



دولة ليبيا
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة الإسلامية
كلية العلوم – زليتن

قسم الرياضيات

نظرية تغير الشكل القصي المثلثية لصفحة مرنة
مقواه بألياف مقاومة للثني

**TRIGONOMETRIC SHEAR DEFORMATION
ELASTIC PLATE THEORY WHEN FIBRES
RESIST BENDING**

دراسة مقدمة استكمالاً لمتطلبات الحصول على درجة الماجستير
في الرياضيات

إعداد:

زمزم محمد عبدالله العقاب

إشراف:

د. علي فرج فرحات

(2022)

الشكر والتقدير

الحمد لله الذي له العزة والجبروت - بيده الملك والملكوت وله الأسماء الحسني والنعوت العالم. فلا يعزب عنه ما تظهره النجوم أو ما يخفيه السكوت القادر فلا يعجزه شيء في السماوات والأرض ولا يفوت أنشأنا من الأرض نسماءً واستعمرنا فيها أجيالاً وأمماً ويسر لنا منها أرزاقاً وقسماً.

والصلاة والسلام على سيدنا محمد النبي العربي المكتوب في التوراة والإنجيل صلى الله عليه وعلى آله وصحابته أجمعين وبعد

فحينما تتدفق عبارات الشكر والتقدير وتتداخل حروف الثناء والامتنان وعندما يعجز اللسان عن التعبير فلا بد أن يلوح في أفق المعاني ونبراس العطاء وخلجات الصرح العلمي الشامخ

أجمل عبارات نسجها القلب وسطرتها أقلام الشكر والعرفان لك دام عزك ودام عطاؤك يا استاذي الدكتور علي فرج فرحات فأنت سراج العلم ينير عتمة الطريق وفي هذه المناسبة التي أراها تجديداً لعهد العطاء المتميز والعمل الدؤوب للإعلاء بصرح العلم دون توانٍ أو تقصيرٍ أكرر لك الشكر والتقدير وأرجو أن أكون عند حسن ظنك في هذا المجال العلمي الرائع.

إلى بحر العطاء المتجدد ونهر الوفاء المتدفق أسرتي الغالية أهديكم كل عبارات الوفاء والعرفان الممتد بلانهاية أهديكم أغلى معاني الشكر محملة على أمواج التقدير لكم من أعماق قلبي تحية حب وامتنان لا تتسع لها مفردات اللغة ولكنها متجذرة بقلبي مغروسة في حنايا روحي ممتدة في كل زاوية من زوايا حياتي أسرتي الغالية لك كل الحب والتقدير .

في طيات هذه الصفحات ومن خلال هذا الحاضر الذي يبدو كصفحة بيضاء يمكنني أن أخط فيها ما أشاء أتقدم بأجمل عبارات الشكر والعرفان وأطهر معاني الحب والتقدير إلى والدي الحبيب ووالدتي الحنونة فهما من أضياء شموع الطموح في حياتي ورسمًا خطوط المستقبل المشرق في طريقي

ثم أهدي شكري و عرفاني لرئيس مكتب الدراسات العليا بالكلية الدكتور/عبدالباسط محمد الغويل وإلى ذلك الصرح العظيم الذي التمتست بداخله أجمل وأروع الدرر والمرجان إلى كلية العلوم بالجامعة الأسمرية زليتن ، أهدي شكراً عظيماً من الصميم وأخص بالشكر عميد كلية العلوم الدكتور/ خليفة الفلوس وإلى رئيس قسم الرياضيات الأستاذ/ محمد مسعود الأرقط وإلى الدكتور/محمد أحمد حمودة وإلى جميع أعضاء هيئة التدريس من أستاذات وأساتذة ومعيدات بقسم الرياضيات شكري وتقديري كما لا يفوتني أن أتقدم بالشكر الجزيل أيضاً للجنة المناقشة والحكم على تكريمها بقبول مناقشة هذه الرسالة

لإخلاص بلا حدود وحب في الله بلا مقابل لأمل في المستقبل لقلوب صافية وأياد دافئة لروح المودة والمحبة، أخواتي الطالبات في الدراسات العليا لكن مني باقة من الزهور العطرة

وشكري الخاص إلى جميع من أسهم معي في إتمام هذه الرسالة فمن قمم الطموح بداخلي أهدي لكم جميعاً هذا العمل الذي ما كان لي يرى النور لولا ما بذرت من علم وأغدقت من إحساس وما أوليتم من رعاية إليكم جميعاً هذه الكلمات التي خرجت من قلبي لتصل إلى قلوبكم وامتزجت بروحي لتمتجج بأرواحكم.

وأخيراً أسأل الله أن يبارك في هذا الجهد المتواضع ويجعله علماً نافعاً وأن يكون خالصاً لوجهه الكريم وأن ينفع به الباحثين والباحثات في هذا المجال.

المخلص

في هذا البحث دراسة لعدد من الأوراق البحثية لغرض دراسة وتوقع سلوك الصفائح المدعمة بالألياف التي لها القدرة على مقاومة الانحناء.

تم استخدام دوال الإزاحة من نظرية Shimpi and Ghugal (2001) وإيجاد مركبات الانفعال ومركبات الإجهاد ولكن في حالة أن الانحناء الساكن لصفحة من طبقة واحدة معرضة لحمل ساكن على سطحها العلوي ومدعومة ببساطة وذات ألياف مقاومة للثني كمساهمة جديدة وتم التوصل لمنظومة معادلات تفاضلية وتم إيجاد درجتي الحرية لدوال الإزاحة المعطاة، وتم التوصل فيها للحل المطلوب وإيجاد النتائج العددية لها وتم مقارنتها بما يناظرها في Farhat and Soldatos (2015).

تم اختيار دالة الإزاحة المستخدمة في الورقة البحثية Ferreira et al. (2005) وإيجاد ما يترتب على ذلك من مركبات الانفعال ومركبات الإجهاد وذلك في حالة أن الصفحة من طبقة واحدة وذات ألياف مقاومة للثني كمساهمة جديدة أخرى وتم فيها التوصل لمنظومة معادلات نافير التفاضلية والمتضمنة حدود لها علاقة بقابلية مقاومة الألياف للثني وتم فيها إيجاد الحل لهذه المنظومة وحساب درجتي الحرية لدوال الإزاحة المعطاة وإيجاد نتائج عددية لها.

Abstract

In this research, a study of some research papers about investigating the behavior of plates reinforced with fibers which can resist bending. In the first contribution of this research, the displacement functions have been applied in this study that was presented in the theory by Shimpi and Ghugal(2001) for finding out strain and stress components. This application is in the case of static bending for one layer beam under static load on its upper surface and it is reinforced with fibers which can resist bending. The governing differential equations system has been produced. The degrees of freedom for the given displacement functions and the solution have been found. Numerical results based on the obtained solution have been presented and compared with their counterparts of the exact solution Farhat and Soldatos(2015). In the second contribution of this research, the displacement functions have been selected which were used in the research paper Ferreira et al.(2005) and what results of stress and strain components in the case of one layer plate with bending resistance fibers. Moreover, a system of Navir type differential equations have been found and solved including terms of applicability of bending resistant fibers.

المقدمة

إن نظرية المرونة تشهد تطوراً سريعاً منذ النصف الأول من القرن التاسع عشر حيث أصبحت فرعاً هاماً من فروع الميكانيكا. حيث قام لاغرانج وجيرمين (Lagrange and Germain). بحل مسائل انحناء واهتزاز الصفائح المرنة الرقيقة أصبح من الممكن تبسيط صياغة وحل المسائل المتعلقة بالتشوه الناتج عن تأثير القوى الخارجية على الأجسام المرنة. نظراً للعدد الكبير من المسائل التي واجهت هذا الفرع الجديد من فروع الميكانيكا. كان لابد من البحث في خواص المواد المرنة ووضع الأسس للنظرية الرياضية التي تسمح بدراسة التشوه في هذه الأجسام أي التغيرات في أشكالها وذلك تحت تأثير القوى الخارجية ففي عام 1825 قام العالم الفرنسي نافيه (Navier) بإصدار بحث معتمداً على المعطيات التجريبية المتوفرة ذلك الوقت وعلى النظريات التقريبية، وفي عام 1937 قام العالم الروسي ياسينسكي (Jastrzebski) ببحث مشابه لبحث نافيه. ولقد وضعت المبادئ الأساسية لنظرية المرونة من قبل علماء الرياضيات والميكانيك الفرنسيين أمثال نافيه (Navier) وبواسون (Poisson) وكوشي (Cauchy) الذين وضعوا المعادلات التفاضلية الأساسية لهذه النظرية. ونظراً لمتطلبات التقدم التكنولوجي السريع اللازم للهندسة والتطبيقات المتعددة للمواد المرنة مثل استخدامها في تنفيذ السكك الحديدية. هذه المتطلبات أدت إلى الحاجة لأبحاث في دراسة سلوك المواد المرنة وذلك لاستنباط نظريات رياضية من أجل تصميم العناصر الإنشائية والآلات القوية (الطرشة ووهبي، 2013).

لقد شهدت نظرية المرونة (theory of elasticity) خلال السنوات الاخيرة تطبيقات هامة في حل المسائل الهندسية، حيث هناك العديد من الحالات التي لم تعطيها حقها الطرق الاولية لمقاومة المواد (strength of materials) ، ولم تستطيع تزويدها بمعلومات كافية ومقنعة، وبشكل خاص فيما يتعلق بتوزيع الاجهادات في الإنشاءات

الهندسية (engineering structures) لذا لم يكن هناك سبيل سوى اللجوء إلى طرق وأساليب جديدة وعملية من نظرية المرونة. فالنظرية الأولية لمقاومة المواد (Strength of materials) ، لم تكن كافية لإعطاء المعلومات عن الإجهادات الموضعية (Local stresses) قرب الحمولات (Loads) وقرب مساند الصفائح (supports of beams) ولقد فشلت أيضا في حالات أخرى منها مثلا:

مسألة تحديد الإجهادات في مناطق التغيرات الحادة (sharp variation) في المقطع العرضي للصفائح (beams) حيث يظهر تركيز عال في الاجهادات يمكن أن يسبب شقوقا (cracks) وخاصة إذا كان العنصر خاضعا لإجهادات متتابة مما يؤدي إلى تمزق وتحطم أجزاء الآليات خلال فترة عملها.

إن مثل هذه المسائل ومسائل أخرى لا يمكن حلها إلا بطرق نظرية المرونة التي استخدمت طرقاً تجريبية (experimental methods) وأخرى تقريبية (approximate methods) أكثر تطوراً مما أدى إلى حل عدة مسائل عملية هامة كان سابقاً حلها صعباً جداً (الطرشة ووهبي، 2013).

ومن دون أدنى شك إن نظرية المرونة قد أخذت بعين الاعتبار تأثيرها على التصميم الحديث لأجزاء الآلات وقد ساعدت في كثير من الحالات على تطوير وتحسين الإنشاءات وذلك بمعالجة النقاط الضعيفة التي يمكن أن تحدث عندها الشقوق (الطرشة ووهبي، 2013).

في النظرية المعروضة kirchhoff (1850) كانت تدرس مسألة انحناء صفيحة رقيقة مرنة متجانسة الخواص وتعتمد هذه النظرية على الفرضيات التالية:

يبقى سمك الصفيحة بدون تغيير أثناء تغير في الشكل وكذلك وضع الخطوط المستقيمة العمودية على المستوى المتوسط قبل التغير في الشكل تبقى مستقيمة وعمودية أثناء

التغير في الشكل بعد انحناء الصفيحة. وهذه الفرضيات تكون مفترضة أيضا في نظرية أويلر وبرنولي Euler-Bernoulli Beam Theory والتي أنتجت خلال تطور ما يسمى Classical beam theory سنة 1888 والتي عندها كان التحميل الخارجي المفترض $q=q(x)$ دالة في x بمعنى $q=q(x)$.

في نظرية Pagano (1969) تم إيجاد الحل الفعلي لمسألة انحناء الصفيحة بشروط حدية تسمى دعم ببساطة (Simply Simply supported) والتي كانت عندها الألياف مرنة ((غير مقاومة للثني)) أي معامل المرونة الذي ظهر في نظرية Soldatos (2009) هو $d^f=0$.

ثم بعد ذلك ظهرت العديد من النظريات التقريبية والتي استخدمت الحل الفعلي المشار إليه لمعرفة ومعايرة مدى دقة نتائج هذه النظريات وقد استخدم هذا الحل ولازال يستخدم بشكل مكثف بواسطة العديد من البحوث وللمزيد من المعلومات يمكن الاطلاع على البحوث التالية:

(Cho and Parmerter,1993;Disciuvu,1986;Discuva,1992;Heucr 1992;Lee et al.,1994;Li and Liu,1995;Savoia,1995;Lu and Liu,1992;Noor and Burton,1996;Ping et al.,1994;Reddy,1984; Shimpi and Ghugal,1997;Soldatos,1992;Soldatos and Waston,1997;Touratier,1991)

في نظرية Spencer and Soldatos (2007) تم الإهتمام بفكرة الألياف داخل الصفيحة في حالة أن الألياف مقاومة للثني وكذلك مقاومتها للإستطالة وللدوران.

في سنة 2009 اهتم الباحث Soldatos وهو أول من اهتم بمبدأ مقاومة الألياف للثني حيث وردت في هذه النظرية بشكل نظري وليس تطبيقي معادلات الإلتزان في حالة السكون ومعادلات الحركة ولكن بدون إيجاد الحلول التقريبية أو الفعلية.

حيث أن مبدأ مقاومة الألياف للثني لقي اهتمام العديد من البحوث وتوجد أوراق بحثية نشرت مؤخراً تهتم بهذا المبدأ.

الورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) تهتم بدراسة الانحناء والاهتزاز لمركبات الصفائح مدعومة ببساطة (Simply Simply Supported) المقوى بألياف مقاومة للثني والتي أهم نتائجها الحل الفعلي (Exact Solution) وبعد إيجاد هذا الحل الفعلي لازال يستخدم لمعايرة دقة النتائج التقريبية في حالة أن الألياف مقاومة للثني حيث فيما مضى كانت النظريات التقريبية تقارن نتائجها بالنتائج المتحصل عليها بالحل الفعلي Pagano في حالة الألياف مرنة ونظراً لأهمية مبدأ مقاومة الألياف للثني فإنه يوجد العديد من الأوراق والأعمال البحثية التي نشرت والتي تهتم بهذا المبدأ حيث قارنت نتائجها بالحل الفعلي (exact solution) المذكور في (Farhat and Soldatos,2015).

الورقة البحثية Soldatos and Farhat (2016) تدرس استخدام مجال الازاحة ((ريسنر)) (Reisser) لدراسة سلوك صفيحة مرنة مقوى بألياف تقاوم الانحناء معرضة لشروط حدية متنوعة.

الورقة البحثية Farhat and Gwila (2017) هذه الورقة تدرس نظرية أويلر وبرنولي Euler–Bernoulli Beam Theory في حالة أن الألياف تقاوم الثني معرضة لشروط حدية متنوعة.

تهتم الورقة البحثية Soldatos (2020) بالصفحة في حالة أشكال كروية تقاوم الثني ودراسة أوجه الإختلاف في مركبات الإجهاد للجزء الكروي بالمصطلح التالي

(The Spherical part of the couple stress)

في ورقة. Aydogdu et al. (2021) محاولة لبحث وفهم تأثير مقاومة وصلابة انحناء الألياف في حالة أن الصفحة متدرجة ذات ألياف غير مرنة تماماً.

وفي هذه الدراسة تم الاهتمام بمبدأ مقاومة الألياف للثني وذلك بأخذ أحد النظريات التقريبية التي كانت تقارن نتائجها بالحل الفعلي في حالة أن الألياف مرنة أي بنظرية pagano (1969) في حالة الألياف المرنة وبنظرية Farhat and Soldatos (2015) في حالة الألياف التي تقاوم الثني سوف يتم مقارنة النتائج بالحل الفعلي (exact solution) وذلك لمعرفة الدقة وكذلك مقارنتها ببعض النظريات الأخرى.

سوف يتم في هذه الدراسة الربط بين الورقتين البحثيتين Soldatos (2009) و Shimpi and Ghugal (2001) حيث أنه من نظرية Shimpi and Ghugal (2001) سوف يتم استخدام دوال الازاحة (The Displacement Functions) ولكن في حالة أن الألياف مقاومة للثني وتطبيق معادلات الاتزان المذكورة في نظرية Soldatos (2009) وكذلك سوف يتم اختيار دالة الازاحة (The Displacement Function) من نظرية Ferreira et al. (2005) في حالة أن صفحة مرنة ذات ألياف مقاومة للثني وتطبيق معادلات الاتزان المذكورة في نظرية (Soldatos,2009).

وقد تم في هذه الدراسة عرض بعض الأوراق البحثية لنظرية المرونة وكيفية إيجاد (درجات الحرية) أي مركبات دوال الازاحة المفروضة بشكلها العام المختلف في كل نظرية وما يترتب عليها من انفعال وإجهاد ومعادلات الإتزان وسيكون العمل في هذا

البحث على صفائح في شكل قضبان (Beams) من طبقة واحدة مقواة بألياف مقاومة للانحناء (الثني).

ويشتمل هذا البحث على خمسة فصول حيث يتناول الفصل الأول بعض المفاهيم الأساسية لنظرية المرونة أما الفصل الثاني فيتضمن تأثير مقاومة الألياف عند انحناء الصفيحة في نظرية المرونة ثلاثية الأبعاد وكذلك يحتوي على بعض نظريات المرونة ثنائية البعد (2-D) وأحادية البعد (1 - D) وأثر مقاومة الألياف للثني لديها، وإيجاد حلول فعلية وذلك من خلال دراسة ما له علاقة بموضوع هذا البحث لمسائل الصفيحة المرنة المقواة بألياف تقاوم الثني.

أما الفصل الثالث فهو دراسة لنظرية تشوة القص المثلثية Shimpi and Ghugal (2001) ويستعرض دوال الازاحة لها وما يترتب عليها من انفعال وإجهاد ومعادلات الاتزان .

يتناول الفصل الرابع الربط بين الفصل الثاني والثالث، وذلك من خلال الربط بين نظرية القص المثلثية Shimpi and Ghugal (2001) ونظرية الصفيحة المرنة المقواة بألياف تقاوم الثني وكذلك استنتاج معادلات (Navier) معتمدين على معادلات الاتزان والمتضمنة حدود لها علاقة بقابلية مقاومة الألياف للثني وكذلك إيجاد حل لمنظومة معادلات تفاضلية التي تم الحصول عليها وإيجاد النتائج العددية لها في حالة الدعم ببساطة (Simply Simply Supported)

أما الفصل الخامس فيتضمن تأثير مقاومة الألياف للثني على صفيحة مرنة من طبقة واحدة وذات ألياف مقاومة للثني وذلك باختيار دالة الإزاحة (The Displacement Function) المستخدمة في نظرية Ferreira et al. (2005) وإيجاد ما يترتب على ذلك من مركبات الانفعال ومركبات

الإجهاد وصولاً إلى منظومة المعادلات التفاضلية والتي تحتوي على حدود لها علاقة بمقاومة الألياف للثني وإيجاد الحل لهذه المنظومة وحساب النتائج العددية لها في حالة دعم الصفيحة ببساطة ومناقشتها ومقارنتها بأوراق بحثية وسوف يتم مقارنة النتائج المتحصل عليها في هذا الفصل والفصل السابق.

سوف يتم ذكر خاتمة للبحث وخاتمة نهاية كل فصل.

المحتويات

الصفحة	الموضوع	ت
I	الشكر والتقدير	
III	الملخص	
V	المقدمة	
XII	المحتويات	
الفصل الأول: بعض المفاهيم الأساسية لنظرية المرونة		
2	مقدمة الفصل	1.1
3	بعض التعريفات الأولية لنظرية المرونة	2.1
5	الخواص الميكانيكية التي تتعلق بالمواد المرنة	3.1
7	الصفائح المرنة	4.1
10	عرض مسائل نظرية المرونة	5.1
12	قانون هوك المعمم في نظرية المرونة	6.1
18	خاتمة الفصل	7.1
الفصل الثاني: تأثير مقاومة الألياف للثني عند انحناء الصفيحة		
20	مقدمة الفصل	1.2
21	الصفائح المقواه بألياف مقاومة للثني وأثره في نظرية المرونة ثلاثية الأبعاد	2.2
27	تأثير مقاومة الألياف للثني في بعض نظريات المرونة ثنائية البعد (2-D) وأحادية البعد (1-D)	3.2
38	إيجاد حلول فعلية "حقيقية لمسائل الصفيحة المرنة المقواه بألياف تقاوم الثني.	4.2
45	خاتمة الفصل	5.2
الفصل الثالث: العلاقات الأساسية لنظرية تشوه القص المثلثية		
47	مقدمة الفصل	1.3

50	دوال الإزاحة المثلثية	2.3
52	الإنفعال والإجهاد في نظرية القص المثلثية	3.3
57	معادلات الإلتزان في نظرية القص المثلثية	4.3
59	استنتاج معادلات الاتزان لصفحة من طبقة واحدة ذات ألياف مرنة	5.3
71	خاتمة الفصل	6.3
الفصل الرابع: دراسة لنظرية القص المثلثية Shimpi and Ghugal (2001) لانحناء صفيحة مرنة مقواة بألياف تقاوم الثني		
73	مقدمة الفصل	1.4
74	استخدام دوال الإزاحة في نظرية القص المثلثية في حالة أن الألياف مقاومة للثني.	2.4
76	استنتاج معادلات Navier معتمدين على معادلات الإلتزان والمتضمنة حدود لها علاقة بقابلية مقاومة الألياف للثني.	3.4
79	إيجاد حل منظومة معادلات تفاضلية "معادلات الإلتزان"	4.4
83	عرض النتائج المتحصل عليها لصفحة مرنة ذات ألياف مقاومة للثني	5.4
88	خاتمة الفصل	6.4
الفصل الخامس: نظرية القص المثلثية باستخدام دوال الإزاحة Ferreira et al. (2005) عندما تقاوم الألياف الثني		
90	مقدمة الفصل	1.5
90	اختيار دالة الإزاحة. Ferreira et al. (2005) واستخدامها للوصول لمنظومة المعادلات التفاضلية التي تمثل معادلات الاتزان	2.5
98	إيجاد حل منظومة معادلات تفاضلية ((معادلات الاتزان))	3.5

102	عرض النتائج المتحصل عليها لصفحة مرنة متجانسة الخواص ذات ألياف مقاومة للثني	4.5
107	مناقشة النتائج	5.5
109	المقارنة بين النتائج المتحصل عليها	6.5
111	خاتمة الفصل	7.5
112	الاستنتاج	
114	المصطلحات العلمية	
118	المراجع	

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية لنظرية المرونة

1.1- مقدمة:

2.1- بعض التعريفات الأولية لنظرية المرونة

3.1- الخواص الميكانيكية التي تتعلق بالمواد المرنة

4.1- الصفائح المرنة

5.1- عرض مسائل نظرية المرونة

6.1- قانون هوك المعمم في نظرية المرونة

7.1- الخاتمة

1.1 - مقدمة

تنقسم المواد من حيث قابليتها للتشكل إلى ثلاث أنواع عامة صلبة وسائلة وغازية. يقصد بالمواد الصلبة هي الأجسام التي توجد في شكل معين ولا تتشكل بشكل الإناء الذي توضع فيه كالمواد السائلة مثلاً.

