجة التالية

مثال1

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [FDM]:

$$u_{tt}=c^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(x,y,t),0<t,0<y<l',0<x<l \quad (1)$$

$$u(0,y,t)=u(l,y,t)=u(x,0,t)=u(x,l',t)=0 \qquad (B.C)$$

$$u(x,y,0)=f(x,y),u_t(x,y,0)=0 \qquad (I.C)$$

تتلخص الطريقة في عدة خطوات:

- الخطوة الأولى: نقسم النطاق ونختار أعداد صحيحة r,m,n بحيث

$$\Delta x=x_{i+1}-x_i$$

$$\Delta y=y_{j+1}-y_j$$

$$\Delta t=t_{k+1}-t_k$$

لكل$i=1,2,\dots m-1$، $j=1,2,\dots r-1$، $k=1,2,\dots,n-1$.

- الخطوة الثانية: نفرض أن $\Delta x=\Delta y=h$
- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة الفروق المنتهية

نستبدل المشتقات في المعادلة (1) بمعادلة الفرق المركزي مع اهمال مقدار الخطأ، أي أن:

$$u_{tt}\left(x_i,y_j,t_k\right)=\frac{u\left(x_i,y_j,t_{k+1}\right)-2u\left(x_i,y_j,t_k\right)+u\left(x_i,y_j,t_{k-1}\right)}{(\Delta t)^2}$$

$$u_{xx}\left(x_i,y_j,t_k\right)=\frac{u\left(x_{i+1},y_j,t_k\right)-2u\left(x_i,y_j,t_k\right)+u\left(x_{i-1},y_j,t_k\right)}{h^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j, t_k) = \frac{u(x_i, y_{j+1}, t_k) - 2u(x_i, y_j, t_k) + u(x_i, y_{j-1}, t_k)}{h^2}$$

وبالتعويض عن معادلات الاستبدال u_{yy}, u_{xx}, u_{tt} في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta t^2} = c^2\left(\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,jk}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h^2}\right) + f(x_i, y_j, t_k) \qquad (2)$$

لكل $i = 1,2, \dots m-1$، $j = 1,2, \dots r-1$، $k = 1,2, \dots, n-1$

وبضرب طرفي المعادلة (2) بالمقدار Δt^2 و نفرض أن $1 = \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2} = s^2$ نحصل على:

$$u_{i,j,k+1} = u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k} - u_{i,j,k-1} + (\Delta t)^2 f(x_i, y_j, t_k) \qquad (3)$$

المعادلة (3) تمثل تقريب الفروقات المنتهية لمعادلة الموجة في بعدين وتتحقق لكل

$i = 1,2, \dots m-1$، $j = 1,2, \dots r-1$، $k = 1,2, \dots, n-1$.

- الشروط الحدية

$$u_{0,j,k} = u_{m,j,k} = u_{i,0,k} = u_{i,r,k} = 0$$

$$\forall i = 1, \dots m-1, j = 1,2, \dots r-1, k = 1, \dots, n-1$$

- الشروط الابتدائية:

$$u_{i,j,o} = f(x_i, y_j), \forall i = 0,1, \dots m, j = 0,1, \dots r$$

وبالنسبة لشرط الابتدائي$u_t(x, y, 0) = 0$ نستبدل المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ بالفرق المركزي أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j,1} - u_{i,j,-1}}{2k} = 0$$

$$\Rightarrow u_{i,j,1} = u_{i,j,-1}$$

ومـن معادلـة الفـروق و الشـروط الحديـة والابتدائيـة نتحصـل علـى كـل قـيم $u_{i,j,k}$ لكـل $i = 1,2, \dots m - 1$، $j = 1,2, \dots r - 1$، $k = 1,2, \dots, n - 1$.

مثال2

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية مستخدماً طريقة [FDM]:

$$u_{tt} = 4\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \ , 0 < t, 0 < y, x < \pi \quad (1)$$

$$B.C: \ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = \ u(x, \pi, t) = 0$$

$$I.C: \ u(x, y, 0) = 2\sin(\frac{\pi}{4}x)\sin(\frac{\pi}{4}y) \ , u_t(x, y, 0) = 0$$

الحل

من المثال 1

- نفرض أن $\Delta x = \Delta y = 0.06$ ،$\Delta t = 0.03$
- وحيث أن معادلة الفروق لمعادلة (1) تكون على الصورة

$$u_{i,j,k+1} = u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k} - u_{i,j,k-1} \quad (2)$$

لكل $i = 1,2, \dots m - 1$، $j = 1,2, \dots r - 1$، $k = 1,2, \dots, n - 1$

- الشروط الحدية:

$$u_{0,j,k} = u_{m,j,k} = u_{i,0,k} = u_{i,r,k} = 0$$

$$\forall i = 0,1, \dots m, j = 0,1, \dots r, k = 0,1, \dots, n$$

- الشروط الابتدائية

$$u(x, y, 0) = 2\sin(\frac{\pi}{4}x)\sin(\frac{\pi}{4}y)$$

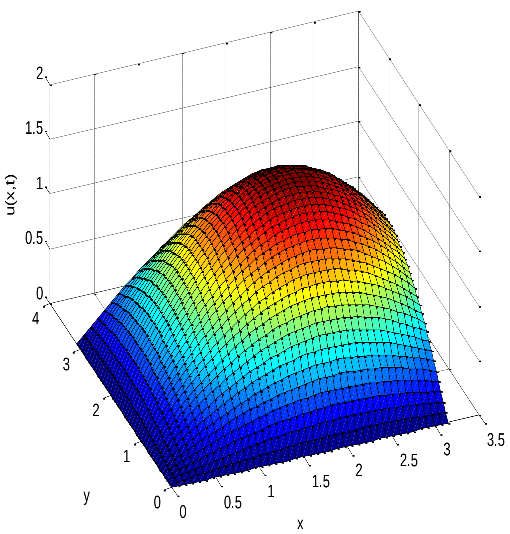
$$\Rightarrow u_{i,j,o} = 2\sin(\frac{\pi}{4}x_i)\sin(\frac{\pi}{4}y_j)$$

و بالنسبة لشرط الابتدائي $u_t(x, y, 0) = 0$ نستبدل المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ بالفرق المركزي أي أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{i,j,1}-u_{i,j,-1}}{2k}=0$$