وتنقسم الأجسام الصلبة إلى نوعين: النوع الأول منها يسمى بالأجسام الجاسئة "المتماسكة" (rigid bodies) وهي الأجسام التي لا تتغير شكلها أثناء سكونها أو حركتها تحت تأثير قوى خارجية عليها.

أما النوع الثاني منها فيسمى بالأجسام المرنة (elastic bodies) وهي التي تتغير أشكالها وأحجامها تحت تأثير مؤثرات سواء كانت خارجية أم داخلية وتستعيد شكلها وحجمها الأصليين بزوال المؤثرات .

تتميز الأجسام المتماسكة بأن المسافة بين جزيئاتها المختلفة لا تتغير تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليها وبالتالي تحتفظ بشكلها الأصلي، ولكن من الناحية العلمية تعاني تغيراً ما في شكلها بمجرد تلاشي أية قوة خارجية، فإذا كان هذا التغير في الشكل طفيفاً أمكن إهماله واعتبار الجسم متماسكاً وإلا فإنه يقال إن الجسم قابل للتشكل . وإذا استعاد الجسم شكله الأصلي عند زوال القوى الخارجية يقال بأنه جسم مرن وأما إذا احتفظ بجزء ما بالتغير في الشكل بعد زوال القوى الخارجية عليه فإنه يسمى في هذه الحالة جسم لدن (plastic body) (ميلود والسحيري، 2003).

2.1 - بعض التعريفات الأولية لنظرية المرونة (ميلود والسحيري، 2003).

المرونة (Elasticity)

إذا أثرتنا بقوة خارجية على جسم ما بحيث يظل هذا الجسم ساكن في مكانه ، فإن هذه القوى غالباً ما تحدث تغييراً في أبعاد الجسم أو شكله الخارجي وحجمه، فإذا ما استرجع هذا الجسم شكله وحجمه الأصلي بعد زوال هذه القوى نقول بأنه جسم مرن، وإذا لم يستعيد شكله ولا حجمه فنقول بأن هذا الجسم عديم المرونة أي جسم لدن .

حد المرونة (Elastic limit)

هي النقطة التي يبدأ عندها الجسم في فقد خاصية المرونة.

الإجهاد (Stress)

هو القوة المؤثرة عمودياً على وحدة المساحة وتعمل على تغيير شكله في الأجسام

المرنة ومن الرموز المستخدمة له الرمز $t_{ij}, \tau_{ij}, \sigma_{ij}$

الإجهاد = القوة العمودية / المساحة وبالترميز

$$\text{Stress} = F_{\perp} / A$$

وحدة قياس الاجهاد هي (N/m^2 أو Dyne/cm^2)

الإنفعال (Strain)

هو النسبة بين التغير الحادث في الأبعاد وبين الأبعاد الأصلية

الإنفعال الطولي = التغير في الطول / الطول الأصلي وبالترميز

$$\text{Longitudinal Strain} = \Delta L / L$$

الانفعال القصي "العرضي" (Shear strain):

هو النسبة بين المسافة المتحركة وارتفاع الجسم وبالترميز

$$\emptyset = d / L$$

الانفعالي الحجمي (Bulk strain)

هو النسبة بين التغير في الحجم إلى الحجم الأصلي وبالترميز

$$\text{Bulk Strain} = \Delta V / V$$

معامل المرونة (Young modulus):

هو النسبة بين الإجهاد والانفعال بشرط عدم اجتياز الجسم حد المرونة وبالترميز

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

مركبات الإزاحة (الانتقال)

يمكن تمييز نوعين من الانتقالات أو الإزاحات إما انتقال الجسم المرن بأكمله دون أي تشوه أو انتقال آخر يرافقه تشوه في الجسم وهو ما يدرس في علم نظرية المرونة.

محصلة القوى والعزوم في الصفيحة الطبقيّة (جونز وجبره، 2010).

يتم الحصول على محصلة القوى والعزوم المؤثرة في صفيحة طبقية عبر تكامل الاجهادات في كل طبقة أو رقاقة عبر سماكة الصفيحة الطبقيّة وعلى سبيل المثال:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad , , , \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

الاجهادات تتغير في كل رقاقة ومن رقاقة إلى أخرى أيضاً، ويمثل N_x حالياً قوة في وحدة العرض من مقطع الصفيحة الطبقيّة وكذلك يمثل M_x العزم في وحدة الطول وسيشار إلى N_x ، M_x وغيرها كقوى وعزوم .

وفي مجال دراسة الجسم القابل للتشكل (Deformable body) فإن ميكانيكا هذا الجسم ينقسم إلى قسمين:

أ- القسم الفيزيائي: ويتم فيه دراسة الخواص الميكانيكية للأجسام عملياً مثل الصلابة، المرونة، اللدونة وغيرها.

ب- القسم الرياضي: ويتم فيه توضيح النمودج الرياضي الذي يصف حالة الجسم القابل للتشكل (الحالة الإجهادية أو الإنفعالية ومعادلات الاتزان والشروط الحدية) للجسم تحت تأثير قوى خارجية مختلفة كما سيتضح لاحقاً.

3.1 الخواص الميكانيكية التي تتعلق بسلوك المواد المرنة (إمام وآخرون، 2007).

هي الخواص التي تتعلق بسلوك المواد المرنة عند تعرضها للأحمال المؤثرة المختلفة سواء كانت هذه الأحمال استاتيكية أو ديناميكية، كما أنها تستخدم كأساس للمقارنة بين المواد المرنة المختلفة.

إن الخواص الميكانيكية كثيرة ومتنوعة ولكن الخواص الميكانيكية الرئيسية الأتية هي التي يمكن بها تمييز وتصنيف المواد المرنة:

1- المرونة (Elasticity)

هي قدرة المادة على استعادة أبعادها الأصلية بعد زوال القوى المؤثرة وعدم بقاء أي تشكّل دائم بها.

2- اللدونة (Plasticity)

هي قدرة المادة على أن يكون لها تشكل دائم و لا تسترجع المادة أبعادها الأصلية بعد زوال القوى المؤثرة.

3- المطيلية (Ductility)

هي قدرة المادة على السحب والاستطالة الكبيرة عند تعرضها لأحمال الشد أي أنها هي الخاصية التي تسمح للمادة بتغيير لدن كبير تحت تأثير أحمال الشد.

4- الطروقية (Malleability)

هي قدرة المادة على حدوث تغيرات لدنة كبيرة تحت تأثير أحمال الضغط، وكذلك قدرتها على التفلطح بالطرق بدون حدوث أي كسر.

5- التقصف (Brittleness)

هي الخاصية التي تجعل المادة تتكسر قبل حدوث أي تغيير ملحوظ في الشكل أو أنها عدم قابلية المادة للاستطالة أو السحب أو الطرق مثل الحديد الزهر و بعض أنواع الزجاج وغيرها.

6- المقاومة (Resistance)

هي مقاومة المادة لأي حمل مؤثر عليها سواء كان حمل شد أو ضغط أو انحناء أو قص وتعرف بالمقاومة للضغط إذا كان الحمل المؤثر حمل ضغط والمقاومة للشد إذا كان الحمل المؤثر حمل شد وهكذا.

7- الصلابة (Stiffness)

هي مقاومة المادة لأي نوع من التغيير في الشكل والأبعاد وتعرف المادة الصلبة بأنها المادة التي تتحمل اجهادات عالية مع حدوث تغيرات صغيرة نسبياً في الشكل.

8- المتانة (Toughness)

هي قدرة المادة على مقاومتها للأحمال الديناميكية أي أنها تعبر عن قدرتها على مقاومة أحمال الصدم وامتصاص الطاقة الميكانيكية مع تغير كبير في الشكل بدون حدوث كسر.

9- الرجوعية (Resilience)

هي قدرة المادة على امتصاص الطاقة المرنة التي تختفي بعد زوال الحمل المؤثر.

10- الصلادة (Hardness)

هي قدرة المادة على الاحتفاظ بشكل سطحها سليماً متماسكاً تحت تأثير الأحمال المختلفة. وقد تعرف الصلادة بأنها قدرة المادة على المقاومة نتيجة الاحتكاك أو المقاومة للخدش أو القطع. دون حدوث أي علامة بها.

4.1- الصفائح المرنة:

صنفت الصفائح بواسطة نسب هندسية مثل نسبة الطول إلى السمك (a/h) وتحدد

النسبة (a/h) ثلاث أنواع من الصفائح بالنسبة للسمك حيث وردت في نظرية

Belkhodja et al. (2020) على الشكل التالي:-

صفيحة سميكة (thick plate) وهي ذات قيم نسبة منخفضة مثل $(a/h = 2, \sqrt{10}, 5)$

صفحة سميكة لحد ما (moderately thick plate) ($a/h \approx 10$)

صفحة رقيقة (thin plate) وهي ذات قيم نسبة عالية مثل ($a/h \approx 20$)

تعد القضبان الرفيعة (thin beams) من النماذج الرياضية المستخدمة لوصف السلوك الاستاتيكي والديناميكي للجسم في بعد واحد، و لوصف السلوك الاستاتيكي والديناميكي للجسم في بعدين نستخدم ما يسمى بالصفحة (plate) أو سطوح غير مستوية (shell). وتستخدم مركبات الصفائح في التطبيقات الهندسية بكثرة كنماذج للسفن وهياكل الطائرات وأجنحتها والقذائف وغيرها. وقد أصبح تطبيق نظريات الصفائح مهمة جداً مع السرعة العالية للمركبات الفضائية (Turbo – machine).

إن سلوك الصفحة يعتمد بشكل كبير على سمكها مقارنة بأبعادها الأخرى ولهذا السبب يمكن أن نصنف الصفائح إلى ثلاث مجموعات (الغامدي وزنقور، 2008):

أولاً: صفائح رقيقة ذات إزاحات رأسية صغيرة

(Thin Sheets with small vertical displacement)

ثانياً: صفائح رقيقة ذات إزاحات رأسية كبيرة

(Thin Sheets with large vertical displacement)

ثالثاً: صفائح سميكة (Thick Sheets)

- صفائح رقيقة ذات إزاحات رأسية صغيرة: إذا كانت الإزاحة الرأسية w للصفحة صغيرة مقارنة مع سمكها h فإنه توجد فرضيات على الشكل التالي:

1. لا يوجد انفعال في المستوى الأوسط للصفحة وهذا السطح يظل محايداً (neutral) خلال الإنحناء.

2. نقاط الصفيحة التي تقع على العمودي على المستوى الأوسط للصفيحة قبل الانحناء تظل كما هي واقعة على العمودي على المستوى الأوسط للصفيحة بعد الإنحناء.

3. الإجهادات العمودية في الاتجاه المستعرض على الصفيحة تكون صغيرة مقارنة مع الإجهادات الأخرى، وبالتالي يمكن إهمالها.

وتقرن هذه الفرضيات أيضاً بالعالم Kirchoff (1850) وباستخدام هذه الفرضيات، فإن كل مركبات الإجهاد يمكن أن تظهر بدلالة الإزاحة الرأسية w للصفيحة وتكون دالة في الإحداثين x, y هذه الدالة تحقق معادلة تفاضلية جزئية خطية والتي تعطي مع الشروط الحدية تعريفاً كاملاً للإزاحة الرأسية w .

وهكذا فإن حل هذه المعادلة يعطي كل المعلومات المهمة لحساب الإجهادات عند أي نقطة في الصفيحة.

الفرضية الثانية تكافئ إهمال تأثير قوى القص على تشوه الصفيحة، وهذه الفرضية غالباً متحققة، ولكن في بعض الحالات، وعلى سبيل المثال في حالة وجود فجوة في الصفيحة فإن تأثير قوى القص يكون مهماً وبالتالي يجب عمل بعض التعديلات على نظرية الصفائح الرفيعة لتناسب تأثير قوى القص. وإذا وجدت قوى إضافية مؤثرة على المستوى الأوسط للصفيحة بالإضافة إلى الأحمال الخارجية، فإن الفرضية الأولى لا تتحقق.

- صفائح رفيعة ذات إزاحات رأسية كبيرة: في بعض الحالات يكون انحناء الصفيحة مصحوباً بانفعال في المستوى الأوسط للصفيحة، ويمكن إهمال الإجهادات المناظرة إذا كانت الإزاحات الرأسية للصفيحة صغيرة مقارنة مع سمكها، لكن إذا كانت الإزاحات الرأسية ليست صغيرة، فإن الإجهادات المناظرة يجب أن توضع في الاعتبار عند

اشتقاق المعادلة التفاضلية للصفحة، ونحصل على معادلات غير خطية ويصبح حلها أكثر تعقيداً، وفي حالة الإزاحات الكبيرة يجب أيضاً أن نميز بين الحواف المثبتة بإحكام والحواف حرة الحركة والحواف المدعمة ببساطة في مستوى الصفحة، والتي تؤثر على مقدار الإزاحة الرأسية والإجهادات للصفحة (الغامدي وزنقور، 2008).

- صفائح سميكة: إن النظريات التقريبية للصفائح الرفيعة، والتي ذكرناها سابقاً لا تصلح للتطبيق مع الصفائح السميكة وخاصة في حالة الأحمال المركزة على سطح الصفحة. في هذه الحالة من الضروري أن نضع في الاعتبار تأثير انحناء الصفحة على الإجهادات التي تعمل على المستوى الأوسط للصفحة وهذا يتم باستخدام نظرية الصفائح السميكة، وهذه النظرية تعتبر مسألة الصفائح كأنها مسألة مرونية ذات ثلاث أبعاد، وإيجاد الإجهادات تصبح عملية معقدة. (الغامدي وزنقور، 2008) هذه المسألة لم تحل تحليلياً بشكل كامل إلا في بعض الحالات الخاصة فقط .

5.1- عرض مسائل نظرية المرونة (الطرشة ووهبي، 2013)

عند حل مسائل نظرية المرونة ، تكون المعطيات عادة هي:

1. الشكل والأبعاد الهندسية للجسم المدروس
2. ثوابت المرونة "معاملات المرونة" والتي هي مقادير فيزيائية تصف الخواص الفيزيائية للمادة التي يتألف منها الجسم المدروس.
3. الحملات المؤثرة على سطح الجسم.
4. شروط تثبيت الجسم أو شكل استناده على المساند ويعبر عنها رياضياً في شكل شروط حدية.

ويطلب تعيين الإجهادات والانتقالات كدوال بدلالة مركبات الإزاحة للجسم. ولحل المسألة المطروحة فإننا نحتاج إلى:

معادلات التوازن

يوجد بعض المعادلات الفيزيائية التي تربط بين الاجهادات والانفعالات والتي تسمى بقانون هوك (Hooke's Law) وهذا في حالة نظرية طالمرونة المتماثلة.

توجد طريقتان أساسيتان في حل مسائل نظرية المرونة

1. الحل بالإجهادات

2. الحل بدوال الإزاحة

أولاً: حل مسائل نظرية المرونة بالإجهادات (الطرشة ووهبي، 2013)

يكون كالتالي:

نشكل معادلات التوازن التفاضلية معبراً عنها بالإجهادات فنحصل على مجموعة من المعادلات التفاضلية بها مشتقات جزئية لعدد من المجاهيل تسمى بدرجات الحرية .

وفي مناهج المعادلات التفاضلية يمكن البرهان بأن تلك المعادلات لها حل وذلك لأنها مجموعة معادلات تفاضلية بمشتقات جزئية وبالتالي عند مكاملتها لا تكون ثوابت التكامل الاختيارية بسيطة ولكن تكون دوال أو ثوابت اختيارية نستطيع تحديدها من الشروط الحدية المطبقة على السطح والتي بحلها نتحصل على دوال الإزاحة والانفعالات والاجهادات مثل مركبات الاجهاد التالية:

$$\sigma_x = F_1(x, y, z) \quad , \quad \tau_{xy} = F_4(x, y, z)$$

$$\sigma_y = F_2(x, y, z) \quad , \quad \tau_{yz} = F_5(x, y, z)$$

$$\sigma_{\underline{z}} = F_3(x, y, z) \quad , \quad \tau_{xz} = F_6(x, y, z)$$

وبالتعويض عن قيم الاجهادات التي حصلنا عليها في المعادلات السابقة وذلك باستخدام قانون هوك فإننا نتحصل على معادلات الانفعال التالية:

$$\varepsilon_x = F_7(x, y, z) \quad , \quad \gamma_{xz} = F_{10}(x, y, z)$$

$$\varepsilon_y = F_8(x, y, z) \quad , \quad \gamma_{yz} = F_{11}(x, y, z)$$

$$\varepsilon_{\underline{z}} = F_9(x, y, z) \quad , \quad \gamma_{x\underline{z}} = F_{12}(x, y, z)$$

ثانياً: حل مسائل نظرية المرونة بدوال الإزاحة

إن المجاهيل الأساسية هي الانتقالات (دوال الإزاحة) والتي تعتبر دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق، وكافة الاجهادات والتشوهات التي تحدث في المعادلات سنعتبر عنها بدلالة دوال الإزاحة وبالتالي بأخذ معادلات التوازن "الاتزان" التفاضلية معبراً عنها بدوال الإزاحة يكون لدينا منظومة من معادلات تفاضلية تكامل تلك المعادلات ولكن أثناء المكاملة تكون ثوابت التكامل عبارة عن دوال اختيارية يمكن تحديدها من شروط التوازن " شروط الحدية" على سطح الجسم معبراً عنها بدلالة دوال الإزاحة (الطرشة ووهبي، 2013).

6.1 - قانون هوك المعمم في نظرية المرونة

لحساب مركبات الانفعال بدلالة مركبات الإجهاد هناك علاقة تربط بين مركبات الانفعال ومركبات الاجهاد وتدعى أحياناً بالعلاقات الفيزيائية ، ومن المعروف أن هذه العلاقات لها ارتباط بخواص المادة المرنة.

إذا اعتبرنا أن التشوه في الجسم المرن هو بحدود صغيرة جداً، فإن العلاقة بين هذا التشوه والإجهاد يمكن اعتبارها علاقة خطية أي بشكل عام مركبات الإجهاد تكتب بدلالة مركبات الانفعال باستخدام قانون هوك المعمم التالي:

$$\sigma_x = a_{11} \varepsilon_x + a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \gamma_{xy} + a_{15} \gamma_{y\bar{z}} + a_{16} \gamma_{\bar{z}x}$$

$$\sigma_y = a_{21} \varepsilon_x + a_{22} \varepsilon_y + a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \gamma_{xy} + a_{25} \gamma_{y\bar{z}} + a_{26} \gamma_{\bar{z}x}$$

$$\sigma_z = a_{31} \varepsilon_x + a_{32} \varepsilon_y + a_{33} \varepsilon_z + a_{34} \gamma_{xy} + a_{35} \gamma_{y\bar{z}} + a_{36} \gamma_{\bar{z}x}$$

$$\tau_{xy} = a_{41} \varepsilon_x + a_{42} \varepsilon_y + a_{43} \varepsilon_z + a_{44} \gamma_{xy} + a_{45} \gamma_{y\bar{z}} + a_{46} \gamma_{\bar{z}x}$$

$$\tau_{y\bar{z}} = a_{51} \varepsilon_x + a_{52} \varepsilon_y + a_{53} \varepsilon_z + a_{54} \gamma_{xy} + a_{55} \gamma_{y\bar{z}} + a_{56} \gamma_{\bar{z}x}$$

$$\tau_{\bar{z}x} = a_{61} \varepsilon_x + a_{62} \varepsilon_y + a_{63} \varepsilon_z + a_{64} \gamma_{xy} + a_{65} \gamma_{y\bar{z}} + a_{66} \gamma_{\bar{z}x}$$

تسمى العوامل a_{mn} بثوابت المرونة وعددها بشكل عام 36 ثابتاً وإذا كان التشوه في حدود المرونة فإن إزالة الحمولة تعني إعادة الجسم إلى شكله وحجمه الأوليين. وعند دراسة الأجسام المرنة ذات الصفات المرنة المتماثلة فإن ثوابت المرونة تحقق العلاقة $a_{mn} = a_{nm}$ وبالتالي:

يبقى عدد الثوابت 21 ثابتاً فقط.

لذا فإن الصفات المرنة لجسم غير متماثل الصفات في كافة الاتجاهات (anti-symmetric) في الحالة العامة تتعين لـ 21 ثابتاً مستقلاً. وكلما قلّت حالات عدم التماثل يقل هذا العدد، فإذا كانت الخواص الفيزيائية للجسم متماثلة لكل مستو في المستويات الثلاثة المتعامدة فالجسم عندئذ يسمى بالجسم ذي الخواص الفيزيائية المتعامدة بالنسبة لثلاثة محاور إحداثية متعامدة أو ببساطة تدعى (orthotropic)

إن ثوابت المرونة تنتقلص إلى تسع ثوابت في الجسم الأرثوتروبي (orthotropic) وترتبط رياضياً الإنفعالات الخطية ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) فقط بالإجهادات الناظمية، أما الإنفعالات الزاوية ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}$) ترتبط فقط بالإجهادات المماسية وبالتالي تأخذ العلاقات الشكل التالي (الطرشة ووهبي، 2013):

$$\varepsilon_x = b_{11}\sigma_x + b_{12}\sigma_y + b_{13}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y = b_{21}\sigma_x + b_{22}\sigma_y + b_{23}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = b_{31}\sigma_x + b_{32}\sigma_y + b_{33}\sigma_z$$

$$\gamma_{xy} = b_{44} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{zy} = b_{55} \tau_{zy}$$

$$\gamma_{zx} = b_{66} \tau_{zx}$$

وبالنسبة للجسم الأرثوتروبي (Orthotropic) فإن ثوابت المرونة السابقة تكتب على الشكل التالي (الطرشة ووهبي، 2013).

$$b_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad b_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad b_{33} = \frac{1}{E_z}$$

$$b_{12} = b_{21} = -\frac{\mu_{xy}}{E_y} = -\frac{\mu_{yx}}{E_x}, \quad b_{44} = \frac{1}{G_{XY}}$$

$$b_{13} = b_{31} = -\frac{\mu_{xz}}{E_z} = -\frac{\mu_{zx}}{E_x}, \quad b_{55} = \frac{1}{G_{yz}}$$

$$b_{23} = b_{32} = -\frac{\mu_{yz}}{E_z} = -\frac{\mu_{zy}}{E_y}, \quad b_{66} = \frac{1}{G_{zx}}$$

حيث أن:-

E_x, E_y, E_z تمثل معاملات المرونة الطولية (Youngs modulus) وفق المحاور

الاحداثية الثلاثة x, y, z .

تمثل معاملات بواسون μ_{xy} , μ_{yx} , μ_{xz} , μ_{zx} , μ_{yz} , μ_{zy} (Poissons modulus) .

فمثلا: μ_{xy} يعبر عن الإنفعال العرضي باتجاه المحور x الناتج عن تأثير الإجهاد σ_y .

تمثل معاملات القص G_{xy} , G_{yz} , G_{zx} (Shear modulus) في المستويات "معاملات المرونة العرضية".

ملاحظة: بما أن $b_{12}=b_{21}$ فإن معاملات بواسون μ_{xy} , μ_{yx} ومعاملات المرونة الطولية E_x , E_y ترتبط مع بعضها البعض بالعلاقة التالية.

$$E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx}$$

وبالتالي يأخذ قانون هوك الشكل التالي:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \mu_{21} \frac{\sigma_y}{E_2} - \mu_{31} \frac{\sigma_z}{E_3}$$

$$\varepsilon_y = - \mu_{12} \frac{\sigma_x}{E_1} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \mu_{32} \frac{\sigma_z}{E_3}$$

$$\varepsilon_z = - \mu_{13} \frac{\sigma_x}{E_1} - \mu_{23} \frac{\sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{23}}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{31}}$$

أما الجسم المتماثل فإن العلاقات لا تتغير من أجل أي جملة محاور إحداثية. والإجهادات النازمية لا ترتبط بالإنفعالات الزاوية، وكذلك الإجهادات المماسية لا ترتبط بالإنفعالات الزاوية في المستويات التي لا تؤثر بها وبالتالي يصبح عدد الثوابت ثلاثة فقط وهي:

E يمثل معامل المرونة الطولي "معامل المرونة عند الشد" (Youngs modulus)

G يمثل معامل المرونة بالعرضي "معامل المرونة عند القص" (Shear modulus)

μ يمثل معامل بواسون (Poissons modulus)

ومن مقاومة المواد نعلم أن العلاقة التي تربط بين المعاملات الفيزيائية الثلاثة (الطرشة ووهبي، 2013) هي

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

فكما هو معروف في مقاومة المواد إذا تعرض جسم إلى إجهاد شد محوري تولد تطاول نسبي في اتجاه الشد أي

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

وتولد تقاصر نسبي في الاتجاه المتعامد

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon$$

وإذا تعرض الجسم المرن إلى القص الصافي فإن هناك علاقة خطية تربط بين إجهاد القص والإنفعال الزاوي وهي:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

حيث أن: -

τ إجهاد القص (Shear Stress)

7.1 - الخاتمة:

تم في هذا الفصل عرض بعض التعريفات الأولية لنظرية المرونة والتي تتكون من المرونة وحد المرونة والانفعال والإجهاد ومعامل المرونة ومركبات الإزاحة والتي تعتبر مدخل لنظرية المرونة وتم أيضا ذكر بعض الخواص الميكانيكية التي تتعلق بسلوك المواد المرنة التي بها يمكن تمييز وتصنيف المواد المرنة ومن هذه الخواص المرونة واللدونة والصلابة وغيرها. وتم وصف السلوك الاستاتيكي والديناميكي للجسم في بعد واحد أو في بعدين بما يسمى بالصفائح المرنة. وكذلك تم في هذا الفصل عرض قانون هوك المعمم في نظرية المرونة.

الفصل الثاني

تأثير مقاومة الألياف للثني عند انحناء الصفحة

1.2- المقدمة

2.2 - الصفائح المقواه بألياف مقاومة للثني وأثره في نظرية المرونة ثلاثية

الأبعاد

3.2- تأثير مقاومة الألياف للثني في بعض نظريات المرونة ثنائية البعد

D - 2 وأحادية البعد D-1

4.2- إيجاد حلول فعلية لمسائل الصفحة المرنة المقواه بألياف تقاوم

الثني.

5.2- الخاتمة

1.2- مقدمة

إن نظرية المرونة الخطية ثنائية البعد تعتمد على افتراض مبسط وهو أن الصفيحة ذات سمك ضئيل ولكنها مرنة تماماً ومقواه بألياف مرنة (Liu and Soldatos, 2008; Soldatos, 2003) وعلى الرغم من أن هذا الافتراض صالح في كثير من الحالات فإن فرضية مقاومة الألياف للانحناء تؤدي إلى تأثيرات في نظرية المرونة من نظرية المرونة المتماثلة إلى نظرية المرونة غير المتماثلة ونظرية المرونة غير المتماثلة تأخذ في الإعتبار تأثير مقاومة الألياف في الانحناء "الثني".

ترتبط نظرية المرونة أحادية البعد ($1 - D$) وثنائية البعد ($2 - D$) التي تصنف السلوك الميكانيكي لصفائح مرنة بأسماء كل من Euler, Bernoulli, Timoshenko, Love, Kirchhoff وذلك منذ ظهور هذه النظرية وحتى بداية النصف الثاني من القرن العشرين وعلى مر السنين استمرت هذه النظريات في الظهور والتطور حيث أن المادة المكونة في الصفائح الرقيقة تكون متجانسة ومتساوية الخواص (Soldatos, 2009).

ظهور مواد معززة للألياف واستخدامها واستغلالها على نطاق واسع في الصناعة للهياكل القادرة على أخذ هذه الميزات المادية المتقدمة والجديدة أخذ اهتمام العديد من الباحثين.

إن تطوير هذا الجيل الثاني من النماذج الرياضية لهياكل ذات الجدران الرقيقة لا يزال مستمراً وقد توجد تطورات إضافية وفي أماكن أخرى إلا أنها تستند على افتراض مبسط بأن الألياف لها سمك ضئيل وهي مرنة تماماً (Soldatos, 2009).

طُوِّرت نظرية المرونة للصفحة ثنائية البعد نتيجة مراعاة تأثير المرونة غير المتماثلة spencer and soldatos (2007) ومقاومة الألياف للانحناء على السلوك الديناميكي والساكن للصفائح والتي يمكن اختيار كلاً منها بطريقة ذات مواصفات فيزيائية خاصة لمشكلة معينة ذات صلة بصلاية ومقاومة الألياف للثني والشروط الحدية المرفقة.

2.2- الصفائح المقواه بألياف مقاومة للثني وأثره في نظرية المرونة ثلاثية الأبعاد

في نظرية Soldatos (2009) تم الإهتمام بدراسة صفيحة رقيقة أو معتدلة السماكة في حدود نظرية المرونة الخطية وكان اعتبار سمك الصفيحة ثابت h بحيث أن الصفيحة تحتوي على مجموعة "عائلة" من الألياف المستقيمة المتوازية في اتجاه واحد ويمكن أن تقاوم الانحناء والصفحة المرنة التي تم دراستها تتعرض لثني ثابت أو ديناميكي ناتج عن عمل توزيع اجهاد خارجي $q(x_\alpha, t)$ وهي دالة الحمل التي تعمل بشكل متعامد على السطح العلوي للصفحة المرنة وبفرض أن U_s, U_n هي دوال إزاحة في الاتجاهات s, n على التوالي.

وقد تم تحديد شروط حدية عند حدود الصفيحة والمتعلقة بدوال الإزاحة وهي كما يلي:

$$(i) \text{ على السطح العلوي للصفحة } x_3 = h/2 \text{ حيث } t_{33} = -q(x_\alpha, t), t_{3\alpha} = m_{3\alpha} = 0$$

$$(ii) \text{ على السطح السفلي للصفحة } x_3 = -h/2 \text{ حيث } t_{3i} = m_{3\alpha} = 0$$

$$(iii) \text{ عند جوانب الصفيحة } [-h/2, h/2] \times C \text{ بحيث أن:}$$

$$\text{إما } U_n \text{ أو } t_{nn} \text{ تكون معطاة}$$

$$\text{وإما } U_s \text{ أو } t_{ns} \text{ تكون معطاة}$$

$$\text{وإما } U_3 \text{ أو } t_{n3} \text{ تكون معطاة}$$

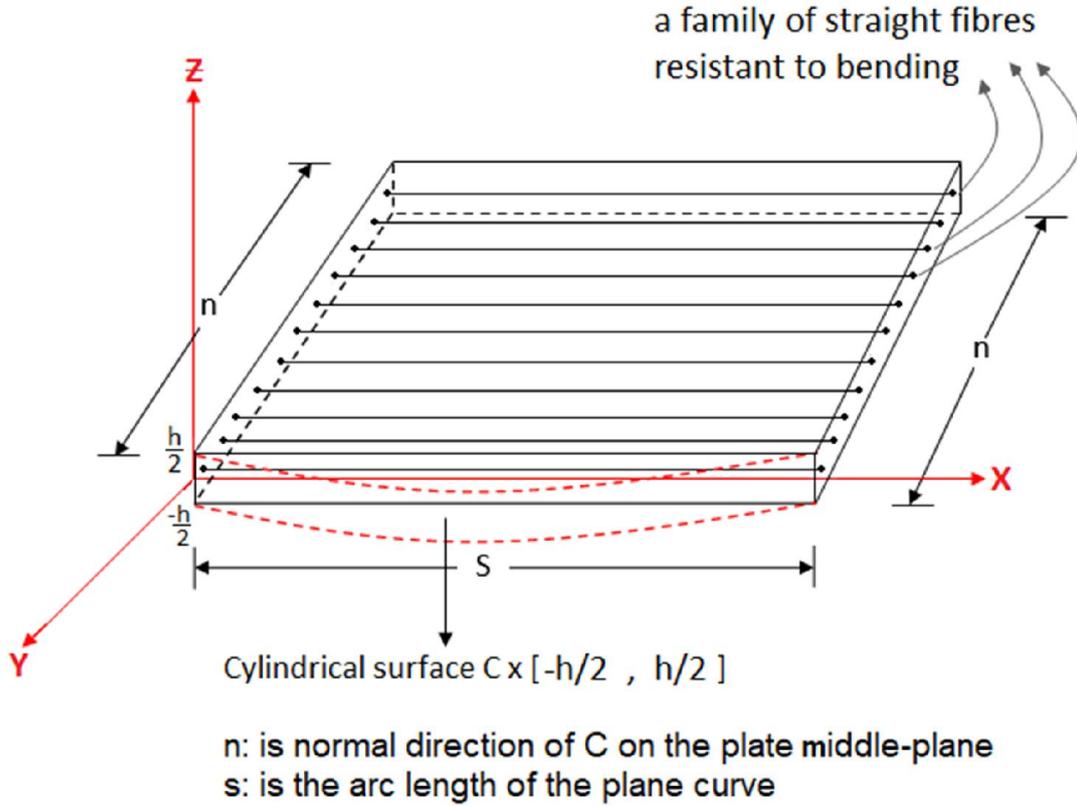
حيث أن C تمثل خط المنحني المحيط بالمستوى المنصف (middle – plane)

n تمثل المستقيم المتعامد على المنحنى C

s تمثل طول المنحنى C

α تأخذ قيم 1,2 بينما i تأخذ قيم 1,2,3

والشكل البياني موضح كالتالي:-



شكل (2.2) يوضح انحناء سطح صفيحة لنظرية المرنة في ثلاثة أبعاد

وكذلك تم التعرف على مركبات الإجهاد (Stress components) ومركبات الإنفعال (strain components) للمادة المدروسة (transversely isotropic materials) والذي يمثل الجزء المتماثل (The symmetric part) فيها العلاقة بين مركبات الإجهاد (stress components) بمركبات الإنفعال

(strain components) والمصّاعة في شكل قانون هوك (Hooke's law) كما

يلي:-

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{(23)} \\ t_{(13)} \\ t_{(12)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

والنتائج من حاصل الضرب يكون كالتالي:-

$$t_{11} = C_{11} e_{11} + C_{12} e_{22} + C_{12} e_{33} \quad (2)$$

$$t_{22} = C_{12} e_{11} + C_{22} e_{22} + C_{23} e_{33} \quad (3)$$

$$t_{33} = C_{12} e_{11} + C_{23} e_{22} + C_{22} e_{33} \quad (4)$$

$$t_{(23)} = (C_{22} - C_{23}) e_{23} = C_{22} e_{23} - C_{23} e_{23} \quad (5)$$

$$t_{(13)} = 2C_{66} e_{13} \quad (6)$$

$$t_{(12)} = 2C_{66} e_{12} \quad (7)$$

حيث أن C_{ij} هي معاملات المرونة للمادة، t_{ij} هي مركبات الإجهاد $i, j = 1, 2, 3$.

مركبات الانفعال في حدود نظرية المرونة الخطية معرفة كما يلي بالقانون التالي:

$$2e_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i}$$

$$= \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (8) \quad \text{أي أن :}$$

بالإضافة لذلك تم تعريف الجزء غير المتماثل (anti - symmetric part) في بعض مركبات الإجهاد (stress components) والنتيجة من استخدام هذا النوع من الألياف وطريقة وضعها في الصفيحة وهي على شكل عائلة وحيدة الاتجاه (في اتجاه واحد فقط وهو في اتجاه المحور X) والمعرفة كما يلي:-

$$(m_{12}, m_{13}) = d^f (k_3^f, k_2^f) \quad (9)$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$m_{12} = d^f k_3^f, \quad m_{13} = d^f k_2^f$$

حيث أن :

$$k_3^f = -U_{3,11}, \quad k_2^f = U_{2,11}$$

$$k_3^f = -\frac{d^2 U_3}{d x^2}, \quad k_2^f = \frac{d^2 U_2}{d x^2}$$

حيث K^f تمثل تقوس الألياف (fibres curvature) ، d^f تمثل معامل المرونة المضاف في نظرية Soldatos (2009) له علاقة بمقاومة الألياف للثني (Fibre Bending) والذي له وحدة قياس القوة (أي وحدة الإجهاد على وحدة المساحة) حيث

أن قدرة الألياف على مقاومة الإنحناء أدت إلى ظهور حدود غير صفرية في نظرية المرونة الخطية ثلاثية الأبعاد وهما

$$\begin{aligned} (t_{[13]} , t_{[12]}) &= \frac{1}{2} (m_{12,1} , - m_{13,1}) = \frac{1}{2} d^f (k_{3,1}^f , -k_{2,1}^f) \\ &= - \frac{1}{2} d^f (U_{3,111} , U_{2,111}) \end{aligned} \quad (10)$$

وهذا يعني أن

$$t_{[13]} = - \frac{1}{2} d^f U_{3,111} , \quad t_{[12]} = - \frac{1}{2} d^f U_{2,111}$$

$$t_{[13]} = - \frac{1}{2} d^f \frac{d^3 U_3}{d x^3} , \quad t_{[12]} = - \frac{1}{2} d^f \frac{d^3 U_2}{d x^3} \quad (11)$$

ويترتب على ذلك بشكل صريح في حالة عدم وجود قوى خارجية أخرى تؤثر على الجسم (body forces) فان معادلات الاتزان "الساكن" تأخذ الشكل التالي من نظرية soldatos (2009)

$$t_{11,1} + t_{(12),2} - t_{[12],2} + t_{(13),3} - t_{[13],3} = 0 \quad (12)$$

$$t_{(12),1} + t_{[12],1} + t_{22,2} + t_{(23),3} = 0 \quad (13)$$

$$t_{(13),1} + t_{[13],1} + t_{(23),2} + t_{33,3} = 0 \quad (14)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{(12)}}{\partial y} - \frac{\partial t_{[12]}}{\partial y} + \frac{\partial t_{(13)}}{\partial z} - \frac{\partial t_{[13]}}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial t_{(12)}}{\partial x} + \frac{\partial t_{[12]}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{(23)}}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial t_{(13)}}{\partial x} + \frac{\partial t_{[13]}}{\partial x} + \frac{\partial t_{(23)}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

كذلك وردت ما يناظر موضوع البحث من معادلات الاتزان "الساكن" لايجاد الحلول التقريبية باستخدام محصلات القوى ومحصلات العزوم على الشكل التالي في نظرية
--:(soldatos,2009)

$$M_{11,11}^C + M_{11,11}^f = q(x) \quad (18)$$

$$M_{11,1}^a - Q_1^a = 0 \quad (19)$$

حيث محصلات القوى ومحصلات العزوم وردت على شكل الصيغة التالية في
نظرية (Soldatos,2009) --:

$$M_{11}^C = \int_{-h/2}^{h/2} t_{11} \ z \ dz \quad (20)$$

$$M_{11}^f = \int_{-h/2}^{h/2} m_{12} \ dz = \int_{-h/2}^{h/2} -d^f \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} dz \quad (21)$$

$$M_{11}^a = \int_{-h/2}^{h/2} t_{(11)} \ \emptyset_1 (z) dz, \quad Q_1^a = \int_{-h/2}^{h/2} t_{(13)} \ \phi_1 \setminus (z) dz \quad (22)$$

3.2 تأثير مقاومة الألياف للثني في بعض نظريات المرونة ثنائية البعد (2-D) وأحادية البعد (1 - D)

1.3.2 تأثير مقاومة الاليف للثني في نظرية المرونة ثنائية البعد (2-D)

في الورقة البحثية Soldatos and Farhat (2016) تم الاهتمام بدراسة انحناء صفيحة مستطيلة الشكل في حدود نظرية المرونة الخطية وكان اعتبار سمك الصفيحة ثابت h والطول L_1 والعرض L_2 وحيث أن الصفيحة تحتوي على عائلة "مجموعة" من الألياف التي تقاوم الانحناء وفي اتجاه واحد والموازية لمحور x .