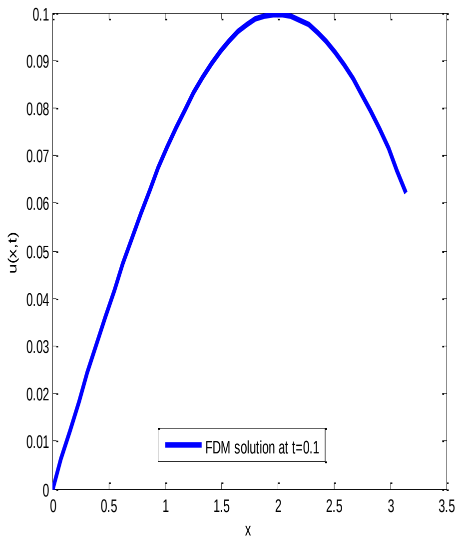
$$\Rightarrow u_{i,j,1}=u_{i,j,-1}$$

من معادلة الفرق (2) والشروط الحدية والابتدائية وباستخدام برنامج الماتلاب مع $m=r=50$ نحصل على الشكل[i.3.3.3] الذي يوضح كل قيم $u_{i,j,k}$ عندما $0\le y,x\le\pi$ ، $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ ، لكل $i=1,2,\dots m-1$ ،$j=1,2,\dots r-1$ ، $k=1,2,\dots,n-1$.



شكل(i.3.3.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2

بطريقة [FDM]عندما $0\le t\le\frac{\pi}{2},0\le y,x\le\pi$



شكل(ii.3.3.3) يوضح الحل التقريبي للمثال2

بطريقة [FDM] عندما $t=0.1$

نلاحظ مما سبق نجد أنه تمت دراسة طريقتين عدديتين لحل معادلة الموجة في بعد واحد وبعدين وهما طريقة تقريب أدوميان Adomian Decomposition Method[ADM] وطريقة الفروق المنتهية Finite Differences Method[FDM]، وقد تم توضيح كيفية تطبيق الطريقتين على عدة أمثلة مختلفة، إضافة إلى ذلك تم توضيح النتائج المتحصل عليها من هذه الأمثلة في صورة جداول وأشكال بيانية.

الفصل الرابع

مقارنة نتائج الطرق التحليلية والعددية

Comparing The Results of Analytical and Numerical Methods

1.4 مقدمة Introduction

يحتوي هذا الفصل على مقارنة لنتائج الحلول التحليلية والحلول العددية لمعادلة الموجة الخطية والمتحصل عليه من الطريقتين العدديتين Adomian decomposition method[ADM]، Finite differences method[FDM]، سنستخدم برنامج الماتلابMatlab لتوضيح المقارنة بين نتائج الحلين التحليلي والعددي.

مثال 1

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية :

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0\,, t > 0\,, 0 < x < \pi \qquad (1)$$

$$B.C : u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$I.C \ : u(x,0) = \sin(2x)\,, u_t(x,0) = 0$$

الحل التحليلي(الفعلي)

$$u(x,t) = \cos(4t)\sin(2x)$$

الحل:

(1) طريقة تقريب أدوميان[ADM]:

$$L_{tt}(u(x,t)) - 4L_{xx}\big(u(x,t)\big) = 0 \qquad (2)$$

حيث أن

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.)\,, L_{xx}(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$$

نطبق المؤثر العكسي لطرفي المعادلة (2) والمعرف كالتالي

$${L_{tt}}^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)dtdt$$

إذا

$$L_{tt}{}^{-1}\left(L_{tt}(u(x,t))\right) - 4L_{tt}{}^{-1}\left(L_{xx}\left(u(x,t)\right)\right) = 0$$

$$u(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)t + 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u(x,t) = \sin(2x) + 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dtdt$$

الان نعوض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي ان

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sin 2x + 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)]}{\partial x^2}dtdt$$

ومنها

$$u_0(x,t) = \sin(2x)$$

$$u_{n+1}(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)]}{\partial x^2}dtdt \;, n \geq 0$$

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[u_0(x,t)]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[\sin(2x)]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_1(x,t) = -8t^2\sin(2x)$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[u_1(x,t)]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[-8t^2\sin(2x)]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_2(x,t) = \frac{32}{3}t^4\sin(2x)$$

$$u_3(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[u_2(x,t)]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_3(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\left[\frac{32}{3}t^4\sin(2x)\right]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_3(x,t) = -\frac{256}{45}t^6\sin(2x)$$

$$u_4(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[u_3(x,t)]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_4(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\left[-\frac{256}{45}t^6\sin(2x)\right]}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_4(x,t) = \frac{512}{315}t^8\sin(2x)$$

$$\vdots$$

وهكذا، إذاً

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t) + \cdots$$
$$= \sin(2x) - 8t^2\sin(2x) + \frac{32}{3}t^4\sin(2x) - \frac{256}{45}t^6\sin(2x) + \frac{512}{315}t^8\sin(2x) + \cdots$$

$$u(x,t) = \sin 2x\left[1 - 8t^2 + \frac{32}{3}t^4 - \frac{256}{45}t^6 + \frac{512}{315}t^8 + \cdots\right]$$

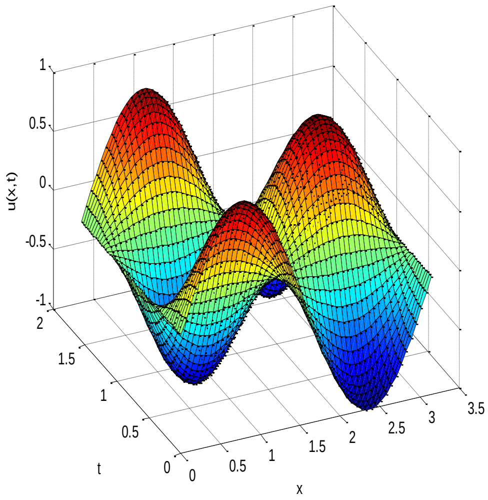
حيث أن

$$\cos(4t) = 1 - 8t^2 + \frac{32}{3}t^4 - \frac{256}{45}t^6 + \frac{512}{315}t^8 + \cdots$$

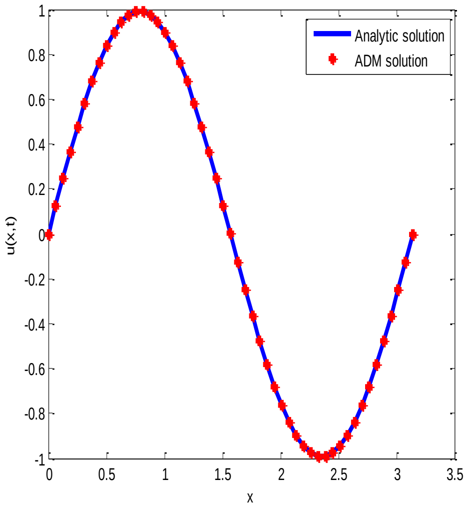
إذاً الحل التقريبي(العددي) يكون على الصورة التالية

$$u(x,t) \cong \sin(2x)\cos(4t)$$

نلاحظ أن الحل العددي باستخدام طريقة [ADM] يتقارب إلى الحل التحليلي(الفعلي).