الصفيحة المرنة تعرضت لثني ثابت أوديناميكي عند سطح العلوي ناتج عن عمل اجهاد خارجي $q(x_\alpha, t)$ وهي دالة الحمل التي تؤثر بشكل متعامد على السطح العلوي للصفيحة وتم استخدام المعادلات المعروضة في نظرية Soldatos (2009) لكتابة دوال الإزاحة (Displacement Functions) في نظرية ريسنر (Reissner) على الشكل التالي في حالة (plate):

$$U(x, y, z) = u(x, y) + z (u_1(x, y) - w, x) \quad (23)$$

$$V(x, y, z) = V(x, y) + z (v_1(x, y) - w, x) \quad (24)$$

$$W(x, y, z) = w(x) \quad (25)$$

ولذلك يمكن كتابة دوال الإزاحة (ريسنر) في حالة (Beam) كالتالي:

$$U(x, z) = u(x) + z (u_1(x) - w, x) \quad (26)$$

$$W(x) = w(x) \quad (27)$$

ولسهولة الترميز يمكن استبدال U بـ U_1 واستبدال W بـ U_3 كما هو موضح

$$U_1(x, z) = u(x) + z(u_1(x) - w, x) \quad (28)$$

$$U_3(x) = w(x) \quad (29)$$

وفيما يلي توضيح لإيجاد مركبات الإنفعال (Strain components) والتي تكتب

بدلالة مشتقات جزئية لدوال الإزاحة (displacement functions)

أولاً: إيجاد المشتقات الجزئية اللازمة للتعبير عن مركبات الإنفعال

$$U_{1,1} = \frac{dU_1}{dx} = \frac{du}{dx} + z \left[\frac{du_1}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} \right] \quad (30)$$

$$U_{1,3} = \frac{dU_1}{dz} = u_1(x) - \frac{dw}{dx} \quad (31)$$

$$U_{3,1} = \frac{dU_3}{dx} = \frac{dw}{dx}, \quad U_{3,3} = 0 \quad (32)$$

ثانياً: التعويض في القانون التالي لإيجاد مركبات الإنفعال والمعروض في نظرية

(Soldatos, 2009)

$$2e_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i}$$

بالتعويض في القانون السابق

$$e_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x} = U_{1,1} = \frac{du}{dx} + z \left[\frac{du_1}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} \right] \quad (33)$$

كذلك نجد أنه:

$$e_{13} = \frac{1}{2} (U_{1,3} + U_{3,1}) = e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU_1}{dz} + \frac{dU_3}{dx} \right)$$

$$e_{13} = \frac{1}{2} \left(u_1(x) - \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dx} \right)$$

$$e_{13} = \frac{1}{2} u_1(x) \quad (34)$$

الآن سيتم إيجاد مركبات الإجهاد المتماثلة (stress components) من خلال

قانون هوك المذكور في نظرية Soldatos and Farhat (2016)

والمذكور كذلك في نظرية Soldatos (2009) نجد أن مركبات الإجهاد على النحو التالي:

$$t_{(11)} = C_{11}e_{11} + C_{12}e_{22} + C_{12}e_{33} \quad (35)$$

بالتعويض عن مركبات الانفعال (Strain components) نجد أن:

$$t_{(11)} = C_{11} \left[\frac{du}{dx} + z \frac{du_1}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} \right] \quad (36)$$

$$t_{(13)} = 2C_{66} e_{13} \quad (37)$$

$$t_{(13)} = \frac{1}{2} C_{66} (2u_1)$$

$$t_{(13)} = C_{66} u_1 \quad (38)$$

ويعرض فيما يلي معادلات الإلتزان "الساكن" وذلك من خلال المعادلات المعروضة في

نظرية Soldatos and Farhat (2016) وذلك بوضع الطرف الأيمن يساوي صفر

لأن موضع دراستي في حالة (static solution)

$$N_{11,1}^C = 0 \quad (39)$$

$$M_{11,11}^C + M_{11,11}^f = q(x) \quad (40)$$

$$M_{11,1}^C - Q_1^a = 0 \quad (41)$$

ولإيجاد معادلات الاتزان (41)، (42) يجب أولاً حساب محصلات القوى ومحصلات العزوم بالقوانين التالية المعروضة (Soldatos and Farhat (2016) بعد استبدال x_3 بـ z

$$N_{11}^C = \int_{-h/2}^{h/2} t_{11} dz \quad (42), \quad Q_1^a = \int_{-h/2}^{h/2} t_{13} dz \quad (43)$$

$$M_{11}^C = \int_{-h/2}^{h/2} t_{11} z dz \quad (44), \quad M_{11}^f = \int_{-h/2}^{h/2} m_{12} dz; \quad m_{12} = -d^f U_{3,11} \quad (45)$$

سيتم حساب N_{11}^C بالتعويض عن t_{11} وإيجاد ناتج التكامل:

$$N_{11}^C = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(\frac{du}{dx} + z \frac{du_1}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} \right) dz$$

$$N_{11}^C = C_{11} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{du}{dx} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{du_1}{dx} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{d^2w}{dx^2} dz \right]$$

$$= C_{11} \left[\frac{hdu}{dx} + 0 + 0 \right]$$

$$N_{11}^C = hC_{11} \frac{du}{dx} \quad (46)$$

نقوم باشتقاق N_{11}^C بالنسبة لـ x

$$N_{11,1}^C = hC_{11} \frac{d^2u}{dx^2} \quad (47)$$

سيتم حساب M_{11}^C بالتعويض في (44) عن t_{11} وإيجاد ناتج التكامل

$$M_{11}^C = \int_{-h/2}^{h/2} z C_{11} \left[\frac{du}{dx} + z \frac{du_1}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} \right] dz$$

$$M_{11}^C = C_{11} \left[\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{du}{dx} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{du_1}{dx} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{d^2w}{dx^2} dz \right]$$

$$M_{11}^C = C_{11} \left[\frac{h^3}{12} \frac{du_1}{dx} - \frac{h^3}{12} \frac{d^2w}{dx^2} \right] \quad (48)$$

تفاضل M_{11}^C بالنسبة لـ x

$$M_{11,1}^C = C_{11} \left[\frac{h^3}{12} \frac{d^2u_1}{dx^2} - \frac{h^3}{12} \frac{d^3w}{dx^3} \right] \quad (49)$$

نقوم بإجراء التفاضل لـ $M_{11,1}^C$ بالنسبة لـ x

$$M_{11,11}^C = C_{11} \left[\frac{h^3}{12} \frac{d^3u_1}{dx^3} - \frac{h^3}{12} \frac{d^4w}{dx^4} \right] \quad (50)$$

سوف يتم إيجاد M_{11}^f بالتعويض عن m_{12} وإيجاد ناتج التكامل حيث أن :-

$$m_{12} = -d^f \frac{d^2w}{dx^2}$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$M_{11}^f = \int_{-h/2}^{h/2} -d^f \frac{d^2w}{dx^2} dz \quad (51)$$

نشتق M_{11}^f بالنسبة لـ x

$$M_{11,1}^f = -h d^f \frac{d^3w}{dx^3} \quad (52)$$

تشتق M_{11}^f مرة أخرى بالنسبة لـ x

$$M_{11,11}^f = -h \, d^f \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (53)$$

نوجد Q_1^a بعد التعويض عن t_{13} وحساب ناتج التكامل

$$Q_1^a = \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} u_1(x) \, dz$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$Q_1^a = C_{66} h u_1 \quad (54)$$

بعد حساب محصلات القوى ومحصلات العزوم نعوض عنها في المعادلات (40)،(41)

هذا يعني أن نعوض عن $M_{11,1}^C$ ، $M_{11,11}^C$ ، $M_{11,11}^f$ ، $M_{11,1}^f$ ، Q_1^a على التوالي لنتحصل على معادلات الاتزان "الساكن" كما يأتي:

$$h C_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (55)$$

$$\frac{h^3}{12} C_{11} \frac{d^3 u_1}{dx^3} - C_{11} \frac{h^3}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} - h \, d^f \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x)$$

$$\frac{h^3}{12} C_{11} - (C_{11} \frac{h^3}{12} + h \, d^f) \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (56)$$

$$\frac{d^3 u_1}{dx^3}$$

كذلك نعوض عن $M_{11,1}^C$ ، Q_1^a فيكون

$$C_{11} \left(\frac{h^3}{12} \right) \frac{d^2 u_1}{dx^2} - C_{11} \frac{h^3}{12} \frac{d^3 w}{dx^3} + C_{66} h u_1 = 0 \quad (57)$$

بعد إجراء عمليات الضرب والقسمة وكذلك لسهولة الترميز على النحو التالي فإن معادلات الاتزان "الساكن" هي:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + A \frac{d^3 u_1}{dx^3} = B q(x, z) \quad (58)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} + C \frac{d^2 u_1}{dx^2} + D u_1 = 0 \quad (59)$$

حيث إن:

$$A = \frac{-h^2 C_{11}}{C_{11} h^2 + 12df} \quad (60)$$

وكذلك

$$B = \frac{-12}{h (C_{11} h^2 + 12df)} \quad (61)$$

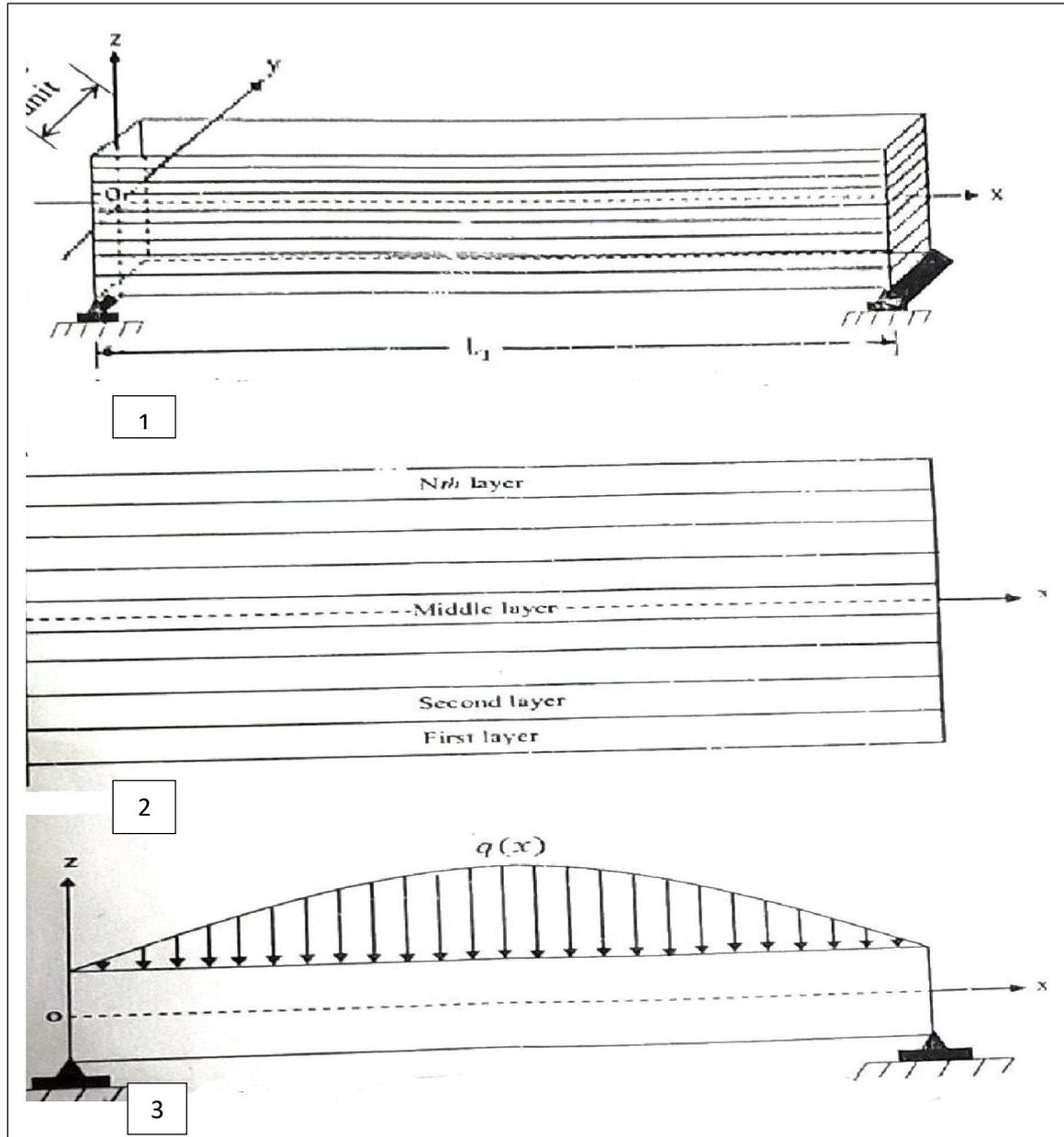
$$C = \left(\frac{C_{11} h^3}{12} \right) \left(\frac{-12}{(C_{11} h^3)} \right) = -1 \quad (62)$$

$$D = \left(\frac{-12}{(C_{11} h^3)} \right) (C_{66} h) = -\frac{12}{h^2 C_{11}} C_{66} \quad (63)$$

2.3.2 - تأثير مقاومة الألياف للثني في نظرية المرونة أحادية البعد

في الورقة البحثية Farhat and Gwila (2017) تم دراسة انحناء صفيحة مكونة من عدد N من الطبقات في حدود نظرية المرونة لها سمك ثابت h في اتجاه z وأفقياً لها طول ثابت L_1 في اتجاه x وبعد كبير مهمل في اتجاه y حيث أن الصفيحة تحتوي على ألياف متوازية في اتجاه Ox ولديها القدرة على مقاومة الإنحناء .

تعرضت الصفيحة المرنة لإنشاء ساكن "ديناميكي" نتج عن حمل مسلط على السطح العلوي للصفيحة ممثل بدالة الحمل $q(x)$ التي تعمل بشكل عمودي على السطح الخارجي العلوي للصفيحة. والشكل البياني التالي يوضح ذلك.



شكل (3.2) يوضح صفيحة مكونة عدد N من الطبقات ودالة الحمل $q(x)$ من نظرية

(Farhat and Gwila, 2017)

في الورقة البحثية Farhat and Gwila (2017) تم استخدام دوال الازاحة لنظرية أويلر وبرنولي وكانت الدراسة للنظرية في حالة أن الألياف مقاومة للثني.

وتأخذ دوال الازاحة الشكل التالي:

$$U (x , z , t) = u(x,t) - z w_{,x} \quad (64)$$

$$W (x , z , t) = w(x,t) \quad (65)$$

حيث t يدل على الزمن وكذلك $U (x , z , t)$ ، $W (x , z , t)$ تمثل مركبات الإزاحة على طول الاتجاهين z ، x بينما $w(x , t)$ تمثل الانحناء الأسفل (transverse deflection) حيث فرض أن دالة انحناء الصفيحة لأسفل مستقلة عن سمكها .

والعلاقات بين الإنفعال ودوال الإزاحة (Kinematic relations) عرفت كما يلي:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (68) \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (67)$$

حيث أن

$$\varepsilon_x = e_x^c + z K_x^c \quad , \quad \gamma_{xz} = 0 \quad (69)$$

$$e_x^c = U_{,x} \quad (70) \quad , \quad k_x^c = -w_{,xx} \quad (71)$$

أما بالنسبة لمركبات الإجهاد (Stress components) فإن الجزء المتماثل تم ذكره في شكل قانون هوك كما يلي:

$$\sigma_x^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \varepsilon_x \quad (72) \quad , \quad \tau_{(xz)}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} \gamma_{xz} = Q_{55}^{(k)} (0) = 0 \quad (73)$$

أما الجزء غير المتماثل (The anti – symmetric part) لمركبات الإجهاد تم صياغته بما يناظره على الشكل التالي في نظرية Soldatos (2009).

$$\tau_{[xz]}^{(k)} = -\tau_{[zx]}^{(k)} = \frac{1}{2} m_{xy,x}^{(k)} = \frac{1}{2} d^{f(k)} K_{z,x}^{f(k)} = \frac{1}{2} d^{f(k)} W_{,xxx} \quad (74)$$

حيث $K_{(z)}^f$ تمثل التقوس في الألياف ، $d^{f(k)}$ يمثل عامل المرونة الذي يتعلق بمقاومة الألياف للثني لعدد k من الطبقات

$$d^{f(k)} = C_{11} l^{(k)} L_1 \quad (75)$$

C_{11} تمثل عامل مرونة خاص للمادة، l يمثل بارامتر وسيط طولي له علاقة بمواصفات الداخلية للمادة فمثلا له علاقة بسمك الألياف في كل طبقة (Farhat and Soldatos,2015).

تم صياغة إجهاد القص (The Shear Stress) على النحو التالي في نظرية (Farhat and Gwila,2017).

$$\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^k \gamma_{xz} - \frac{1}{2} d^{f(k)} W_{,xxx} = -\frac{1}{2} d^{f(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (76)$$

$$\tau_{zx}^{(k)} = Q_{55}^k \gamma_{xz} + \frac{1}{2} d^{f(k)} W_{,xxx} = \frac{1}{2} d^{f(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (77)$$

كذلك تم عرض محصلات القوى ومحصلات العزوم على الشكل التالي في نظرية (Farhat and Gwila,2017).

$$N_x^C = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (78) , \quad M_x^C = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (79)$$

$$M_x^f = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} m_{xy} dz \quad (80)$$

ولإيجاد معادلات الاتزان بدلالة درجات الحرية w, u والتي بحلها نتحصل على درجات الحرية w, u وذلك بالتطبيق في معادلات الاتزان (الساكن) المعروضة نظريا في نظرية Farhat and Gwila (2009) وبشكل مناظر ماتم استخدامه في هذه الورقة (2017) Soldatos وفقا لدوال الازاحة المعروضة فيها نجد أن:-

$$N_{x,x}^C = 0 \quad (81)$$

$$M_{x,xx}^C + M_{x,xx}^f = q(x) \quad (82)$$

والشروط الحدية المرفقة والمذكورة في ورقة Farhat and Gwila (2017) عند $x=0$ ، $x=L_1$ وهي كالتالي :

إما u أو N_x^C تكون معطاه

إما w أو $M_{x,x}^C + M_{x,x}^f$ تكون معطاه

إما w_x أو $M_x^C + M_x^f$ تكون معطاه

فيما يلي معادلات نافير (Navier – type differential equations) المعروضة في الورقة Farhat and Gwila (2017) عند إيجاد الحل الساكن بدلالة مركبات دوال الازاحة والمشتقات الجزئية لها.

$$A_{11}^C u_{,xx} - B_{11}^C W_{,xxx} = 0 \quad (83)$$

$$B_{11}^C u_{,xxx} - (D_{11}^f) W_{,xxxx} = q(x) \quad (84)$$

حيث أن:-

$$(A_{11}^c, B_{11}^c) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55}^k (1, z) dz$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$A_{11}^c = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55}^k dz \quad (85)$$

$$B_{11}^c = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55}^k z dz \quad (86)$$

كذلك

$$D_{11}^f = \frac{1}{2} h d^f + D_{11} \quad (87)$$

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}^k z^2 dz \quad (88)$$

حيث أن D_{11}^f تمثل انحناء الألياف، Q_{11}^k ، Q_{55}^k تمثل عوامل مرونة للمادة عند الطبقة K ، $q(x)$ تمثل دالة الحمل.

في هذه الورقة Farhat and Gwila (2017) تم الحصول على الحل للمنظومة التفاضلية الجزئية ومن خلاله تم التوصل إلى النتائج العددية وتم توضيح تأثير مقاومة الألياف للثني من خلال هذه النتائج.

4.2 - إيجاد حلول فعلية (Exact Solution) لمسائل الصفيحة المرنة مقواه بألياف تقاوم الثني

في الورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) تم دراسة انحناء صفيحة مرنة في حدود نظرية المرونة الخطية والصفيحة لها سمك ثابت h في اتجاه z ولها طول منتهي في اتجاه x ويهمل الاتجاه في y الذي قد يأخذ بُعد كبير مقارنة بالطول المنتهي

في اتجاه x وفي هذا النوع من المسائل يمكن اعتبار المقاطع من الصفيحة الموازية للمستوى xz كقضبان (Beams) لها عرض يساوي وحدة واحدة. والمستوى المنتصف (middle plane) هو المستوى Oxy حيث أن الصفيحة مقواه بعائلة من الألياف المستقيمة المقاومة للانحناء والموازية لمحور Ox المدعومة ببساطة (Simply Simply supported) عند حدود الصفيحة $x=0$ ، $x=L_1$

في هذا النوع من المسائل الموصوفة أعلاه كل الكميات لا تعتمد على y بالإضافة إلى أن دالة الإزاحة في اتجاه y تساوي صفر.

حيث أن مسألة موضوع البحث في حدود نظرية المرونة الخطية فإن المركبات غير الصفيرية للانفعال عرفت كما يلي:-

$$e_{xx} = U_{,x} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (89)$$

$$e_{zz} = W_{,z} = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (90)$$

$$2e_{xz} = U_{,z} + W_{,x} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (91)$$

U ، W تمثل دوال الإزاحة (displacement functions) في الاتجاهين x ، z على التوالي. وأشار إلى أن N تمثل العدد الكلي للطبقات وفيما يلي سيتم الترميز بحرف K حيث $K=1, \dots, N$ فمثلا عندما $K=1$ تمثل الطبقة السفلية للصفيحة .

ورد في النظريات التالية (Soldatos,2009;Soldatos,2013;Spencer and soldatos,2007) نتيجة مقاومة الألياف للثني أن بعض مركبات الإجهاد (The Couple–stress) تكون غير متماثلة في كل طبقة.

حيث أنه تم وصف الجزء المتماثل (the symmetric part of the stress components) من مركبات الاجهاد باستخدام قانون هوك والمذكور في نظريات (Soldatos,2009;Soldatos,2013;Spencer and soldatos,2007) على

الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_z^{(k)} \\ \tau_{(xz)}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 \\ C_{13}^{(k)} & C_{33}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x^{(k)} \\ e_z^{(k)} \\ 2e_{xz}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (92)$$

والنتج من حاصل ضرب المصفوفتين كالتالي:

$$\sigma_x^{(k)} = C_{11}^{(k)} e_x^{(k)} + C_{13}^{(k)} e_z^{(k)} \quad (93)$$

$$\sigma_z^{(k)} = C_{13}^{(k)} e_x^{(k)} + C_{33}^{(k)} e_z^{(k)} \quad (94)$$

$$\tau_{(xz)}^{(k)} = C_{55}^{(k)} 2e_{xz}^{(k)} = 2 C_{55}^{(k)} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (95)$$

حيث أن $C_{ij}^{(k)}$ تمثل أربعة معاملات مرونة مستقلة لعدد k من الطبقات كذلك تم عرض الجزء غير المتماثل لمركبات الاجهاد (the anti - symmetric part of the stress components) في النظريات

التالية:-

(Soldatos,2009;Spencer and soldatos,2007) على الشكل التالي:

$$\tau_{[xz]}^{(k)} = \frac{1}{2} m_{xy,x}^{(k)} \quad (96)$$

بينما $m_{xy}^{(k)}$ تمثل مركبات الإجهاد المزدوج (couple-stress) غير الصفيرية نتيجة مقاومة الألياف للثني والتي تم صياغتها في نظرية Soldatos (2009) على الشكل التالي:

$$m_{xy}^{(k)} = d^{f(k)} K_z^{f(k)} = -\frac{1}{2} d^{f(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} \quad (97)$$

حيث $K_z^{f(k)}$ يمثل تقوس (انحناء) الألياف

$d^{f(k)}$ يمثل معامل المرونة الذي يتعلق بمقاومة الألياف للثني للطبقة k ووحدة بعده هي وحدة قوة والذي وصف بالشكل التالي:

$$d^{f(k)} = C_{11}^k \ell L \quad (98)$$

حيث C_{11}^k يمثل معامل المرونة لمادة الطبقة K

ℓ يمثل بارامتر "وسيط" طولي له علاقة بمواصفات الداخلية للمادة و التي يمكن على سبيل المثال له علاقة بسمك الفايبر "ألياف" لكل طبقة .

كذلك تم صياغة مركبات اجهاد القص (the shear stresses) على الشكل التالي في نظرية (Farhat and soldatos,2015).

$$T_{xz}^{(k)} = T_{(xz)}^{(k)} + T_{[xz]}^{(k)} \quad (99)$$

$$T_{zx}^{(k)} = T_{(xz)}^{(k)} - T_{[xz]}^{(k)} \quad (100)$$

وتم صياغة معادلات الاتزان "الساكن" على النحو التالي في نظرية (Farhat and Soldatos,2015).

$$\sigma_{x,x}^{(k)} + \mathcal{T}_{(xz),z}^{(k)} - \mathcal{T}_{[xz],z}^{(k)} = 0 \quad (101)$$

$$\mathcal{T}_{(xz),x}^{(k)} + \mathcal{T}_{[xz],x}^{(k)} + \sigma_{z,z}^{(k)} = 0 \quad (102)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على الشكل التالي:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}_{(xz)}^{(k)}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{T}_{[xz]}^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (103)$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{(xz)}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}_{[xz]}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (104)$$

والشروط الحدية المرفقة والمذكورة في نظرية (2015) Farhat and Soldatos
كما يلي:

$$\sigma_z \left(x, \frac{h}{2} \right) = q(x) \quad , \quad \sigma_z \left(x, \frac{-h}{2} \right) = 0 \quad (105)$$

$$\mathcal{T}_{zx} \left(x, \frac{h}{2} \right) = 0 \quad , \quad \mathcal{T}_{zx} \left(x, \frac{-h}{2} \right) = 0 \quad (106)$$

حيث أن $q(x)$ تمثل دالة الحمل والتي تؤثر بشكل متعامد على السطح العلوي للصفحة
ووصفت في نظرية (2015) Farhat and Soldatos بالصيغة التالية:-

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin (Mx) \quad (107)$$

$$M = m \pi / L \quad , \quad (m=1,2,\dots)$$

والشروط الحدية في حالة أن الصفيحة مدعومة ببساطة

(Simply Simply supported) عند نهاية حدود الصفيحة $x=0$ ، $x=L$ وصفت

كما يلي:

$$\sigma_x(0, z) = 0 \quad , \quad \sigma_x(L, z) = 0 \quad (108)$$

$$W(0, z) = 0 \quad , \quad W(L, z) = 0 \quad (109)$$

$$m_{xy}(0, z) = 0 \quad , \quad m_{xy}(L, z) = 0 \quad (110)$$

إن أهم النتائج التي تم الوصول إليها في ورقة Farhat and Soldatos (2015) هو الحصول على الحل الفعلي (exact solution) والمصاغ على الشكل التالي:

$$U^{(k)} = \sum_{i=1}^4 C_i^k P_i^k h^2 \left(M \frac{C_{13}^k + C_{55}^k}{C_{11}^k} - \frac{1}{2} \ell L M^3 \right) X \cos(m \pi x) e^{p_i^{(k)} z}$$

$$W^{(k)} = \sum_{i=1}^4 C_i^k h \left(h^2 M^2 - \frac{C_{55}^k}{C_{11}^k} P_i^{(k)^2} \right) X \sin(m \pi x) e^{p_i^{(k)} z}$$

حيث أن C_i^k تمثل أربع ثوابت اختيارية ($k=1, \dots, N$, $i=1,2,3,4$)

في نظرية Pagano (1969) تم إيجاد الحل الفعلي لمسألة انحناء الصفيحة بشروط حدية تسمى دعم ببساطة (Simply Simply supported) عندما الاليف غير مقاومة للثني أي معامل الذي ظهر في سنة Soldatos (2009) هو ($d^f=0$)

والحل الفعلي المشار اليه تم استخدامه لمعايرة نتائج نظريات تقريبية إذ استخدم ومازال يستخدم بشكل مكثف بواسطة العديد من البحاث " للتحقق من النتائج " لمعرفة مدى دقة النظريات (ثنائية البعد واحادية البعد).

ومن هذه النظريات:

(Cho and parmerter,1993; Disciuva,1986; Disciuva,1992;He et al. ,1993; Heucr,1992;Lee et al.,1994;Li and Liu,1995; Savoia,1995;Lu and Liu,1992;Noor and Burton,1989;Ping et al.,1994; Reddy,1984; Shimpi andGhugal,1999;Soldatos,1992;Soldatos and Watson,1997; Touratier,1991).

أما في نظرية Farhat and soldatos (2015) تم فيها إيجاد الحل الفعلي (Exact Solution) في حالة أن الألياف مقاومة للثني أي أن عامل المرونة d له قيم تختلف عن الصفر.

كما يوجد نظريات تقريبية في حالة أن الاليف مقاومة للثني بحيث أنه لمعرفة دقة النتائج فإنها تقارن نتائجها بالحل الفعلي المتحصل عليه في نظرية Farhat and soldatos (2015) ومن هذه النظريات:

(Aydogdu et al.,2021; Farhat and Gwila,2017; Ferdorova and Bursa, 2016; Soldatos et al.,2019; Soldatos,2020; Soldatos and Farhat, 2016).

5.2- الخاتمة:

تم في هذا الفصل دراسة بعض الأوراق البحثية التي لها علاقة بمقاومة الألياف للثني وتم دراسة تأثير مقاومة الألياف للثني عند انحناء الصفحة في نظريات المرونة ثنائية البعد وأحادية البعد (1-D)، (2-D).

وكذلك تم كتابة الحل الفعلي (exact solution) الذي تم إيجاده في ورقة Farhat and Soldatos (2015) لصفحة مرنة مقواة بألياف تقاوم الثني هذا الحل الفعلي المشار إليه تم استخدامه لمعايرة نتائج النظريات التقريبية والتي لازال يستخدم بواسطة العديد من البحوث لمعرفة دقة هذه النظريات.

الفصل الثالث

العلاقات الأساسية لنظرية تشوه القص المثلثية

1.3- مقدمة

2.3- دوال الإزاحة المثلثية

3.3- الإنفعال والإجهاد في نظرية القص المثلثية

4.3- معادلات الإتزان في نظرية القص المثلثية

5.3- استنتاج معادلات الاتزان لصفحة من طبقة واحدة ذات ألياف مرنة

6.3- الخاتمة

1.3 - مقدمة

زاد استخدام شرائح الألمونيوم المقوى بالألياف بشكل كبير في التطبيقات الحساسة للوزن مثل مركبات الفضاء الجوي وهياكل السيارات بسبب قوتها العالية، والزيادة في استخدام مركبات من الشرائح أو الطبقات في مختلف الهياكل. ونظراً لإنخفاض معدل معامل القص المستعرض العرضي (transverse shear modulus) إلى المعامل السطح الداخلي (in - plane modulus) ، فإن تأثيرات تشوه القص تكون أكثر وضوحاً في الصفائح المركبة التي تتعرض للأحمال العرضية (transverse loads) (shimpi and Ghugal, 2001)

من المعروف أن نظرية أويلر - برنولي الكلاسيكية لانحناء القضبان (the classical Euler - Bernoulli theory)

والمعروفة باسم النظرية الأولية للانحناء (ETB) تتجاهل أثر تشوه القص لذلك فهي مناسبة في حالة الحزم الرفيعة (الرقيقة) (Slender beams) لأنها تستند على افتراض أن المستقيمات المتعامدة على المستوي الموازي للمحور X تبقى متعامدة كما هي أثناء الانحناء وبعده مما يعني أن انفعال متعامدة القص العرضي (transverse shear strain) يساوي صفر.

فبالتالي هذه النظرية تؤدي إلى نتائج أقل دقة في حالة الصفائح السميكة والمركبة حيث تكون تأثيرات القص كبيرة.

كان بريس ورايلي وتيموشينكو (Bresse,1859; Rayleigh,1877; Timoshenko,1971) الباحثين الذين اهتموا بالتأثيرات الدقيقة مثل تشوه القص والقصور الذاتي الدوار في نظرية الصفيحة.

حيث أظهر تيموشينكو أن تأثير القص العرضي أكبر بكثير من تأثيرات القصور الذاتي الدوار على استجابة الاهتزاز العرضي للصفائح.

في هذه النظرية Timoshenko (1921) يفترض أن يكون توزيع انفعال القص ثابت رغم سماكة الصفيحة لذلك يتطلب عامل تصحيح القص. كانط، مانجوناتا ومايتي وسينها وفيناك (Manjunatha, kant, 1993; Maiti, Sinha, 1994; Vinayak, 1996) وآخرون استخدموا نظريات تشوه القص ذات الطبقة الواحدة المكافئة ونظريات القص ذات الرتبة العالية (HSDT) في تحليل رقائق الصفيحة المتماثلة وغير المتماثلة واستخدمت طريقة العنصر المحدد (المنتهي) كطريقة للحل حيث أن هذه النظريات كحالات خاصة.

طور ليفي وشتاين (Levy, 1877; Stein, 1986) نظرية الصفيحة ذات الطبقات وعبر عن مجال الإزاحة مستخدماً الدوال المثلثية لتمثيل تأثير السماكة وتقريب توزيع الإجهاد القصي عبر السماكة كذلك قدم ليو ولي (Liu and Li, 1996) مقارنة شاملة لنظريات الشرائح (الرقائق)، استناداً إلى فرضية الإزاحة التي تؤكد على أهمية نظريات ذات الطبقات (Layerwise theories) كما قدموا سلسلة من نظريات ذات شبه طبقات (quasi - layerwise theories).

طور لو وليو (Lu and Liu, 1992) نظرية الإجهاد القصي بين الطبقات (شرائح الالمونيوم) باستخدام وظائف الشكل الهرمي المكعب هذه النظرية تعتمد على الطبقة وعدد درجات الحرية العالية لها لذلك فهي معقدة حسابياً.

تشير الدراسات إلى أنه قد تم تطوير معظم نظريات الطبقة (the layerwise theories) للرقائق "الشرائح" العرضية المتماثلة التي تتعرض للانحناء الاسطواني.

لذلك فإن نظريات ذات درجات الحرية العالية مع وجود أكثر من ثلاثة متغيرات للإزاحة غير كافية وغير فعّالة عندما تكون "الصفحة" غير متماثلة إذا لم يتم حساب عدم التناسق في المخطط بشكل صحيح في النظرية.

يشير العمل البحثي الذي يتعامل مع صفحة غير متماثلة باستخدام النظريات ذات الطبقات سيكون صعباً. (Shimpi and Ghugal, 2001)

لقد طور شمبي وغوغال Shimpi and Ghugal (1999) نظرية تشوه القوس المثلثية ذات الطبقات (LTSDT-1) لتحليل انحناء الحزم الرقائعية "الشرائح" المتقاطعة.

ومع ذلك فإن دوال الإزاحة للنظرية Shimpi and Ghugal (1999) عانت من الخلل في وجود نتائج متناقضة غير مستقرة على طول اتجاه الصفحة ولإزالة هذا القصور تم تحسين دوال الإزاحة للطبقات في هذه النظرية Shimpi and Ghugal (2001) (LTSDT-1) حيث أن عدد المتغيرات الأولية في هذه النظرية أقل من عدد المتغيرات في نظريات تشوه القوس من الدرجة الأولى لذلك يلغي الحاجة إلى عامل تصحيح القوس سيتم استخدام الدالة الجيبية وإحداثيات السماكة في مجال الإزاحة لحساب تشوه القوس لذلك يمكن الحصول على إجهاد القوس مباشرة من استخدام العلاقات وتحقيق الشروط الحدية الخالية من إجهاد القوس في أعلى وأسفل الصفحة وتحقيق استمرارية القوس بين الطبقات.

وفي هذا الفصل سيتم ذكر ما يتعلق بالورقة البحثية Shimpi and Ghugal (2001) من مركبات لدوال الإزاحة المثلثية وكذلك مركبات الانفعال والإجهاد لنظرية القوس المثلثية ومعادلات الاتزان لهذه النظرية وكذلك سيتم استنتاج معادلات الاتزان لصفحة من طبقة واحدة ذات ألياف مرنة.

2.3- دوال الإزاحة المثلثية

إن الصفيحة المدروسة في نظرية Shimpi and Ghugal (2001) تتألف من طبقتين (two layers) طبقة أولى وطبقة ثانية (Layer1 and Layer2) الطبقة الأولى (Layer1) لها أبعاد وهي:

$$0 \leq X \leq L \quad , \quad -b/2 \leq y \leq b/2 \quad , \quad -h/2 \leq z \leq 0$$

الطبقة الثانية (Layer2) أبعادها كما يلي:

$$0 \leq X \leq L \quad , \quad -b/2 \leq y \leq b/2 \quad , \quad 0 \leq z \leq h/2$$

بينما x , y , z هي إحداثيات كارتيزية وكذلك L هو طول الصفيحة وارتفاعها h هذه الصفيحة تعرضت لحمل عرضي $q(x)$.

إن دوال الإزاحة (The Displacement Functions) أعطيت كما يلي:

$$U^{(1)}(x, z) = -(z - \alpha h) \frac{dW}{dx} + h [C_1 + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 + \alpha}\right)] \phi(x) \quad (1)$$

$$U^{(2)}(x, z) = -(z - \alpha h) \frac{dW}{dx} + h [C_3 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 - \alpha}\right)] \phi(x) \quad (2)$$

$$W(x) = w(x) \quad (3)$$

حيث أن:

$U^{(1)}$, $U^{(2)}$ هي مركبات الإزاحة في اتجاه x

والأرقام الفوقية (1) ، (2) تشير إلى الطبقة الأولى والطبقة الثانية $w(x)$ هي دالة الانحناء للأسفل في اتجاه z

$\phi(x)$ هي دالة الدوران (التواء) عبر مقطع الصفيحة وحيث C_3, C_2, C_1 , α هي ثوابت وردت في نظرية القص المثلثية كما يلي:-

$$C_1 = \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)} + E^{(2)}} \right) \left(\begin{array}{l} \sin\left(\frac{-\pi \alpha}{1-2\alpha}\right) - c_2 \sin\left(\frac{-\pi \alpha}{1+2\alpha}\right) + 2C_2 \left(\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}\right) \left(\frac{1+2\alpha}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi \alpha}{1+2\alpha}\right) \\ -2 \left(\frac{1-2\alpha}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi \alpha}{1-2\alpha}\right) \end{array} \right) \quad (4)$$

$$C_2 = \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \frac{0.5 + \alpha}{0.5 - \alpha} \frac{\cos\left(\frac{-\pi \alpha}{1-2\alpha}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi \alpha}{1+2\alpha}\right)} \quad (5)$$

$$C_3 = \left(\frac{E^{(1)}}{E^{(1)} + E^{(2)}} \right) \left(\begin{array}{l} -\sin\left(\frac{-\pi \alpha}{1-2\alpha}\right) - C_2 \sin\left(\frac{-\pi \alpha}{1+2\alpha}\right) + 2C_2 \left(\frac{1+2\alpha}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi \alpha}{1+2\alpha}\right) \\ -2 \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right) \left(\frac{1-2\alpha}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi \alpha}{1-2\alpha}\right) \end{array} \right) \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{E^{(2)} - E^{(1)}}{E^{(2)} + E^{(1)}} \right) \quad (7)$$

حيث أن:-

$E^{(2)}, E^{(1)}$ يمثل معامل المرونة الطولي (youngs moduli of Layer (1) and Layer(2))

$G^{(2)}, G^{(1)}$ يمثل معامل المرونة القصي (Shear moduli of Layer (1) and Layer(2))

α معامل المحور المتعادل (Neutral axis coefficient) المعروف رياضياً
بالمعادلة (7).

3.3- الانفعال والإجهاد في نظرية القص المثلثية

1.3.3 الإنفعال في نظرية القص المثلثية:

لقد تم صياغة الانفعال القصي العرضي والعمودي (Normal and transverse shear strains) في الطبقات الأولى والثانية على الشكل التالي:-

أولاً: الانفعال العمودي (Normal strain)

- الانفعال العمودي (Normal strain) للطبقة الأولى (Layer1) هو عبارة عن
الإشتقاق الجزئي لدالة الإزاحة $u^{(1)}$ بالنسبة لـ x أي أن:-

$$\epsilon_x^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = -(z - \alpha h) \frac{d^2 w}{dx^2} + h \left[C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 + \alpha} \right) \right] \frac{d\theta}{dx} \quad (8)$$

- الانفعال العمودي (Normal strain) للطبقة الثانية (Layer2) هو عبارة عن
الإشتقاق الجزئي لدالة الإزاحة $u^{(2)}$ بالنسبة لـ x أي أن:-

$$\epsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = -(z - \alpha h) \frac{d^2 w}{dx^2} + h \left[C_3 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 + \alpha} \right) \right] \frac{d\theta}{dx} \quad (9)$$

ثانياً: الانفعال القصي العرضي (Transverse shear strains)

- الانفعال القصي (Transverse shear strains) للطبقة الأولى (Layer1) هو حاصل جمع الاشتقاق الجزئي لدالة الانحناء لأسفل w بالنسبة لـ x مع الاشتقاق الجزئي لدالة الإزاحة $u^{(1)}$ بالنسبة لـ z .

$$\gamma_{xz}^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{إذن: - (10)}$$

فبالتالي فإن الاشتقاق الجزئي لدالة الإزاحة $u^{(1)}$ بالنسبة لـ z

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} &= \frac{-\partial w}{\partial x} + h C_2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1/h}{0.5+\alpha} \right) \emptyset(x) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5+\alpha} \right) \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} &= \frac{-\partial w}{\partial x} + C_2 \emptyset(x) \left(\frac{\pi}{(1+2\alpha)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5+\alpha} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

وكذلك الاشتقاق لدالة الإزاحة دالة الانحناء $w(x)$ بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dx} \quad (12)$$

وبهذا فإن الانفعال القصي العرضي (Transverse shear strains) للطبقة الأولى (Layer1) بالتعويض سيكون:-

$$\begin{aligned} \gamma_{zx}^{(1)} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{dw}{dx} \\ &= \frac{-dw}{dx} + C_2 \emptyset(x) \left(\frac{\pi}{(1+2\alpha)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5+\alpha} \right) + \frac{dw}{dx} \\ &= C_2 \emptyset(x) \left(\frac{\pi}{(1+2\alpha)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5+\alpha} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

- الانفعال القصي العرضي (Transverse shear strains) للطبقة الثانية (Layer2) هو حاصل جمع الاشتقاق الجزئي لدالة الإزاحة $u^{(2)}$ بالنسبة لـ z مع دالة الانحناء لأسفل $w(x)$ بالنسبة لـ x .

هذا يعني أن:

$$\gamma_{zx}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{dw}{dx} \quad (14)$$

فبالتالي فإن الاشتقاق الجزئي لدالة الإزاحة $u^{(2)}$ بالنسبة لـ z هو كما يلي:-

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} &= \frac{-dw}{dx} + h \varnothing(x) \left(\frac{\pi}{2} \frac{1/h}{(0.5-\alpha)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5-\alpha} \right) \\ &= \frac{-dw}{dx} + \varnothing(x) \left(\frac{\pi}{(1-2\alpha)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5-\alpha} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

الآن الاشتقاق لدالة الإزاحة دالة الانحناء $w(x)$ بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dx}$$

إذن الإنفعال القصي العرضي (Transverse shear strains) للطبقة الثانية (Layer2) هو

$$\begin{aligned} \gamma_{zx}^{(2)} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{dw}{dx} \\ &= \frac{-dw}{dx} + \varnothing(x) \left(\frac{\pi}{(1-2\alpha)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5-\alpha} \right) + \frac{dw}{dx} \\ &= \varnothing(x) \left(\frac{\pi}{(1-2\alpha)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5-\alpha} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

حيث قيم الثوابت C_3, C_2, C_1 ، α كما في البند السابق (2.3)

2.3.3 الإجهاد في نظرية القص المثلثية

ورد الإجهاد في نظرية Shimpi and Ghugal (2001) للطبقتين الأولى والثانية على النحو التالي:-

أولاً: الإجهاد العمودي (Normal stress)

- الإجهاد العمودي (normal stress) للطبقة الأولى (Layer1) هو عبارة عن حاصل ضرب عامل المرونة $E^{(1)}$ في الانفعال العمودي (normal strains) للطبقة الأولى (Layer1) والذي يرمز له بالرمز التالي:

$$\sigma_x^{(1)} = E^{(1)} \varepsilon_x^{(1)} \quad (17)$$

من البند (1.3.3) نجد أن:-

$$=E^{(1)} \left\{ -(z - \alpha h) \frac{d^2 w}{dx^2} + h \left[C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 + \alpha} \right) \right] \frac{d\theta}{dx} \right\} \quad (18)$$
$$\sigma_x^{(1)}$$

- الإجهاد العمودي (normal stress) للطبقة الثانية (Layer2) هو عبارة عن حاصل ضرب عامل المرونة $E^{(2)}$ في الانفعال العمودي (normal strains) للطبقة الثانية (Layer2) والذي يرمز له بالرمز التالي:

$$\sigma_x^{(2)} = E^{(2)} \varepsilon_x^{(2)} \quad (19)$$

ومن البند (1.3.3) نجد أن:-

$$\sigma_x^{(2)} = E^{(2)} \left\{ -(z - \alpha h) \frac{d^2 w}{dx^2} + h [C_3 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 - \alpha} \right)] \frac{d\phi}{dx} \right\} \quad (20)$$

ثانياً: الإجهاد القصي العرضي (Transverse shear stress)

الإجهاد القصي العرضي (Transverse shear stress) للطبقة الأولى (Layer1) هو حاصل ضرب عامل المرونة القصي $G^{(2)}$ في الانفعال القصي للطبقة الأولى (Layer1) والذي يرمز له بالرمز $\tau_{zx}^{(1)}$:

$$\tau_{zx}^{(1)} = G^{(1)} \gamma_{zx}^{(1)} \quad (21)$$

ومن البند (1.3.3) نجد أن

$$\tau_{zx}^{(1)} = G^{(1)} \left\{ C_2 \phi(x) \frac{\pi}{(1+2\alpha)} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 + \alpha} \right) \right\}$$

$$\tau_{zx}^{(1)} = C_2 \phi(x) \frac{G^{(1)} \pi}{1+2\alpha} + \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 + \alpha} \right) \quad (22)$$

وكذلك الإجهاد القصي العرضي (Transverse shear stress) للطبقة الثانية (Layer2) هو حاصل ضرب عامل المرونة القصي $G^{(2)}$ في الانفعال القصي للطبقة الثانية (Layer2) والذي ورد على الشكل التالي في نظرية (Shimpi, Ghugal, 2001):

$$\tau_{zx}^{(2)} = G^{(2)} \gamma_{zx}^{(2)}$$

ومن البند (1.3.3) نجد أن:

$$\tau_{zx}^{(2)} = G^{(2)} \left\{ \emptyset(x) \frac{\pi}{1-2\alpha} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5-\alpha} \right) \right\}$$

$$\tau_{zx}^{(2)} = \emptyset(x) \frac{G^{(2)}\pi}{1-2\alpha} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h-\alpha}{0.5-\alpha} \right) \quad (23)$$

حيث أن $G^{(2)}$, $G^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(1)}$ عوامل مرونة للمادة في الطبقتين.