شكل((1).4.1.1.I) يوضح حل المثال 1 باستخدام طريقة [ADM]عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \pi$



شكل((1).4.1.1.II) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = \frac{\pi}{100}$

(2) طريقة الفروق المنتهية [FDM]

نفرض أن $h = \frac{\pi}{8}$، ومن العلاقة $k = \frac{h}{c}$ يمكن إيجاد قيمة k، أي أن

$$k = \frac{h}{c} = \frac{\pi}{16}$$

من خلال قيمتي h ،k نحصل على قيم x_i،t_j حيث أن:

$$x_i = ih$$

$$x_i = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \pi, i = 0,1,\dots,8$$

$$t_j = jk$$

$$t_j = 0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\ , j = 0,1, \dots ,8$$

وحيث أن معادلة الفرق للمعادلة (1) تكون على الصورة التالية

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} \qquad (3)$$

والشروط الحدية

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$\Rightarrow u_{0,j} = u_{8,j} = 0, j = 1, \dots 7$$

والشروط الابتدائية

$$u(x,0) = \sin(2x) \ \Rightarrow u_{i,0} = \sin(2x_i)$$

$$, u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = 0$$

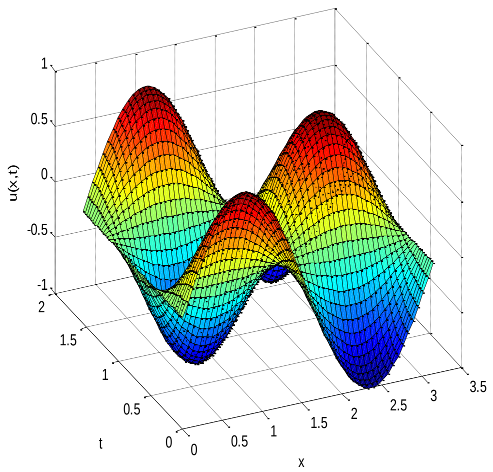
$$\Rightarrow u_{i,1} = u_{i,-1}$$

ومن معادلة الفرق(3) والشروط الحدية والشروط الابتدائية نكون جدول لنحصل على قيم $u_{i,j}$ لكل $i = 0,1,2, \dots ,8$ ، $j = 0,1,2, \dots ,8$.

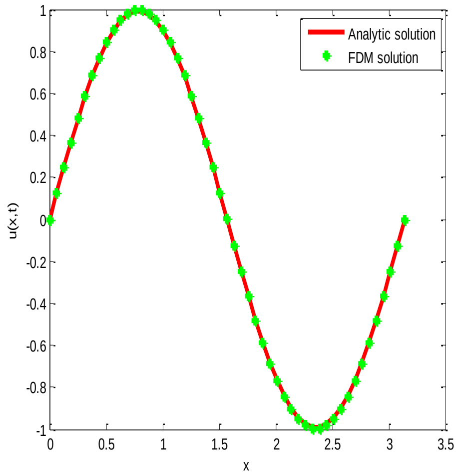
جدول(1.4) يوضح كل قيم $u_{i,j}$ عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

t_j \ x_i	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708	1.9635	2.3562	2.7489	3.1416
0	0	0.7071	1	0.7071	0	-0.7071	-1	-0.7071	0
0.1963	0	0.5	0.7071	0.5	0	-0.5	-0.7071	-0.5	0
0.3927	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5890	0	-0.5	-0.7071	-0.5	0	0.5	0.7071	0.5	0
0.7854	0	-0.7071	-1	-0.7071	0	0.7071	1	0.7071	0
0.9817	0	-0.5	-0.7071	-0.5	0	0.5	0.7071	0.5	0
1.1781	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.3744	0	0.5	0.7071	0.5	0	-0.5	-0.7071	-0.5	0
1.5708	0	0.7071	1	0.7071	0	-0.7071	-1	-0.7071	0

لاحظ أنه من خلال نتائج الرسم الموضح في الشكل((2).1.1.4.ii) الحل العددي للمثال (1) باستخدام طريقة [FDM] يتقارب إلى الحل التحليلي.



شكل((2).1.1.4.i) يوضح حل المثال 1 باستخدام طريقة [FDM] عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \pi$



شكل((2).1.1.4.ii) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = \frac{\pi}{100}$

مثال 2

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية :

$$u_{tt} = u_{xx} \,, t > 0 \,, 0 < x < 1 \qquad (1)$$

$$B.C: \; u(0,t) = 2 \,, u(1,t) = 3$$

$$I.C: \; u(x,0) = 2 + x + 2\sin(\pi x) \,, u_t(x,0) = 0$$

الحل التحليلي(الفعلي)

$$u(x,t) = 2 + x + 2\sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

الحل

(1) طريقة تقريب أدوميان [ADM]

حيث أن

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.) \,, L_{xx}(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$$

أي أن

$$L_{tt}(u(x,t)) = 4L_{xx}\big(u(x,t)\big) \qquad (2)$$

نطبق المؤثر العكسي لطرفي المعادلة (2) و المعرف كالتالي

$$L_{tt}{}^{-1}(.) = \int_0^t\int_0^t (.)dtdt$$

إذا

$$L_{tt}{}^{-1}\big(L_{tt}(u(x,t))\big) = L_{tt}{}^{-1}\left(L_{xx}\big(u(x,t)\big)\right)$$

$$u(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)t + \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u(x,t) = 2 + x + 2\sin(\pi x) + \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dtdt$$

الان نعوض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي ان

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = 2 + x + 2\sin(\pi x) + \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)]}{\partial x^2}dtdt$$

ومنها

$$u_0(x,t) = 2 + x + 2\sin(\pi x)$$

$$u_{n+1}(x,t) = \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)]}{\partial x^2}dtdt\ , n \geq 0$$

$$u_1(x,t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2[u_0(x,t)]}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_1(x,t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2[2 + x + 2\sin(\pi x)]}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_1(x,t) = -\pi^2 t^2 \sin(\pi x)$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2[u_1(x,t)]}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2[-\pi^2 t^2 \sin(\pi x)]}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{12}\pi^4 t^4 \sin(\pi x)$$

$$u_3(x,t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2[u_2(x,t)]}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_3(x,t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2\left[\frac{1}{12}\pi^4 t^4 \sin(\pi x)\right]}{\partial x^2} dtdt$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{360}\pi^6 t^6 \sin(\pi x)$$

$$\vdots$$

وهكذا، إذاً

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \cdots$$

$$= 2 + x + 2\sin(\pi x) - \pi^2 t^2 \sin(\pi x) + \frac{1}{12}\pi^4 t^4 \sin(\pi x) - \frac{1}{360}\pi^6 t^6 \sin(\pi x) + \cdots$$

$$= 2 + x + 2\sin \pi x \left[1 - \frac{1}{2}\pi^2 t^2 + \frac{1}{24}\pi^4 t^4 - \frac{1}{720}\pi^6 t^6 + \cdots\right]$$

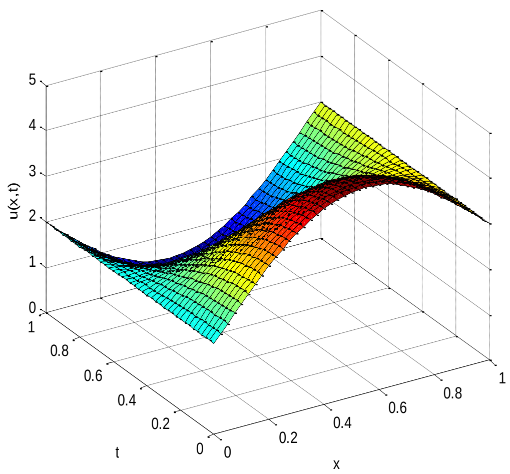
حيث أن

$$\cos(\pi t) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 t^2 + \frac{1}{24}\pi^4 t^4 - \frac{1}{720}\pi^6 t^6 + \cdots$$

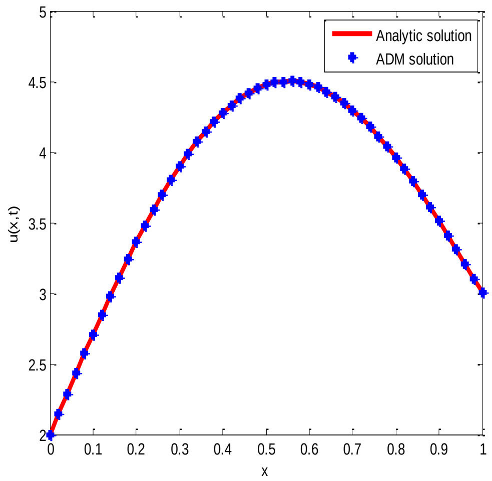
إذاً الحل التقريبي(العددي) يكون على الصورة التالية

$$u(x,t) \cong 2 + x + 2\sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

نلاحظ أن الحل العددي باستخدام طريقة [ADM] يتقارب إلى الحل التحليلي(الفعلي).



شكل((1).I.2.1.4) يوضح حل المثال2 باستخدام طريقة [ADM]عندما $0 \le t, x \le 1$



شكل((1).II.2.1.4) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = 0.05$

(2) طريقة الفروق المنتهية[FDM]

نفرض أن $h = \frac{1}{8}$ ، ومن العلاقة $k = \frac{h}{c}$ يمكن إيجاد قيمة k أي أن

$$k = \frac{h}{c} = \frac{1}{8}$$

ومن خلال قيمتي k،h نحصل على قيم x_i ، t_j حيث أن

$$x_i = ih$$

$$x_i = 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1 \,, i = 0,1,\dots,8$$

$$t_j = jk$$

$$t_j = 0,0.125\ ,0.25,0.375,0.5,0.625,0.75,0.875,1\ \ ,j = 0,1,\dots,8$$

وحيث أن معادلة الفرق للمعادلة (1) هي

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} \qquad (3)$$

والشروط الحدية

$$u(0,t) = 2$$

$$\Longrightarrow u_{0,j} = 2, \forall j = 1,2,3,4,5,6,7$$

و

$$u(1,t) = 3$$

$$u_{8,j} = 3, \forall j = 1,2,3,4,5,6,7$$

والشروط الابتدائية

$$u(x,0) = 2 + x + 2\sin(\pi x)$$

$$\Longrightarrow u_{i,0} = 2 + x_i + 2\sin(\pi x_i)$$

و

$$u_t(x,0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = 0$$

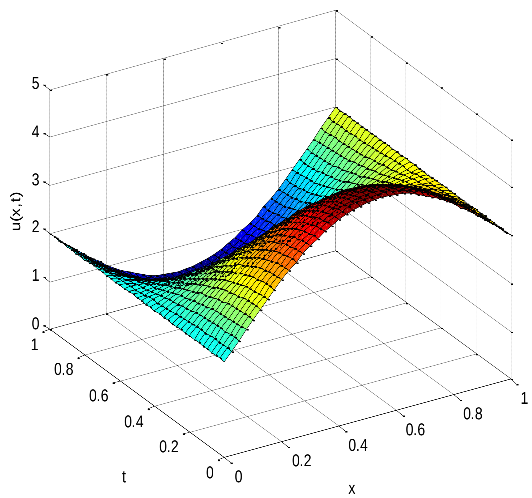
$$\Longrightarrow u_{i,1} = u_{i,-1}$$

ومن معادلة الفرق(3) والشروط الحدية والشروط الابتدائية نكون جدول لنحصل على قيم $u_{i,j}$ لكل $i = 0,1,2,\dots,8$ ، $j = 0,1,2,\dots,8$.