4.3 - معادلات الاتزان في نظرية القص المثلثية

تم كتابة معادلاتي الاتزان على الشكل التالي في نظرية القص المثلثية (Shimpi and Ghugal, 2001).

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - D_1 \frac{d^3 \emptyset}{dx^3} - \frac{q}{D} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} - D_2 \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} + D_3 \emptyset = 0 \quad (25)$$

حيث أن D_1 , D_2 , D_3 , D ثوابت (Constants) ذكرت على الشكل التالي في نظرية (Shimpi and Ghugal, 2001):

$$D = (A_1 + A_2) = \bar{D} E^{(2)} bh^3$$

$$\bar{D} = \left(\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} \right) \left(\frac{1}{24} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \left(\frac{1}{24} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{2} \right)$$

$$D_1 = \left(\frac{A_2+B_2}{A_1+B_1} \right), D_2 = \left(\frac{A_3+B_3}{A_2+B_2} \right), D_3 = \left(\frac{A_4+B_4}{A_2+B_2} \right)$$

حيث أن A_4, A_3, A_2, A_1 ثوابت التكامل للطبقة الأولى (Layer1 integration constants) (Shimpi and Ghugal, 2001) كما يلي في

$$A_1 = bh^3 E^{(1)} \left(\frac{1}{24} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{2} \right)$$

$$A_2 = bh^3 E^{(1)} \left(C_1 \left(\frac{1}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1+2\alpha}{\pi} \right)^2 \left[1 + \sin \left(\frac{-\pi\alpha}{1+2\alpha} \right) \right] \right. \\ \left. + \alpha C_2 \left(\frac{1+2\alpha}{\pi} \right) \cos \left(\frac{-\pi\alpha}{1+2\alpha} \right) \right]$$

$$A_3 = bh^3 E^{(1)} \left(\frac{C_1^2}{2} - 2C_1 C_2 \left(\frac{1+2\alpha}{\pi} \right) \cos \left(\frac{-\pi\alpha}{1+2\alpha} \right) \right] + \frac{C_2^2}{4} \left[1 + \left(\frac{1+2\alpha}{\pi} \right) \sin \left(\frac{-\pi\alpha}{0.5+\alpha} \right) \right]$$

$$A_4 = \frac{bhG^{(1)}}{4} \left(\frac{C_2\pi}{1+2\alpha} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{1+2\alpha}{\pi} \right) \sin \left(\frac{-\pi\alpha}{0.5+\alpha} \right) \right]$$

كذلك وردت الثوابت التكاملية للطبقة الثانية (Layer2 integration constants) B_4, B_3, B_2, B_1 على الشكل التالي في النظرية (Shimpi, Ghugal, 2001).

$$B_1 = bh^3 E^{(2)} \left(\frac{1}{24} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{2} \right)$$

$$B_2 = bh^3 E^{(2)} \left(C_3 \left(\frac{1}{8} - \frac{\alpha}{2} \right) + \left(\frac{1-2\alpha}{\pi} \right)^2 \left[1 + \sin \left(\frac{-\pi\alpha}{1+2\alpha} \right) \right] \right. \\ \left. - \alpha \left(\frac{1-2\alpha}{\pi} \right) \cos \left(\frac{-\pi\alpha}{1-2\alpha} \right) \right]$$

$$B_3 = bh^3 E^{(1)} \left(\frac{C_3^2}{2} - 2C_3 \left(\frac{1-2\alpha}{\pi} \right) \cos \left(\frac{-\pi\alpha}{1-2\alpha} \right) + \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1-2\alpha}{\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi\alpha}{0.5-\alpha} \right) \right] \right]$$

$$B_4 = \frac{bhG^{(2)}}{4} \left(\frac{\pi}{1-2\alpha} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{1-2\alpha}{\pi} \right) \sin \left(\frac{-\pi\alpha}{0.5-\alpha} \right) \right]$$

كذلك تم التطرق للشروط الحدية في نظرية Shimpi and Ghugal (2001) وأعطيت القيم التالية عند $x=L, x=0$ على الشكل التالي:

- i) $\frac{d^3w}{dx^3} - D_1 \frac{d^2\emptyset}{dx^2} = 0$ Or w is prescribed (معطاة)
- ii) $\frac{d^2w}{dx^2} - D_1 \frac{d\emptyset}{dx} = 0$ Or $\frac{dw}{dx}$ is prescribed (معطاة)
- iii) $\frac{d^2w}{dx^2} - D_2 \frac{d\emptyset}{dx} = 0$ Or \emptyset is prescribed (معطاة)

5.3 - استنتاج معادلات الاتزان لصفحة من طبقة واحدة ذات ألياف مرنة

سيتم أخذ دوال الإزاحة المعروضة في نظرية Shimpi and Ghugal (2001) وإيجاد ما يترتب على ذلك من انفعال واجهاد ولكن في حالة أن الصفحة من طبقة واحدة ، وفي حالة أن الألياف مرنة.

حيث أن البحث سيكون في حالة صفحة من طبقة واحدة فقط.

- دوال الإزاحة المستخدمة هي:

$$U_1(x, z) = - (z - \alpha h) \frac{dw}{dx} + h [C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z/h - \alpha}{0.5 + \alpha} \right)] \emptyset(x) \quad (26)$$

$$U_3(x, z) = w(x) \quad (27)$$

والتي يمكن إعادة صياغتها رياضياً على الشكل التالي وذلك بفرض أن:-

$$z = (z - \alpha h)$$

مما يترتب على ذلك بالنسبة لأبعاد الصفيحة أو القضيب بالنسبة للمتغير z ما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \\ z = z + \alpha h \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-h}{2} + \alpha h \leq z \leq \frac{h}{2} + \alpha h \quad \text{أو} \quad \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) h \leq z \leq \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h \quad (28)$$

وبالتعويض عن المعادلة (28) في دوال الإزاحة (26)، (27)

$$U_1(x, z) = -z \frac{dw}{dx} + h [C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z + \alpha h - \alpha h}{0.5 + \alpha} \right)] \varnothing(x)$$

$$= -z \frac{dw}{dx} + h [C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z + \alpha h - \alpha h}{h(0.5 + \alpha)} \right)] \varnothing(x)$$

فتصبح دوال الإزاحة على الشكل التالي:-

$$U_1(x, z) = -z \frac{dw}{dx} + h [C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5 + \alpha)} \right)] \varnothing(x) \quad (29)$$

$$U_3(x, z) = w(x) \quad (30)$$

الآن سيتم إيجاد الاشتقاق الجزئي لدوال الإزاحة (29)، (30)

نشتق الدالة $U_1(x, z)$ بالنسبة لـ x والتي يرمز لها بالرمز $U_{1,1}$

$$U_{1,1} = \frac{dU_1}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} + h C_1 \frac{d\varnothing}{dx} + h C_2 \frac{d\varnothing}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5 + \alpha)} \right) \quad (31)$$

- نقوم باشتقاق الدالة $U_1(x, z)$ بالنسبة لـ z والتي يرمز لها بالرمز $U_{1,3}$

$$U_{1,3} = -\frac{dw}{dx} + C_2 \varnothing(x) \left(\frac{\pi}{1 + 2\alpha} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5 + \alpha)} \right) \quad (32)$$

نقوم بإجراء الاشتقاق الجزئي لدالة الإزاحة U_3 بالنسبة لـ x والتي يرمز لها بالرمز

$U_{3,1}$

$$U_{3,1} = \frac{dw}{dx} \quad (33)$$

بهذا يمكن إيجاد حدود مركبات الانفعال (strain components) باستخدام القوانين التالية المذكورة في الدكتوراه Farhat (2013)

$$e_x^c = U_{1,1} , K_x^c = -U_{3,11} , K_x^a = u_{1,1} \text{ and } e_{xz}^a = u_1 \quad (34)$$

$$\varepsilon_x = e_x^c + z K_x^c + \varnothing(z) K_x^a \text{ and } \gamma_{xz} = \phi_1'(z) e_{xz}^a \quad (35)$$

وكذلك يتم إيجاد مركبات الإجهاد (Stresses Components) باستخدام القوانين التالية والمذكورة في الدكتوراه Farhat (2013)

$$\sigma_x = Q_{11}^k \varepsilon_x , \tau_{(zx)} = Q_{55} \gamma_{xz} \quad (36)$$

حيث أنه بمقارنة دوال الإزاحة (موضع الدراسة) مع الدوال الإزاحة المعروضة في الدكتوراه Farhat (2013) اتضح أن $\phi_1(z)$ (The shape function):

$$u_1 = \phi(x) , \phi_1(z) = h C_1 + h C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \quad (37)$$

الآن يتم إيجاد حدود مركبات الانفعال (strain component) كالآتي:

$$e_x^c = U_{1,1} = \frac{dU_1}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} + h C_1 \frac{d\varnothing}{dx} + h C_2 \frac{d\varnothing}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \quad (38)$$

$$K_x^c = U_{3,11} = - \frac{d^2w}{dx^2} , K_x^a = u_{1,1} = \frac{d\varnothing}{dx} \quad (39)$$

$$e_{xz}^a = u_1 = \varnothing(x) \quad (40)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= e_x^c + z K_x^c + \phi_1(z) K_x^a \\ &= -z \frac{d^2w}{dx^2} + h C_1 \frac{d\phi}{dx} + h C_2 \frac{d\phi}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) + \frac{-z d^2w}{dx^2} \\ &+ h C_1 \frac{d\phi}{dx} + h C_2 \frac{d\phi}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right)\end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\varepsilon_x = -2z \frac{d^2w}{dx^2} + 2h C_1 \frac{d\phi}{dx} + 2C_2 h \frac{d\phi}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \quad (41)$$

نعوض في المعادلة (35) عن $\phi_1'(z)$ بحيث أن:

$$\phi_1'(z) = \frac{\pi}{(1+2\alpha)} C_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \quad (42)$$

فبالتالي نعوض عن (42) ، المعادلة (40) في المعادلة (35)

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\pi}{(1+2\alpha)} \right) C_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \phi(x) \quad (43)$$

سيتم إيجاد مركبة الاجهاد العمودي

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \quad (36)$$

وبالتعويض عن العلاقة التالية بين معاملات المرونة بالمعادلة

وذلك لإيجاد مركبات الإجهاد (stresses components) بالشكل التالي:

$$\sigma_x = Q_{11} \left[-2z \frac{d^2w}{dx^2} + 2h C_1 \frac{d\phi}{dx} + 2h C_2 \frac{d\phi}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right]$$

$$\sigma_x = \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \left[-2z \frac{d^2w}{dx^2} + 2h C_1 \frac{d\phi}{dx} + 2h C_2 \frac{d\phi}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right] \quad (44)$$

وتكون مركبة الاجهاد القصي τ_{xz} كما يلي:

$$\tau_{xz} = Q_{55} \gamma_{xz}$$

$$Q_{55} = C_{66} \quad \text{سنعوض عن}$$

$$\tau_{(xz)} = C_{66} C_2 \left(\frac{\pi}{1+2\alpha} \right) \phi(x) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \quad (45)$$

الان بالتعويض عن مركبات الإجهاد في معادلات الاتزان المذكورة في نظرية Soldatos (2009) والمناظرة لتلك المعروضة في نظرية Shimpi and Ghugal (2001) ولكن قبل ذلك يجب ايجاد محصلات القوى ومحصلات العزوم. نذكر الان معادلات الاتزان ولكن مع إهمال الطرف الايمن لأن موضع البحث في حالة استاتيكا.

$$M_{x,xx}^c = q_m \sin(p_m x) \quad (46)$$

$$M_{x,x}^a - Q_x^a = 0 \quad (47)$$

يجب علينا حساب محصلات القوى ومحصلات العزوم والتي ذكرت على الشكل التالي في نظرية (Soldatos,2009).

$$M_x^c = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz \quad (48)$$

$$M_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \phi_1(z) \, dz \quad (49)$$

$$Q_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{(xz)} \phi_1(z) \, dz \quad (50)$$

نقوم بإيجاد M_x^c وذلك بالتعويض في المعادلة (48)

$$\begin{aligned}
M_x^c &= \int_{-h/2}^{h/2} z \left[-2z \frac{d^2w}{dx^2} + 2h C_1 \frac{d\theta}{dx} + 2h C_2 \frac{d\theta}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right] dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \left[-2z^2 \frac{d^2w}{dx^2} + 2h C_1 \frac{d\theta}{dx} z + 2h C_2 \frac{d\theta}{dx} z \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right] dz \\
&= -\frac{h^3}{6} \frac{d^2w}{dx^2} + 0 + 2h C_2 \frac{d\theta}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} z \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz \quad (51)
\end{aligned}$$

تستخدم طريقة التكامل بالتجزئ بحيث نفرض أن:-

$$U = Z \longrightarrow du = dz$$

$$dv = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \longrightarrow V = \frac{-2}{\pi} h(0.5+\alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz = uv - \int v du$$

$$= \frac{-2}{\pi} h(0.5+\alpha) z \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{\pi} h(0.5+\alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz$$

بالتعويض عن التكامل في المعادلة (51)

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz = \frac{-2}{\pi} h^2(0.5+\alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right)$$

$$+ \frac{8}{\pi^2} h^2(0.5+\alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \quad (52)$$

نعوض عن المعادلة (52) في المعادلة (51)

$$M_x^c = -\frac{h^3}{6} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{-4}{\pi} h^3 C_2(0.5+\alpha) \frac{d\theta}{dx} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right)$$

$$+ \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 \frac{d\emptyset}{dx} (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \quad (53)$$

نقوم باشتقاق المعادلة (53) بالنسبة لـ x

$$M_{x,x}^c = \frac{-h^3}{6} \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{-4}{\pi} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \\ + \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \quad (54)$$

نقوم باشتقاق المعادلة (54) بالنسبة لـ x

$$M_{x,xx}^c = -\frac{h^3}{6} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \frac{d^3 \emptyset}{dx^3} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(0.5+\alpha)} \right) \\ - \frac{4}{\pi} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^3 \emptyset}{dx^3} \quad (55)$$

نقوم بإيجاد M_x^a بالتعويض في المعادلة (49)

$$M_x^a = Q_{11} \int_{-h/2}^{h/2} \left[-2z \frac{d^2 w}{dx^2} + 2h C_1 \frac{d\emptyset}{dx} + 2h C_2 \frac{d\emptyset}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right] \\ \left[h C_1 + h C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right] dz \\ M_x^a = Q_{11} \int_{-h/2}^{h/2} \left[-2z h C_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - 2z h C_2 \frac{d^2 w}{dx^2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) + 2h^2 C_1^2 \frac{d\emptyset}{dx} \right. \\ \left. + 2h^2 C_2^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) + 4h^2 C_1 C_2 \frac{d\emptyset}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \frac{d\emptyset}{dx} \right] dz \\ = Q_{11} \left[-2 \int_{-h/2}^{h/2} z h C_1 \frac{d^2 w}{dx^2} dz - 2 h C_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{d^2 w}{dx^2} z \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz \right. \\ \left. + \int_{-h/2}^{h/2} 2 h^2 C_1^2 \frac{d\emptyset}{dx} dz + 4 h^2 C_1 C_2 \frac{d\emptyset}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz \right. \\ \left. + 2 h^2 C_2^2 \frac{d\emptyset}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz \right]$$

من المعادلة (52) نجد أن:-

$$\begin{aligned}
 M_x^a = & Q_{11} [-2(0) - 2hC_2 \left[\frac{-2}{\pi} h^2(0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^2w}{dx^2} \right. \\
 & + \left. \frac{8}{\pi^2} h^2(0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^2w}{dx^2} \right] + 2h^3 C_1^2 \frac{d\theta}{dx} \\
 & + 0 + 2h^2 C_2^2 \frac{d\theta}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz] \quad (56)
 \end{aligned}$$

سوف يتم استخدام المتطابقة التالية لإيجاد التكامل (\sin^2)

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\pi \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right)$$

فبالتالي فإن تكامل \sin^2

$$\begin{aligned}
 \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \cos \left(\pi \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right) dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} 1 dz - \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \cos \left(\pi \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz \\
 &= \frac{h}{2} + \frac{-2h}{2\pi} (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \quad (57)
 \end{aligned}$$

نعوض عن المعادلة (57) في المعادلة (56)

$$\begin{aligned}
 M_x^a = & Q_{11} \left[\frac{4}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^2w}{dx^2} \right. \\
 & + \left. \frac{-16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^2w}{dx^2} + 2h^3 C_1^2 \frac{d\theta}{dx} \right]
 \end{aligned}$$

$$+ h^3 C_2^2 \frac{d\emptyset}{dx} - \frac{2h^3}{\pi} C_2^2 (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d\emptyset}{dx}] \quad (58)$$

نقوم بإيجاد الاشتقاق للمعادلة (58) بالنسبة لـ x

$$M_{x,x}^a = Q_{11} \left[\frac{4}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^3 w}{dx^3} \right. \\ \left. - \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^3 w}{dx^3} + 2h^3 C_1^2 \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} \right. \\ \left. + h^3 C_2^2 \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} - \frac{2h^3}{\pi} C_2^2 (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} \right]$$

$$M_{x,x}^a = Q_{11} \left[\frac{d^3 w}{dx^3} \left[\frac{4}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] + \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} \left[2h^3 C_1^2 \right. \right. \\ \left. \left. + h^3 C_2^2 - \frac{2}{\pi} h^3 C_2^2 (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] \right] \quad (59)$$

الآن نقوم بإيجاد Q_x^a وذلك بالتعويض عن المعادلة (42) ، (45) في المعادلة

(50)

$$Q_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} C_2 \left(\frac{\pi}{1+2\alpha} \right) \emptyset(x) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \\ \left(C_2 \frac{\pi}{(1+2\alpha)} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right) dz \\ = \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} C_2^2 \left(\frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} \right) \emptyset(x) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz$$

$$= C_2^2 C_{66} \varnothing(x) \left(\frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz \quad (60)$$

سوف يتم إيجاد التكامل باستخدام المتطابقة التالية:

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right] dz \\ &= \frac{h}{2} + \frac{1}{\pi} h (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \\ &= \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi} (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

نعوض عن المعادلة (61) في المعادلة (60) كالتالي:

$$\begin{aligned} Q_x^a &= \frac{h}{2} C_2^2 C_{66} \varnothing(x) \left(\frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} \right) \\ &+ \frac{h}{\pi} C_2^2 C_{66} \varnothing(x) \left(\frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} \right) (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \\ Q_x^a &= \frac{h}{2} C_2^2 C_{66} \varnothing(x) \left(\frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} \right) \\ &+ \frac{h\pi}{(1+2\alpha)^2} C_2^2 C_{66} \varnothing(x) (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

سيتم التعويض عن المعادلات (55) ، (59) ، (62) في معادلات الاتزان (46)،

. (47)

$$\begin{aligned}
& \frac{-h^3}{6} \frac{d^4 w}{dx^4} + \left[\frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right. \\
& \left. - \frac{4}{\pi} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] \frac{d^3 \phi}{dx^3} \\
& = q \sin (P_m x) \tag{63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3 w}{dx^3} \left[\frac{4Q_{11}}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right. \\
& \left. - \frac{16Q_{11}}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] + \frac{d^2 \phi}{dx^2} \\
& \left[2h^3 C_1^2 Q_{11} + h^3 C_2^2 Q_{11} - \frac{2}{\pi^2} h^3 C_2^2 Q_{11} (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] \\
& - \left[\frac{h}{2} C_2^2 C_{66} \left(\frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} \right) + \left(\frac{h\pi}{(1+2\alpha)^2} \right) C_2^2 C_{66} (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] \\
& \phi(x) = 0 \tag{64}
\end{aligned}$$

بجعل معامل كلاً $\frac{d^4 w}{dx^4}$ ، $\frac{d^3 w}{dx^3}$ يساوي واحد وذلك بإجراء عمليات حسابية فتصبح معادلات الاتزان على الشكل التالي بعد الترميز

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + A \frac{d^3 \phi}{dx^3} = B \sin (P_m x) \tag{65}$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} + C \frac{d^2 \phi}{dx^2} - D \phi(x) = 0 \tag{66}$$

حيث أن :-

$$A = \frac{-6}{h^3} \left[\frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right.$$

$$\frac{-4}{\pi} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right)]$$

$$B = \frac{-6}{h^3} q_m$$

$$C = \frac{[2h^3 C_1^2 + h^3 C_2^2 - \frac{2}{\pi} h^3 C_2^2 (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right)]}{[\frac{4}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) - \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2]}$$

$$D = \frac{[\frac{h}{2} C_2^2 C_{66} \left(\frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} \right) + \left(\frac{h\pi}{(1+2\alpha)^2} \right) C_2^2 C_{66} (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right)]}{Q_{11} [\frac{4}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) - \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2]}$$

6.3- الخاتمة

تم في هذا الفصل دراسة الورقة البحثية Shimpi and Ghugal (2001) والتي تحتوي على العلاقات الأساسية لنظرية تشوه القص المثلثية والتي يترتب عليها دوال الإزاحة المثلثية ومركبات الانفعال والإجهاد في نظرية القص المثلثية وكذلك معادلات الاتزان في نظرية القص المثلثية. وكذلك تم في هذا الفصل استنتاج معادلات الاتزان لصفحة من طبقة واحدة ذات ألياف مرنة وتم مقارنتها بمعادلات الاتزان المذكورة في (Shimpi and Ghugal,2001).