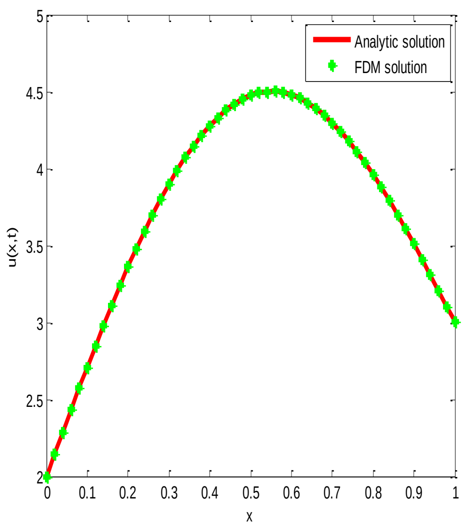
جدول(2.4) يوضح كل قيم $u_{i,j}$ عند $0 \leq t \leq 1$

t_j \ x_i	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
0	2	2.8904	3.6642	4.2228	4.5000	4.4728	4.1642	3.6404	3
0.125	2	2.8321	3.5566	4.0821	4.3478	4.3321	4.0566	3.5821	3
0.25	2	2.6662	3.2500	3.6816	3.9142	3.9316	3.7500	3.4162	3
0.375	2	2.4179	2.7912	3.0821	3.2654	3.3321	3.2912	3.1679	3
0.5	2	2.1250	2.2500	2.3750	2.5000	2.6250	2.7500	2.8750	3
0.625	2	1.8321	1.7088	1.6679	1.7346	1.9179	2.2088	2.5821	3
0.75	2	1.5838	1.2500	1.0684	1.0858	1.3184	1.7500	2.3338	3
0.875	2	1.4179	0.9434	0.6679	0.6522	0.9179	1.4434	2.1679	3
1	2	1.3596	0.8358	0.5272	0.5000	0.7772	1.3358	2.1096	3

لاحظ أنه من خلال نتائج الرسم الموضح في الشكل((2).ii.2.1.4) الحل العددي للمثال (2) باستخدام طريقة [FDM] يتقارب إلى الحل التحليلي.



شكل((2).I.2.1.4) يوضح حل المثال2 باستخدام طريقة[FDM] عندما $0 \leq t, x \leq 1$



شكل((2).II.2.1.4) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = 0.05$

مثال 3

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية :

$$u_{tt} - 4u_{xx} = (1 - x)\cos(t) \ , t > 0 \, , 0 < x < \pi \qquad (1)$$

$$B.C:\ u_x(0, t) = \cos(t) - 1 \, , u_x(\pi, 0) = \cos(t)$$

$$I.C:\ u(x,0)=\frac{x^2}{2\pi}\ ,\ u_t(x,0)=\cos(3x)$$

الحل التحليلي(الفعلي)

$$u(x,t)=\frac{x^2}{2\pi}+(1-\cos(t))(1-x)+\frac{2t^2}{\pi}+\frac{1}{6}\sin(6t)\cos(3x)$$

الحل

(1) طريقة تقريب أدوميان[ADM]

حيث أن

$$L_{tt}(.)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(.)\ ,L_{xx}(.)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$$

أي أن

$$L_{tt}\big(u(x,t)\big)=4L_{xx}\big(u(x,t)\big)+(1-x)\cos(t)\qquad (2)$$

نطبق المؤثر العكسي لطرفي المعادلة (2) نحصل على

$$L_{tt}{}^{-1}\Big(L_{tt}\big(u(x,t)\big)\Big)=4L_{tt}{}^{-1}\Big(L_{xx}\big(u(x,t)\big)\Big)+L_{tt}{}^{-1}\big((1-x)\cos t\big)$$

$$\int_0^t\int_0^t\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}dtdt=4\int_0^t\int_0^t\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}dtdt+\int_0^t\int_0^t(1-x)\cos t\,dtdt$$

$$\int_0^t\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_0^t dt=4\int_0^t\int_0^t\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}dtdt+\int_0^t(1-x)\sin t\,dt$$

$$\int_0^t\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right]$$

$$=4\int_0^t\int_0^t\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}dtdt-(1-x)\cos t+(1-x)$$

$$[u(x,t)]_0^t - u_t(x,0)t = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dtdt - (1-x)\cos t + (1-x)$$

إذاُ

$$u(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)t + 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dtdt - (1-x)\cos t + (1-x)$$

وبالتعويض عن الشروط الابتدائية نحصل على

$$u(x,t) = \frac{x^2}{2\pi} + t\cos 3x - (1-x)\cos t + (1-x) + 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dtdt$$

الان نعوض في كل u بمتسلسلة لا نهائية من الحدود أي ان

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \frac{x^2}{2\pi} + t\cos 3x - (1-x)\cos t + (1-x) + 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)}{\partial x^2}dtdt$$

إذاً

$$u_0(x,t) = \frac{x^2}{2\pi} + t\cos 3x + (1-x)\,[1-\cos t]$$

$$u_{n+1}(x,t) = \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)}{\partial x^2}dtdt\ , n \geq 0$$

ومنها نحصل على

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\big(u_0(x,t)\big)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_1(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\left(\dfrac{x^2}{2\pi} + t\cos 3x - (1-x)\cos t + (1-x)\right)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_1(x,t) = \frac{2t^2}{\pi} - 6\,t^3\cos 3x$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\big(u_1(x,t)\big)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_2(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\left(\dfrac{2t^2}{\pi} - 6\,t^3\cos 3x\right)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_2(x,t) = \frac{54}{5}t^5\cos 3x$$

$$u_3(x,t) = \int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\big(u_2(x,t)\big)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_3(x,t) = 4\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2\left(\dfrac{54}{5}t^5\cos 3x\right)}{\partial x^2}dtdt$$

$$u_3(x,t) = -\frac{36}{35}t^7\cos 3x$$

$$\vdots$$

وهكذا، إذاً

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

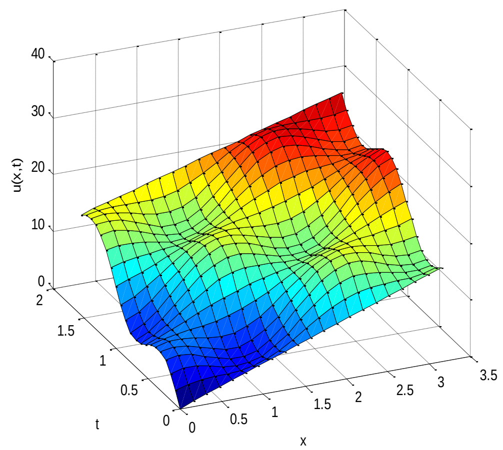
$$= \frac{x^2}{2\pi} + t\cos 3x - (1-x)\cos t + (1-x) + \frac{2t^2}{\pi} - 6\,t^3\cos 3x$$
$$+ \frac{54}{5}t^5\cos 3x - \frac{36}{35}t^7\cos 3x + \cdots$$

$$= \frac{x^2}{2\pi} + (1-x)(1-\cos t) + \frac{2t^2}{\pi}$$
$$+ \left[t - 6t^3 + \frac{54}{5}t^5 - \frac{36}{35}t^7 + \cdots\right]\cos 3x$$

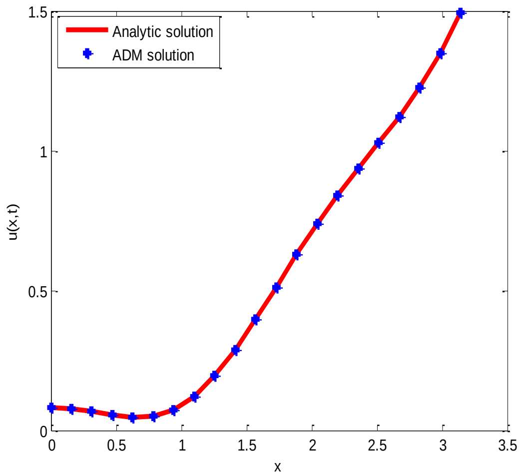
إذاً الحل التقريبي(العددي) يكون على الصورة التالية

$$u(x,t) = \frac{x^2}{2\pi} + (1-\cos(t))(1-x) + \frac{2t^2}{\pi} + \frac{1}{6}\sin(6t)\cos(3x)$$

نلاحظ أن الحل العددي باستخدام طريقة [ADM] يتقارب إلى الحل التحليلي(الفعلي).



شكل((1).3.1.4.I) يوضح حل المثال3 باستخدام طريقة [ADM] عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \pi$



شكل((1).3.1.4.II) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = \frac{\pi}{40}$

(2) **طريقة الفروق المنتهية[FDM]**

نفرض أن $h = \frac{\pi}{8}$ ، ومن العلاقة $k = \frac{h}{c}$ يمكن إيجاد قيمة k، أي أن

$$k = \frac{h}{c} = \frac{\pi}{16}$$

ومن خلال قيمتي h ،k نحصل على قيم x_i ، t_j حيث أن

$$x_i = ih$$

$$x_i = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \pi \quad , i = 0,1, \dots ,8$$

$$t_j = jk$$

$$t_j = 0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2} \quad , j = 0,1, \dots ,8$$

وحيث أن معادلة الفرق للمعادلة (1) هي

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + \left(\frac{\pi}{16}\right)^2 (1 - x_i) \cos(t_j) \quad (3)$$

والشروط الحدية

$$u_x(0,t) = \cos(t) - 1$$

$$\Rightarrow \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = \cos(t_j) - 1$$

$$u_x(\pi, 0) = \cos(t)$$

$$\frac{u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{2h} = \cos(t_j) \Rightarrow \frac{u_{7,j} - u_{9,j}}{2h} = \cos(t_j)$$

والشروط الابتدائية

$$u(x,0) = \frac{x^2}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow u_{i,0} = \frac{{x_i}^2}{2\pi}$$

$$, u_t(x,0) = \cos(3x)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = \cos(3x_i)$$

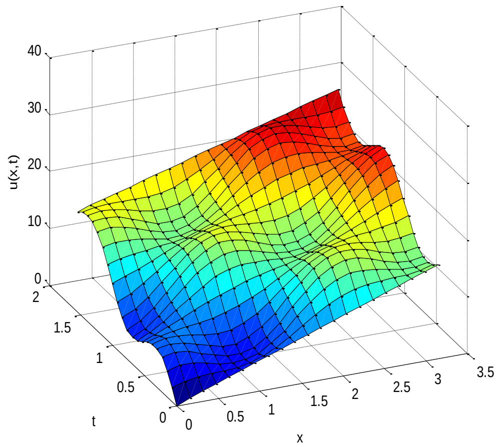
$$\Rightarrow u_{i,1} = u_{i,-1} + \frac{\pi}{8}\cos(3x_i)$$

ومن معادلة الفرق(3) والشروط الحدية والشروط الابتدائية نكون جدول لنحصل على قيم $u_{i,j}$ لكل $i = 0,1,2, \dots ,8$، $j = 0,1,2, \dots ,8$.

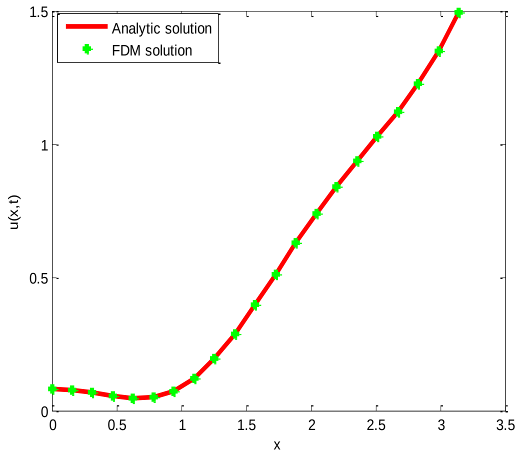
جدول(3.4) يوضح كل قيم $u_{i,j}$ عنما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$t_j \backslash x_i$	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708	1.9635	2.3562	2.7489	3.1416
0	0	0.0245	0.0982	0.2209	0.3927	0.6136	0.8836	1.2026	1.5708
0.1963	0.1977	0.1197	0.0180	0.0998	0.4063	0.7619	0.9909	1.1347	1.4002
0.3927	0.2921	0.2140	0.1294	0.1966	0.4474	0.7473	0.9618	1.1226	1.3881
0.5890	0.3256	0.3234	0.4003	0.4707	0.5174	0.6132	0.8308	1.1532	1.4945
0.7854	0.5189	0.5313	0.6716	0.7154	0.6182	0.5701	0.7612	1.1469	1.5029
0.9817	0.9942	0.8836	0.8522	0.8143	0.7526	0.7401	0.8493	1.0634	1.2964
1.1781	1.6187	1.3281	1.0309	0.8856	0.9239	1.0113	0.0133	0.9615	1.0145
1.3744	2.1615	1.7749	1.3647	1.1379	1.1359	1.1830	1.1035	0.9387	0.8957
1.5708	2.5708	2.2026	1.8836	1.6136	1.3927	1.2209	1.0982	1.0245	1

لاحظ أنه من خلال نتائج الرسم الموضح في الشكل((2).3.1.4.ii) الحل العددي للمثال (3) باستخدام طريقة [FDM] يتقارب إلى الحل التحليلي.