الفصل الرابع

دراسة لنظرية القص المثلية Shimpi and Ghugal (2001) لانحناء

صفيحة مرنة مقواة بألياف تقاوم اللثني

1.4 - مقدمة

2.4- استخدام دوال الإزاحة في نظرية القص المثلية في حالة أن الألياف مقاومة للثني.

3.4- استنتاج معادلات Navier معتمدين على معادلات الإلتزان والمتضمنة حدود لها علاقة بقابلية مقاومة الألياف للثني.

4.4- إيجاد حل منظومة معادلات تفاضلية "معادلات الإلتزان"

5.4- عرض النتائج المتحصل عليها لصفيحة مرنة ذات ألياف مقاومة للثني

6.4- الخاتمة

1.4 - مقدمة

من خلال دراسة نظرية القص المثلثية في الفصل الثالث سيتم تطبيق هذه النظرية باستخدام مجال الإزاحة (Displacement field) لصفحة مرنة ولكن في هذا الفصل في حالة أن الألياف تقاوم الشني ومعرضة لحمل استاتيكي على السطح العلوي للصفحة، وسنستخدم معادلات الإتران المعروضة في الفصل الثاني والمذكورة في نظرية (Soldatos,2009).

سوف يتم في هذا الفصل استخدام دوال الإزاحة في نظرية القص المثلثية في حالة أن الألياف مقاومة للشني وإيجاد مركبات الانفعال وما يترتب عليها من مركبات الإجهاد المتماثل ومركبات الإجهاد غير المتماثل. وكذلك سيتم فيها استنتاج معادلات Navier معتمدين على معادلات الاتزان والمتضمنة حدود لها علاقة بقابلية مقاومة الألياف للشني. وبعد ذلك سوف يتم إيجاد الحل لمنظومة معادلات تفاضلية ((معادلات الاتزان)) وإيجاد النتائج العددية لها موضحة بالجدول والشكل البياني.

2.4- استخدام دوال الإزاحة في نظرية القص المثلثية في حالة أن الألياف مقاومة للثني.

دوال الإزاحة المصاغة والمذكورة في الفصل الثالث وهي على الشكل التالي:-

$$U_1(x, z) = -z \frac{dw}{dx} = +h [C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right)] \varnothing(x) \quad (1)$$

$$U_3(x, z) = w(x) \quad (2)$$

تم ايجاد مركبات الانفعال (Strain components) في الفصل الثالث على النحو

التالي:

$$e_x^c = U_{1,1} = -z \frac{d^2w}{dx^2} + hC_1 \frac{d\varnothing}{dx} + hC_2 \frac{d\varnothing}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h(0.5+\alpha)} \right) \right) \quad (3)$$

$$K_x^c = U_{3,11} = \frac{-d^2w}{dx^2} \quad (4)$$

$$K_x^a = u_{1,1} \quad ; \quad u_1 = \varnothing(x)$$

فبالتالي

$$K_x^a = \frac{d\varnothing}{dx} \quad (5)$$

$$e_{13}^a = u_1 = \varnothing(x) \quad (6)$$

$$\varepsilon_x = -2z \frac{d^2w}{dx^2} + 2hC_1 \frac{d\phi}{dx} + 2hC_2 \frac{d\phi}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h(0.5+\alpha)}\right)\right) \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\pi}{(1+2\alpha)}\right) C_2 \phi(x) \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h(0.5+\alpha)}\right)\right) \quad (8)$$

تم ايجاد مركبات الاجهاد (Stress components) في الفصل الثالث ولكن الاجهاد العمودي غير المتماثل يكون على النحو التالي:

$$\sigma_x = Q_{11} \varepsilon_x \quad ; \quad Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}$$

وباستخدام المعادلة (7)

$$\sigma_x = Q_{11} \left[-2z \frac{d^2w}{dx^2} + 2hC_1 \frac{d\phi}{dx} + 2hC_2 \frac{d\phi}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h(0.5+\alpha)}\right)\right) \right] \quad (9)$$

نوجد الإجهاد القصي غير المتماثل على الشكل التالي:-

$$\tau_{(xz)} = Q_{55} \gamma_{xz} \quad , \quad Q_{55} = C_{66} \quad (10)$$

نعوض عن γ_{xz} من المعادلة (8)

$$\tau_{(xz)} = Q_{55} \left[\left(\frac{\pi}{(1+2\alpha)}\right) C_2 \phi(x) \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h(0.5+\alpha)}\right)\right) \right] \quad (11)$$

نعوض عن Q_{55} فبالتالي:

$$\tau_{(xz)} = C_{66} C_2 \left(\frac{\pi}{(1+2\alpha)}\right) \phi(x) \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h(0.5+\alpha)}\right)\right) \quad (12)$$

3.4 - معادلات الإلتزان (equilibrium equations)

لتحديد درجتي الحرية W ، \emptyset يجب علينا إيجاد معادلات الاتزان المذكورة في نظرية Soldatos (2009) بدلالة w ، \emptyset ومشتقاتها والتي بحلها يمكن الحصول على الحل الاستاتيكي.

$$M_{x,xx}^c + M_{x,xx}^f = q_m \sin (P_m x) \quad (13)$$

$$M_{x,x}^a - Q_x^a = 0 \quad (14)$$

تم ايجاد محصلات القوى ومحصلات العزوم في الفصل الثالث على النحو التالي وذلك باستخدام القوانين التالية المذكورة في نظرية Soldatos (2009)

$$M_x^c = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (15)$$

$$M_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \phi_1(z) dz \quad (16)$$

$$Q_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{(xz)} \phi_1'(z) dz \quad (17)$$

تم التوصل إلى الصيغة التالية وذلك بعد إجراء عملية التكامل وكذلك الاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x كما ورد في الفصل الثالث:

$$M_{x,xx}^c = -\frac{h^3}{6} \frac{d^4 w}{dx^4} + \left[\frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) - \frac{4}{\pi} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] \frac{d^3 \emptyset}{dx^3} \quad (18)$$

$$M_{x,x}^a = Q_{11} \left[\frac{d^3 w}{dx^3} \left[\frac{4}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{-16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] + \frac{d^2 \emptyset}{dx^2} [2h^3 C_1^2 + h^3 C_2^2]$$

$$\frac{-2}{\pi} h^3 C_2^2 (0.5 + \alpha) \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right)]] \quad (19)$$

$$Q_x^a = \phi(x) \left[\frac{h}{2} C_{66} C_2^2 \frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} + \frac{h\pi}{(1+2\alpha)^2} C_2^2 C_{66} (0.5 + \alpha) \sin \left(\frac{\pi}{1+2\alpha} \right) \right] \quad (20)$$

هذا الفصل مخصص في حالة أن الألياف مقاومة للثني لذلك يجب علينا حساب

M_x^f بالقانون المذكور في نظرية Soldatos (2009)

$$M_x^f = \int_{-h/2}^{h/2} m_{12} \, dz$$

حيث أن:

$$m_{12} = -d^f U_{3,11} \quad , \quad U_{3,11} = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

فبالتالي:

$$M_x^f = \int_{-h/2}^{h/2} -d^f \frac{d^2 w}{dx^2} \, dz$$

$$M_x^f = -d^f h \frac{d^2 w}{dx^2}$$

نشتق M_x^f بالنسبة لـ x

$$M_{x,x}^f = -hd^f \frac{d^3 w}{dx^3}$$

كذلك نشتق $M_{x,x}^f$ بالنسبة لـ x

$$M_{x,xx}^f = -hd^f \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (21)$$

الآن سيتم التعويض في معادلات الاتزان "الساكن" (14)، (15) بمحصلات القوى ومحصلات العزوم (18)، (19)، (20)، (21) فنتحصل على التالي:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} \left(\frac{-h^3}{6} - h d^f \right) + \left(\frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right. \\ \left. - \frac{4}{\pi} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right) \frac{d^3 \phi}{dx^3} = q_m \sin (P_m x) \quad (22)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} \left(\frac{4Q_{11}}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right. \\ \left. - \frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 Q_{11} (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right) \\ + \frac{d^2 \phi}{dx^2} \left(2h^3 C_1^2 Q_{11} + h^3 C_2^2 Q_{11} - \frac{2}{\pi} h^3 C_2^2 Q_{11} (0.5 + \alpha) \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right) \\ - \left(\frac{h}{2} C_2^2 C_{66} \frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} + \frac{h\pi}{(1+2\alpha)^2} C_2^2 C_{66} (0.5 + \alpha) \sin \left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right) \phi(x) = 0 \quad (23)$$

بجعل معامل $\frac{d^4 w}{dx^4}$ ومعامل $\frac{d^3 w}{dx^3}$ يساوي واحد وذلك بإجراء عمليات حسابية "القسمة والضرب" وللسهولة سيتم الترميز للمعاملات الموضحة لاحقاً لتأخذ معادلات الاتزان الشكل التالي:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + A \frac{d^3 \phi}{dx^3} = B \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad ; \quad P_m = \frac{\pi}{L} \quad (24)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} + C \frac{d^2 \phi}{dx^2} - E \phi(x) = 0 \quad (25)$$

حيث أن:

$$A = \left(\frac{-6}{h^3 + 6h d^f} \right) \left[\frac{16}{\pi^2} h^3 C_2 (0.5 + \alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right. \\ \left. - \frac{4}{\pi} h^3 C_2 (0.5 + \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)} \right) \right] \quad (26)$$

$$B = \frac{-6q}{h^3 + 6hdf} \quad (27)$$

$$C = \frac{2h^3 c_1^2 Q_{11} - \frac{2}{\pi} h^3 Q_{11} (0.5 + \alpha) \sin\left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)}\right) + h^3 c_2^2 Q_{11}}{\frac{4}{\pi^2} h^3 c_2 Q_{11} (0.5 + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)}\right) - \frac{16}{\pi^2} h^3 c_2 Q_{11} (0.5 + \alpha)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)}\right)} \quad (28)$$

$$E = \frac{\frac{h}{2} c_2^2 C_{66} \frac{\pi^2}{(1+2\alpha)^2} + \frac{h\pi}{(1+2\alpha)^2} c_2^2 C_{66} (0.5 + \alpha) \sin\left(\pi \frac{1}{(1+2\alpha)}\right)}{\frac{4}{\pi^2} h^3 c_2 Q_{11} (0.5 + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)}\right) - \frac{16}{\pi^2} h^3 c_2 Q_{11} (0.5 + \alpha)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+2\alpha)}\right)} \quad (29)$$

4.4 - إيجاد حل منظومة المعادلات التفاضلية " معادلات الاتزان "

لحل منظومة المعادلات التفاضلية وإيجاد درجتي الحرية w ، \emptyset وللمساعدة في إيجاد المجاهيل w ، \emptyset نستخدم الفرضية المذكورة في نظرية Shimpi and Ghugal (2001)

$$W(x) = w_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (30)$$

$$\emptyset(x) = \emptyset_1 \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (31)$$

حيث أن w_1 ، \emptyset_1 ثوابت

نلاحظ أن هذا الشكل للحل يحقق الشروط الحدية في حالة دعم الصفيحة بشكل بسيط (Simply Simply Supported) عند $x=0$ ، $x=L$ والتي وردت على الشكل التالي في الدكتوراة (Farhat,2013):

$$\sigma_x(0, z) = 0 , \sigma_x(L, z) = 0$$

$$w(0, z) = 0 , w(L, z) = 0$$

نلاحظ

الآن سوف يتم اشتقاق المعادلتين (30)، (31) على النحو التالي:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\pi}{L} w_1 \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} w_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = -\frac{\pi^3}{L^3} w_1 \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{\pi^4}{L^4} w_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\pi}{L} \phi_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} \phi_1 \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = \frac{\pi^3}{L^3} \phi_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$

الآن سيتم التعويض عن المشتقات السابقة في معادلتني الاتزان (24)، (25) وكذلك

نعوض بالمعادلة (31)

$$\frac{\pi^4}{L^4} w_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) + A \frac{\pi^3}{L^3} \phi_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) = B \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad (32)$$

$$-\frac{\pi^3}{L^3} w_1 \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) - C \frac{\pi^2}{L^2} \phi_1 \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) - E \phi_1 \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) = 0 \quad (33)$$

بقسمة طرفي المعادلة (32) على $\sin \left(\frac{\pi}{L} x \right)$ وكذلك بقسمة طرفي المعادلة (33) على $\cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) - 1$ فنحصل على التالي:

$$\frac{\pi^4}{L^4} w_1 + A \frac{\pi^3}{L^3} \phi_1 = B \quad (34)$$

$$\frac{\pi^3}{L^3} w_1 + C \frac{\pi^2}{L^2} \phi_1 + E \phi_1 = 0 \quad (35)$$

يمكن كتابة المعادلة (35) على النحو التالي بأخذ ϕ_1 عامل مشترك

$$\frac{\pi^3}{L^3} w_1 + \phi_1 \left(E + C \frac{\pi^2}{L^2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi^3}{L^3} w_1 = -\phi_1 \left(E + C \frac{\pi^2}{L^2} \right)$$

$$\phi_1 = \frac{\pi^3}{L^3} w_1 \left(\frac{L^2}{-L^2 E - C \pi^2} \right) \quad (36)$$

نعوض عن ϕ_1 في المعادلة (34)

$$\frac{\pi^4}{L^4} w_1 + A \frac{\pi^3}{L^3} \left(\frac{\pi^3}{L(-L^2 E - C \pi^2)} \right) = B$$

$$w_1 \left[\frac{\pi^4 (-L^2 E - C \pi^2) + A \pi^6}{L^4 (-L^2 E - C \pi^2)} \right] = B$$

$$w_1 \left(\frac{\pi^4 (A \pi^2 - L^2 E - C \pi^2)}{L^4 (-L^2 E - C \pi^2)} \right) = B$$

فبالتالي فإن:-

$$w_1 = \frac{B L^4 (-L^2 E - C \pi^2)}{\pi^4 (A \pi^2 - L^2 E - C \pi^2)} \quad (37)$$

نعوض عن w_1 في المعادلة (37) لإيجاد ϕ_1

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \left(\frac{\pi^3}{-L^3E - LC\pi^2} \right) \frac{BL^4}{\pi^4} \frac{(-L^2E - C\pi^2)}{(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \\
 &= \left(\frac{\pi^3}{L(-L^2E - C\pi^2)} \right) \frac{BL^4}{\pi^4} \frac{(-L^2E - C\pi^2)}{(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \\
 \phi_1 &= \frac{BL^3}{\pi(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \tag{38}
 \end{aligned}$$

نعوض عن قيمة ϕ_1, w_1 من المعادلتين (37), (38) في الفرضية (30) ، (31)

$$w_{(x)} = \frac{BL^4}{\pi^4} \frac{(-L^2E - C\pi^2)}{(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \tag{39}$$

$$\phi_{(x)} = \frac{BL^3}{\pi(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dx} &= \frac{\pi}{L} \frac{BL^4}{\pi^4} \frac{(-L^2E - C\pi^2)}{(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \\
 &= \frac{BL^3}{\pi^3} \frac{(-L^2E - C\pi^2)}{(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \tag{41}
 \end{aligned}$$

الآن يمكننا أن نعوض عن درجتى الحرية ϕ, w وكذلك نعوض $\frac{dw}{dx}$ في دوال

الإزاحة (1) ، (2)

$$U_1(x, z) = (-z) \frac{BL^3}{\pi^3} \frac{(-L^2E - \pi^2C)}{(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + hC_1 \frac{BL^3}{\pi(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + hC_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{h(0.5 + \alpha)}\right) \left(\frac{BL^3}{\pi(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right) \quad (42)$$

$$U_3(x, z) = \frac{BL^4(-L^2E - C\pi^2)}{\pi^4(A\pi^2 - L^2E - C\pi^2)} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (43)$$

بالمعادلتين (42)،(43) تم التوصل إلى الحل المطلوب فنلاحظ أن d^f معامل المرونة الذي له علاقة بمقاومة الألياف للثني موجود في المعاملات B,A فعند التعويض بقيم مختلفة في دوال الإزاحة (Displacement Functions) عن طريق هذا الحل يمكن إيجاد مركبات الانفعال الجديدة ومركبات الإجهاد الجديدة وإيجاد الشكل البياني لها وكذلك يمكن إيجاد نتائج عددية لها.

5.4 - عرض النتائج المتحصل عليها لصفحة مرنة ذات ألياف مقاومة للثني:

في هذا البند يتم عرض النتائج المتحصل عليها لصفحة ذات ألياف مقاومة للثني وهذه الصفحة معرضة لحمل عمودي على السطح العلوي لها ومدعومة ببساطة (Simply Simply Supported).

حيث L هو طول الصفحة، h يمثل سمك الصفحة، q هي دالة الحمل، w تمثل دالة الانحناء (Difflection Function)

λ تمثل بارامتر وسيط طولي له علاقة بمقاومة الألياف للثني وليس لديها وحدة بعد. وتوجد علاقة رياضية تربط بين λ ، حيث d^f يمثل عامل المرونة الذي يتعلق بمقاومة الألياف للثني والمذكورة في الورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) على الشكل التالي:

$$\lambda = \ell / h = d^f / hLC_{11} \quad (44)$$

حيث أن: C_{11} يمثل عامل المرونة خاص للمادة، ℓ يمثل بارامتر وسيط طولي له علاقة بمواصفات الداخلية للمادة فمثلا له علاقة بسمك الفايبر (الألياف)

كل النتائج العددية المبينة فيما يلي تتميز بمواصفات المادة التالية:

$$E_L / E_T = 40 , G_{LT} / E_T = 0.5 , G_{TT} / E_T = 0.2 , \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$$

T, L يشيران إلى الاتجاه الطولي والعرضي للفايبر ((الألياف)) على التوالي.

حيث تمت الحسابات الرياضية بواسطة العلاقات الفيزيائية التي تربط بين معاملات المرونة والتي وردت على الشكل التالي في نظرية Ting (1996)، وكذلك في الطرشة ووهبي (2013).

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} , \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} , \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

حيث أن:-

E معامل المرونة الطولي (Youngs modulus)

ν نسبة بواسون (Poisson ratio)

μ, λ معاملات لامبي (Lame parameters)

1.5.4 - عرض الجداول بالنتائج:

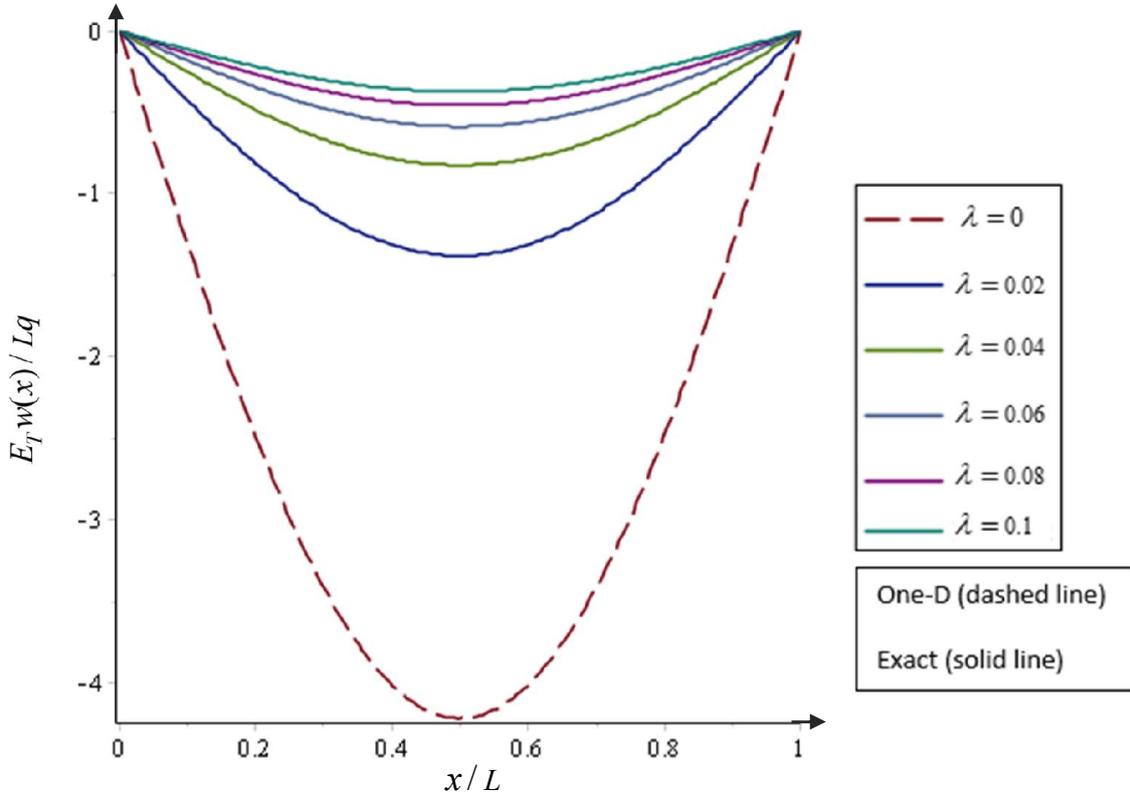
قيم λ	$E_T w \left(\frac{L}{2}, \neq \right) / Lq$	Farhat and Soldatos (2015)
$\lambda = 0$	-4.213202591	-1.151061
$\lambda = 0.02$	-1.380463094	-0.853909
$\lambda = 0.04$	-0.8254638779	-0.6802105
$\lambda = 0.06$	-0.5887598087	-0.566259
$\lambda = 0.08$	-0.4575547173	-0.4857485
$\lambda = 0.1$	-0.3741707795	-0.425839

جدول (1) يوضح توزيع دالة الانحناء (W) لصفحة مرنة ذات ألياف مقاومة للثني عندما سمك الصفحة (h / L = 0.25)

نلاحظ من الجدول السابق أنه يوضح توزيع دالة الانحناء (w) لصفحة مرنة مقوى بألياف تقاوم الثني عندما سمك الصفحة مقارنة بطولها (h / L = 0.25) فعند وضع $\lambda = 0$ هذا يعني أن الصفحة ذات ألياف مرنة وغير مقاومة للثني فواضح أن هذه النظرية يمكن أن تصلح في حالة الألياف غير المرنة أفضل من كون أن الألياف مرنة فواضح أن $\lambda = 0$ تكون أقرب في نظرية Farhat and Soldatos (2015) فبالتالي بزيادة قيم λ نلاحظ أن القيم نقصت يعني الانحناء قل وهذا يدل على زيادة مقاومة الألياف. كذلك نلاحظ عند وضع قيمة $\lambda = 0.06$ قرب القيمة في الجدول مقارنة بالقيمة المناظرة لها في نظرية Farhat and Soldatos (2015). كذلك عند وضع قيمة $\lambda = 0.08$, $\lambda = 0.1$ وهذا يدل على زيادة مقاومة الألياف للثني فنلاحظ تقارب القيم المناظرة لها في نظرية Farhat and Soldatos (2015). فبالتالي نجد أنه لمعرفة دقة التقريب تم مقارنتها بالنتائج العددية للورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) عندما سمك الصفحة مقارنة بالطول (h / L = 0.25)

وهنا وجدنا التقريب قريب جدًا بشكل طبيعي لنظيره الذي تم تقديمه تلك الورقة البحثية.