شكل((2).3.1.4.I) يوضح حل المثال3 باستخدام طريقة [FDM]عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \pi$



شكل((2).3.1.4.II) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = \frac{\pi}{40}$

مثال4

أوجد الحل التقريبي(العددي) لمعادلة الموجة التالية :

$$u_{tt} = 2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \;, t > 0 \;, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi \quad (1)$$

$$\text{B.C}: u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0$$

$$\text{I. C: } u(x,y,0)=\sin(2x)\sin(2y)\ \ ,u_t(x,y,0)=0$$

الحل التحليلي(الفعلي)

$$u(x,y,t)=\sin(2x)\sin(2y)\cos(4t)$$

الحل

(1) **طريقة تقريب أدوميان [ADM]**

حيث أن

$$L_{tt}(u(x,y,t))=c^2\big[L_{xx}(u(x,y,t))+L_{yy}(u(x,y,t))\big] \qquad (2)$$

نطبق المؤثر المعكوس ${L_{tt}}^{-1}$ على المعادلة (2) فنحصل على

$${L_{tt}}^{-1}\big(L_{tt}(u(x,y,t))\big)=2{L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t))++L_{yy}(u(x,y,t))\right)$$

$$u(x,y,t)=u(x,y,0)+u_t(x,y,0) \\ +2{L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t))+L_{yy}(u(x,y,t))\right)$$

$$u(x,y,t)=\sin(2x)\sin(2y) \\ +2{L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(u(x,y,t))+L_{yy}(u(x,y,t))\right)$$

حيث

$$u_0(x,t)=\sin(2x)\sin(2y)$$

$$u_1(x,t)=2{L_{tt}}^{-1}\left(L_{xx}(\sin(2x)\sin(2y))+L_{yy}(\sin(2x)\sin(2y))\right)$$

$$u_1(x,t)=2\int_0^t\int_0^t(-8\sin(2x)\sin(2y))dtdt$$

$$u_1(x,t)=-8t^2\sin(2x)\sin(2y)$$

$$u_2(x,t)=2{L_{tt}}^{-1}\Big(L_{xx}(-8t^2\sin(2x)\sin(2y)) \\ +L_{yy}(-8t^2\sin(2x)\sin(2y))\Big)$$

$$u_2(x,t) = 2\int_0^t\int_0^t (64\,t^2\sin(2x)\sin(2y))dtdt$$

$$u_2(x,y,t) = 32t^4\sin(2x)\sin(2y)$$

$$\vdots$$

وهكذا، إذا

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t) + \cdots$$

$$= \sin(2x)\sin(2y) - 8t^2\sin(2x)\sin(2y) + 32t^4\sin(2x)\sin(2y) + \cdots$$

$$u(x,y,t) = \sin(2x)\sin(2y)[1 - 8t^2 + 32t^4 + \cdots]$$

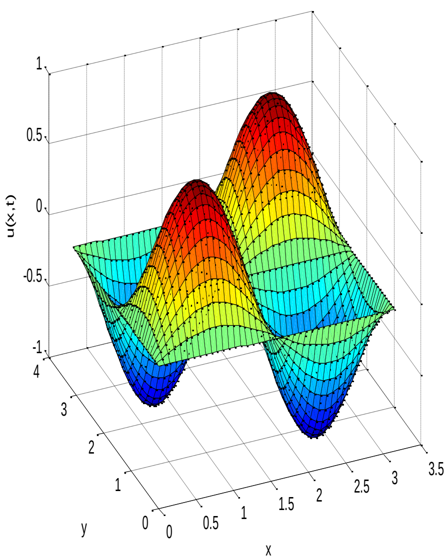
حيث أن

$$\cos(4t) = 1 - 8t^2 + 32t^4 + \cdots$$

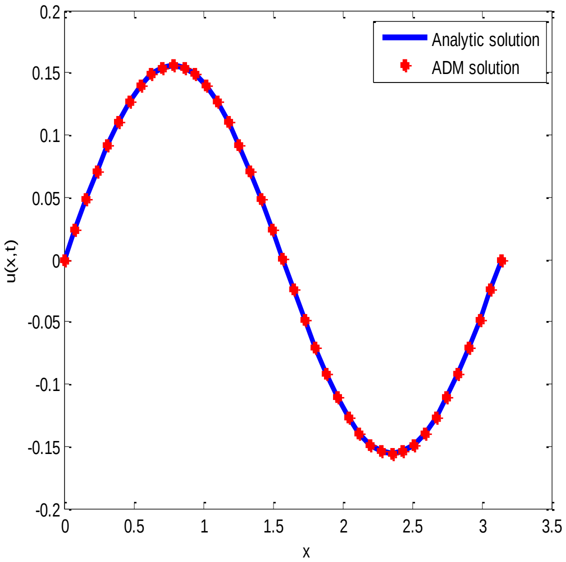
إذاً الحل التقريبي(العددي) يكون على الصورة التالية

$$u(x,y,t) \cong \sin(2x)\sin(2y)\cos(4t)$$

نلاحظ أن الحل العددي باستخدام طريقة [ADM] يتقارب إلى الحل التحليلي(الفعلي).



شكل((1).I.4.1.4) يوضح حل المثال4 باستخدام طريقة [FDM]عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{2}, 0 \le x,y \le \pi$



شكل((1).II.4.1.4) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = 0.01$

(2) طريقة الفروق المنتهية [FDM]

لنفرض أن

$$\Delta t = 0.04 \text{ ،} \Delta x = \Delta y = 0.06$$

و حيث أن معادلة الفروق لمعادلة (1) عند $\lambda = 1$ تكون على الصورة:

$$u_{i,j,k+1} = u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k} - u_{i,j,k-1} \quad (3)$$

$$k = 1,2, \dots, n-1 \text{، } j = 1,2, \dots r-1 \text{،} i = 1,2, \dots m-1$$

و الشروط الحدية:

$$u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0$$

$$\Rightarrow u_{0,j,k} = u_{m,j,k} = 0$$

$$, u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0$$

$$u_{i,0,k} = u_{i,r,k} = 0$$

$$\forall i = 0,1, \dots m, j = 0,1, \dots r, k = 0,1, \dots, n$$

و الشروط الابتدائية

$$(x, y, 0) = \sin(2x)\sin(2y)$$

$$\Rightarrow u_{i,j,o} = \sin(2x_i)\sin(2y_j)$$

$$u_t(x, y, 0) = 0$$

نستبدل المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ بالفرق المركزي بحيث:

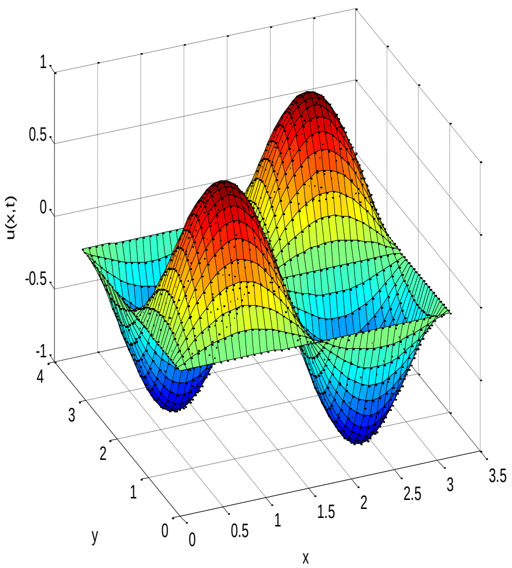
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j,1} - u_{i,j,-1}}{2k}$$

$$\frac{u_{i,j,1} - u_{i,j,-1}}{2k} = 0$$

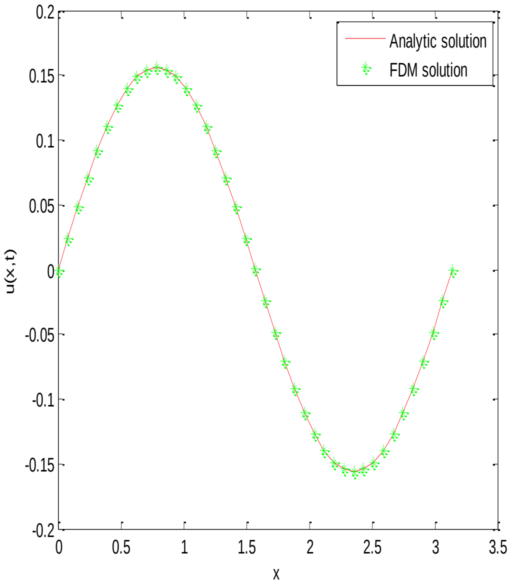
$$\Rightarrow u_{i,j,1} = u_{i,j,-1}$$

من معادلة الفرق (3) والشروط الحدية والابتدائية، وباستخدام برنامج الماتلاب مع $m = r = 50$ نحصل على الشكل [i.4.1.4.(2)] و الذي يوضح كل قيم $u_{i,j,k}$ عندما $0 \leq y, x \leq \pi$ و $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ لكل $i = 1,2, \dots m - 1$، $j = 1,2, \dots r - 1$، $k = 1,2, \dots , n - 1$.

لاحظ أنه من خلال نتائج الرسم الموضح في الشكل ((II.4.1.4.(2)) الحل العددي للمثال (4) باستخدام طريقة [FDM] يتقارب إلى الحل التحليلي.



شكل((I.4.1.4.(2)) يوضح حل المثال4 باستخدام طريقة [FDM]عندما$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x, y \leq \pi$



شكل((II.4.1.4.(2)) يوضح مقارنة بين الحلين التحليلي والتقريبي عندما $t = 0.01$

2.4 الخاتمة و النتائج Results and Conclusion

مما سبق نلاحظ أن هذه الدراسة قسمت معادلة الموجة إلى معادلة الموجة الخطية في بعد واحد متجانسة و غير المتجانسة، و معادلة الموجة الخطية في بعدين متجانسة و غير المتجانسة. ثم حل المعادلة بالطرق التحليلية طريقة فصل المتغيرات [SVM] و طريقة مفكوك الدوال الذاتية[EFM] ، الطرق العددية طريقة تفريق أدوميان[ADM] و طريقة الفروق المنتهية[FDM]. ومن خلال ذلك ثم عمل مقارنة بين نتائج الطرق التحليلية والعددية حيث طبقت طريقة تحليل أدوميان [Adomian Decomposition Method[ADM وطريقة الفروق المنتهية Finite Difference Method[FDM] على معادلة الموجة الخطية المتجانسة و غير المتجانسة في بعد واحد وبعدين، وقارنا بين النتائج لكل من الطريقتين على أمثلة مختلفة وقد لوحظ أنه لا يوجد اختلاف بين الحلين التقريبي(العددي) والحل التحليلي(الحل المضبوط) عند زمن محدد t، وتبين أن طريقة [ADM] هي الأسهل والأسرع تقارباً للحل التحليلي(المضبوط)، كما لوحظ أن الطرق العددية تعتبر نموذجية فعالة وعلى مستوى عالي من الدقة وأكثر أهمية و فائدة من الطرق التحليلية.

References المراجع

[1] اس فارلو، *المعادلات التفاضلية الجزئية*، ترجمة: مها الكبيسي ، جامعة عمر المختار ،2005.

[2] B. Rubber &A. Hakki, "The numerical solution of some important models from the partial differential equation using approximate analytical methods [ADM - VIM]," *Journal Damascus University* , 38(4) , PP. 103-129, 2016.

[3] E. Jabr, Finite Differences to Solve Ordinary Differential Equation , Faculty of Computer Science and Mathematics, 2020.

[4] N. H. Asmar, *Partial Differential Equations* , 2rd ed, University of Missouri, USA, 2004.

[5] M. AL-jazzier & M. Ali &A. AL-Qurmani, *Partial Differential Equation of first order*, AL-Komes: Nasser University, 1992.

[6] A . Aleany, *Introduction to Partial Differential Equation* , Baghdad University, 1990.

[7] H. Ibrahim, Partial Differential Equation lectures, Iraq: University of Basra,2015 .

[8] فاطمة سليم، "الحلول التحليلية لمعادلة الموجة،" رسالة ماجستير، كلية العلوم، مصراته،2007.

[9] N. AL- mayahi, Partial Differential Equation lectures , Iraq :AL-Qadisiyah University Mathematics Department, 2016.

[10] F. Jabori, About Wave Equation in There Dimensional, Iraq : AL- Qadisiyah University, 2018.

[11] P. Yehuda &J. Rubinstein, An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2005.

[12] A. M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations* , USA, 2011.

[13] أحمد هب الريح، *أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية*، الجزء الثاني، دار ومكتبة الشعب للنشر والتوزيع،2004م .

[14] O .A. Aleyan, " An Application of Finite Difference Method to Solve Elliptic PDE'S With Use of GS and SOR Iterative Methods," *Journal of Academic Forum*, Vol .2, PP.379-394, 2020.

[15] O.A .Aleyan, " The Use of Adomian Decomposition Method "ADM" to Solve the Linear Wave Equation," *Journal of* , Vol. 17, PP.309-317, 2021.

[16] F. Hildebrand, *introduction to numerical analysis*, 2th ed, USA , 1987.