2.5.4 - عرض النتائج بالأشكال البيانية:



شكل (1) يوضح دالة الانحناء (Deflection Function) لصفحة مرنة ذات ألياف مقاومة للثني عندما سمك الصفحة ($h/L = 0.25$)

نلاحظ من الشكل البياني السابق أن الصفحة مرنة وذات ألياف مقاومة للثني ومدعومة ببساطة (Simply Simply Supported) وسمك الصفحة مقارنة بالطول هو ($h/L = 0.25$)

فعند وضع $\lambda = 0$ فهذا يعني أن الألياف داخل هذه الصفحة مرنة وغير مقاومة للثني فواضح من الشكل انحناء الصفحة مباشرة إلى الأسفل. وعند وضع قيمة $\lambda = 0.02$ نلاحظ انحناء الصفحة قلّ نوعاً ما مقارنة بالسابق وهذا يدل على مقاومتها للثني. وعند وضع قيمة $\lambda = 0.04$ نلاحظ انحناء الصفحة قلّ بكثير مقارنة بالسابق وهذا يدل على مقاومتها للانحناء. وعند وضع قيمة $\lambda = 0.06$ نلاحظ من الشكل أن انحناء الصفحة قلّ أكثر بكثير مقارنة بالسابق وهذا يدل على مقاومتها للثني

وعند وضع قيمة $\lambda = 0.08$ والذي يدل على زيادة مقاومة الألياف للثني والذي ينتج عنه معدّل انحناء أقل للصفحة فعند وضع قيمة $\lambda = 0.1$ وهذا يدل على زيادة أكثر في مقاومة الألياف للثني وينتج عنه معدّل انحناء قليل جدًا. فواضح أنه كلما زادت قيمة (λ) (زادت مقاومة الألياف للثني) نتج عنه نقص في الانحناء.

6.4- الخاتمة:

تم في هذا الفصل الربط بين الفصل الثاني والثالث وذلك باستخدام دوال الإزاحة المثلثية المذكورة في الفصل الثالث لنظرية Shimpi and Ghugal (2001) مع الأخذ في الاعتبار فرضية أن الألياف مقاومة للثني بعد ذلك تم إيجاد مركبات الانفعال ومركبات الإجهاد وحساب محصلات القوى والعزوم وتم التعويض بها باستخدام معادلات الاتزان المذكورة في نظرية Soldatos (2009) وتم استنتاج منظومة معادلات نافير التفاضلية والمتضمنة حدود لها علاقة بقابلية مقاومة الألياف للثني.

وتم التوصل فيها للحل لهذه المنظومة وإيجاد درجتي الحرية w , ϕ وحساب النتائج العددية لها وذلك في حالة أن الصفيحة مرنة ذات ألياف مقاومة للثني وسمك الصفيحة مقارنة بالطول ($h/L = 0.25$) . وتم عرض هذه النتائج موضحة بالجدول والشكل البياني ومناقشة هذه النتائج، ومقارنتها بنتائج الورقة البحثية (Farhat and Soldatos,2015).

الفصل الخامس

نظرية القص المثلثية باستخدام دوال الازاحة Ferreira et al. (2005) عندما
تقاوم الألياف الثني

1.5- مقدمة

2.5- اختيار دالة الازاحة المعروضة في نظرية Ferreira et al. (2005)
واستخدامها للوصول لمنظومة المعادلات التفاضلية التي تمثل معادلات الاتزان.

3.5- إيجاد حل منظومة معادلات تفاضلية ((معادلات الاتزان)).

4.5- عرض النتائج المتحصل عليها لصفحة مرنة متجانسة الخواص ذات ألياف
مقاومة للثني.

5.5- مناقشة النتائج.

6.5- المقارنة بين النتائج المتحصل عليها.

7.5- الخاتمة

1.5 - مقدمة

سوف يتم في هذا الفصل دراسة تأثير فرضية مقاومة الألياف للثني لصفيحة مرنة مقوى بألياف تقاوم الثني وذلك باختيار دالة الإزاحة المستخدمة في الورقة البحثية Ferreira et al. (2005) وإيجاد ما يترتب على ذلك من مركبات الانفعال ومركبات الإجهاد من خلال القوانين المذكورة في الدكتوراة Farhat (2013) وبعد ذلك سيتم إيجاد محصلات القوى ومحصلات العزوم المذكورة في نظرية Soldatos (2009) للتعويض بها في معادلات الاتزان المذكورة في نظرية Soldatos (2009) للتوصل لمنظومة معادلات تفاضلية الضابطه للمسألة.

وسوف يتم إيجاد حل منظومة المعادلات التفاضلية باختيار شكل خاص لدوال الإزاحة يحقق الشروط الحدية في حالة دعم الصفيحة بشكل بسيط (Simply Simply Supported) كما سيتضح لاحقاً وسيتم صياغة وكتابة النتائج وذلك من خلال الجداول والأشكال البيانية وذلك باستخدام لغة برمجة (Maple 18) ومقارنة النتائج المتحصل عليها ومقارنتها مع نتائج الورقة البحثية (Farhat and Soldatos, 2015).

2.5 - اختيار دالة الإزاحة (Displacement Function) للوصول لمنظومة

المعادلات التفاضلية:

تم اختيار دوال الإزاحة (Displacement Function) المستخدمه في Ferreira et al. (2005) على الشكل التالي: -

$$U_1(x, z) = -z \frac{dw}{dx} + \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi(x) \quad (1)$$

$$U_3(x, z) = w(x) \quad (2)$$

ولإيجاد مركبات الإنفعال (Strain Components) نستخدم القوانين التالية المذكورة
في الدكتوراه Farhat (2013)

$$e_x^c = U_{1,1} = \frac{\partial U_1}{\partial x} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3)$$

$$k_x^c = -U_{3,11} = -\frac{d^2 U_3}{dx^2} = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4)$$

$$k_x^a = u_{1,1} = \frac{du_1}{dx} \quad ; \quad u_1 = \phi(x) \quad ; \quad \phi_1(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (5)$$

فبالتالي: -

$$k_x^a = \frac{d\phi}{dx} \quad (6)$$

$$e_{x\bar{z}}^a = u_1 = \phi(x) \quad (7)$$

حيث أن: -

$$\varepsilon_x = e_x^c + z k_x^c + \phi_1(z) k_x^a \quad (8)$$

$$\gamma_{x\bar{z}} = \phi_1'(z) e_{x\bar{z}}^a \quad (9)$$

بالتعويض بالقوانين السابقة (3)،(4)،(5)،(6) في المعادلة (8) والتعويض بالمعادلة
(7) في المعادلة (9)

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

$$\varepsilon_x = 2 \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \quad (10)$$

$$\gamma_{x\bar{z}} = \frac{\pi}{h} \phi(x) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (11)$$

وكذلك يتم إيجاد مركبات الإجهاد (Stress components) باستخدام القوانين التالية المذكورة في الدكتوراه Farhat (2013)

$$\sigma_x = Q_{11} \varepsilon_x \quad (12)$$

$$\tau_{(x-z)} = Q_{55} \gamma_{x-z} \quad (13)$$

فبالتالي نعوض عن المعادلة (10) في المعادلة (12) وعن المعادلة (11) في المعادلة (13)

$$\sigma_x = 2Q_{11} \left(-z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \quad (14)$$

حيث أن:-

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \quad (15)$$

$$\tau_{(x-z)} = Q_{55} \left(\frac{\pi}{h} \phi(x) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right)$$

سنعوض عن $Q_{55} = C_{66}$

$$\tau_{(x-z)} = C_{66} \frac{\pi}{h} \phi(x) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (16)$$

يجب حساب محصلات القوى ومحصلات العزوم والتي ذكرت على الشكل التالي في نظرية (Soldatos,2009).

$$M_x^c = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (17)$$

$$M_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \phi_1(z) dz \quad (18)$$

$$Q_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{(x-z)} \phi_1'(z) dz \quad (19)$$

$$M_x^f = \int_{-h/2}^{h/2} m_{12} dz \quad (20)$$

حيث أن: -

$$m_{12} = -d^f U_{3,11} \quad ; \quad U_{3,11} = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (21)$$

نقوم بإيجاد M_x^c وذلك بالتعويض في المعادلة (17)

$$M_x^c = \int_{-h/2}^{h/2} 2Q_{11} \left(-z^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} z \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) dz$$

$$M_x^c = 2Q_{11} \int_{-h/2}^{h/2} -z^2 \frac{d^2 w}{dx^2} dz + 2Q_{11} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{d\phi}{dx} z \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \quad (22)$$

ولحساب التكامل نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ

$$\text{Let } u = z \Rightarrow du = dz$$

$$dv = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \Rightarrow v = -\frac{h}{\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz = -z \frac{h}{\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \Big|_{-h/2}^{h/2} + \frac{h}{\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz$$

$$= \frac{h^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{2h^2}{\pi^2} \quad (23)$$

نعوض عن المعادلة (23) في المعادلة (22)

$$M_x^c = 2Q_{11} \left(\frac{-h^3}{12} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + 2Q_{11} \frac{d\phi}{dx} \left(\frac{2h^2}{\pi^2} \right)$$

$$M_x^c = \frac{-h^3}{6} Q_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d\phi}{dx} \quad (24)$$

نقوم بإيجاد M_x^a وذلك بالتعويض في المعادلة (18) وحساب التكامل

$$\begin{aligned}
M_x^a &= \int_{-h/2}^{h/2} 2Q_{11} \left(-z \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) dz \\
M_x^a &= -2Q_{11} \int_{-h/2}^{h/2} z \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{d^2 w}{dx^2} dz + 2Q_{11} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{d\phi}{dx} \sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \\
M_x^a &= -2Q_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} \int_{-h/2}^{h/2} z \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz + 2Q_{11} \frac{d\phi}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \quad (25)
\end{aligned}$$

لحساب تكامل $\sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right)$ نستخدم المتطابقة التالية: -

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right]$$

فبالتالي: -

$$\begin{aligned}
\int_{-h/2}^{h/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) dz &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right] dz \\
\int_{-h/2}^{h/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) dz &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right) dz \\
\int_{-h/2}^{h/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) dz &= \frac{h}{2} \quad (26)
\end{aligned}$$

نقوم بالتعويض عن المعادلة (23)، (26) في المعادلة (25)

$$\begin{aligned}
M_x^a &= -2Q_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{2h^2}{\pi^2} \right) + 2Q_{11} \frac{d\phi}{dx} \left(\frac{h}{2} \right) \\
M_x^a &= -\frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} + hQ_{11} \frac{d\phi}{dx} \quad (27)
\end{aligned}$$

نقوم بإيجاد Q_x^a وذلك بالتعويض في المعادلة (19) وحساب التكامل:

$$Q_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} \frac{\pi}{h} \phi(x) \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \left[\frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right] dz$$

$$Q_x^a = C_{66} \frac{\pi^2}{h^2} \phi(x) \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) dz \quad (28)$$

ولحساب تكامل نستخدم المتطابقة التالية: -

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right]$$

فبالتالي: -

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) dz &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} dz + \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right) dz \\ &= \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (29)$$

نعوض عن المعادلة (29) في المعادلة (28)

$$Q_x^a = C_{66} \frac{\pi^2}{h^2} \phi(x) \left(\frac{h}{2}\right)$$

$$Q_x^a = \frac{\pi^2}{2h} C_{66} \phi(x) \quad (30)$$

نقوم بإيجاد M_x^f بالتعويض في المعادلة (20) وحساب التكامل

$$M_x^f = \int_{-h/2}^{h/2} -d^f \frac{d^2 w}{dx^2} dz = -d^f h \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (31)$$

سوف يتم استخدام معادلتني الاتزان ((الساكن)) المذكورة على النحو التالي في نظرية (Soldatos,2009).

$$M_{x,xx}^c + M_{x,xx}^f = q_m \sin(p_x x) \quad ; \quad q_m = 1 \quad , \quad p_m = \frac{\pi}{L} \quad (32)$$

$$M_{x,x}^a - Q_x^a = 0 \quad (33)$$

ولإيجاد $M_{x,x}^c$ نقوم باشتقاق المعادلة (24) بالنسبة لـ x

$$M_{x,x}^c = -\frac{h^3}{6} Q_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (34)$$

ولإيجاد $M_{x,xx}^c$ نقوم باشتقاق المعادلة (34) بالنسبة لـ x

$$M_{x,xx}^c = -\frac{h^3}{6} Q_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d^3 \phi}{dx^3} \quad (35)$$

لإيجاد $M_{x,x}^f$ نشتق المعادلة (31) بالنسبة لـ x

$$M_{x,x}^f = -d^f h \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (36)$$

لإيجاد $M_{x,xx}^f$ نشتق المعادلة (36) بالنسبة لـ x

$$M_{x,xx}^f = -h d^f \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (37)$$

لإيجاد $M_{x,x}^a$ نشتق المعادلة (27) بالنسبة لـ x

$$M_{x,x}^a = \frac{-4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + h Q_{11} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (38)$$

الآن نعوض عن المعادلات (35)،(37)،(38)،(30) في معادلات الاتزان ((الساكن))

(32)،(33)

$$\frac{-h^3}{6} Q_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d^3 \phi}{dx^3} - h d^f \frac{d^4 w}{dx^4} = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (39)$$

$$-\frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + h Q_{11} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\pi^2}{2h} C_{66} \phi(x) = 0 \quad (40)$$

بأخذ $\frac{d^4 w}{dx^4}$ عامل مشترك في المعادلة (39)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} \left(\frac{-h^3}{6} Q_{11} - h d^f \right) + \frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \frac{d^3 \phi}{dx^3} = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (41)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} \left(-\frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \right) + \frac{d^2 \phi}{dx^2} (hQ_{11}) - \phi(x) \left(C_{66} \frac{\pi^2}{2h} \right) = 0 \quad (42)$$

بجعل معامل $\frac{d^3 w}{dx^3}$ ، $\frac{d^4 w}{dx^4}$ يساوي واحد وذلك بإجراء عمليات حسابية ((القسمة والضرب)) على المعادلتين (41)،(42) وسيتم الترميز للسهولة فتصبح معادلتني الاتزان على الشكل التالي:-

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + A \frac{d^3 \phi}{dx^3} = B \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad (43)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} + C \frac{d^2 \phi}{dx^2} - D \phi(x) = 0 \quad (44)$$

حيث أن:-

$$A = \left(\frac{6}{-h^3 Q_{11} - 6hd^f} \right) \left[\frac{4h^2}{\pi^2} Q_{11} \right] = \frac{24hQ_{11}}{-\pi^2 (h^2 Q_{11} - 6d^f)} \quad ; \quad Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}$$

$$B = \left[\frac{6}{-h^3 Q_{11} - 6hd^f} \right]$$

$$C = \left[\frac{-\pi^2}{4h^2 Q_{11}} \right] [hQ_{11}] = \frac{-\pi^2}{4h}$$

$$D = \left[\frac{-\pi^2}{4h^2 Q_{11}} \right] \left[C_{66} \frac{\pi^2}{2h} \right] = \left[\frac{-C_{66} \pi^4}{8h^3 Q_{11}} \right]$$

3.5- إيجاد حل منظومة المعادلات التفاضلية (معادلات الاتزان) :

لحل منظومة المعادلات التفاضلية وإيجاد درجتا الحرية w و ϕ وللمساعدة في إيجاد w و ϕ نستخدم الفرضية التالية المذكورة في نظرية Shimpi and Ghugal (2001)

$$w(x) = w_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (45)$$

$$\phi(x) = \phi_2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (46)$$

حيث w_1 و ϕ_2 ثابتين

نلاحظ أن هذا الشكل للحل يحقق الشروط الحدية في حالة دعم الصفيحة بشكل بسيط (Simply Simply Supported) عند $x=0$, $x=L$ والتي وردت على الشكل التالي في الدكتوراه (Farhat,2013).

$$\sigma_x(0, z) = 0 , \sigma_x(L, z) = 0$$

$$w(0, z) = 0 , w(L, z) = 0$$

سيتم اشتقاق المعادلتين (45)،(46) على النحو التالي:-

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\pi}{L} w_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} w_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = -\frac{\pi^3}{L^3} w_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{\pi^4}{L^4} w_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{-\pi}{L} \phi_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{-\pi^2}{L^2} \phi_2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = \frac{\pi^3}{L^3} \phi_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

سيتم التعويض عن المشتقات السابقة في معادلتني الاتزان (43)،(44)

$$\frac{\pi^4}{L^4} w_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + A \frac{\pi^3}{L^3} \phi_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = B \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (47)$$

$$-\frac{\pi^3}{L^3} w_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) - C \frac{\pi^2}{L^2} \phi_2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) - D \phi_2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) = 0 \quad (48)$$

بقسمة جميع أطراف المعادلة (47) على $\left[\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]$ وكذلك بقسمة جميع أطراف

المعادلة (48) على $\left[-\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]$ فنحصل على التالي: -

$$\frac{\pi^4}{L^4} w_1 + A \frac{\pi^3}{L^3} \phi_2 = B \quad (49)$$

$$\frac{\pi^3}{L^3} w_1 + C \frac{\pi^2}{L^2} \phi_2 + D \phi_2 = 0 \quad (50)$$

يمكن كتابة المعادلة (50) على الشكل التالي بأخذ ϕ_2 عامل مشترك

$$\frac{\pi^3}{L^3} w_1 + \phi_2 \left[D + C \frac{\pi^2}{L^2} \right] = 0$$

إذن:-

$$\phi_2 \left[D + C \frac{\pi^2}{L^2} \right] = -\frac{\pi^3}{L^3} w_1$$

$$\phi_2 \left[\frac{DL^2 + C\pi^2}{L^2} \right] = -\frac{\pi^3}{L^3} w_1$$

فبالتالي:-

$$\phi_2 = -\frac{\pi^3}{L^3} w_1 \left[\frac{L^2}{DL^2 + C\pi^2} \right]$$

$$\phi_2 = -\frac{\pi^3 w_1}{L(DL^2 + C\pi^2)} \quad (51)$$

نعوض عن ϕ_2 في المعادلة (49)

$$\frac{\pi^4}{L^4} w_1 - A \frac{\pi^3}{L^3} \left[\frac{\pi^3 w_1}{L(DL^2 + C\pi^2)} \right] = B$$

$$w_1 \left[\frac{\pi^4 (DL^2 + C\pi^2) - A\pi^6}{L^4 (DL^2 + C\pi^2)} \right] = B$$

فبالتالي:-

$$w_1 = \frac{BL^4 (DL^2 + C\pi^2)}{\pi^4 (DL^2 + C\pi^2) - A\pi^6} \quad (52)$$

نعوض عن قيمة w_1 في المعادلة (51)

$$\phi_2 = \left(\frac{-\pi^3}{L(DL^2 + C\pi^2)} \right) \left(\frac{BL^4 (DL^2 + C\pi^2)}{\pi^4 (DL^2 + C\pi^2) - A\pi^6} \right)$$

$$\phi_2 = \left(\frac{-\pi^3}{L} \right) \left(\frac{BL^4}{\pi^4 (DL^2 + C\pi^2) - A\pi^6} \right)$$

$$\phi_2 = -\frac{L^3}{\pi} \left(\frac{B}{DL^2 + C\pi^2 - A\pi^2} \right) \quad (53)$$

نعوض عن ϕ_2 , w_1 من المعادلتين (52)،(53) في الفرضية (45)،(46)

$$w(x) = \frac{BL^4 (DL^2 + C\pi^2)}{\pi^4 (DL^2 + C\pi^2) - A\pi^6} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (54)$$

$$\phi(x) = -\frac{L^3}{\pi} \left(\frac{B}{DL^2 + C\pi^2 - A\pi^2} \right) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (55)$$

لكي نعوض في دوال الإزاحة نحتاج $\frac{dw}{dx}$ أي نقوم باشتقاق المعادلة (54) ثم نعوض

عن w , ϕ , في دوال الإزاحة (1)،(2)

$$\frac{dw}{dx} = B \frac{L^3}{\pi^3} \frac{(DL^2 + C\pi^2)}{(DL^2 + C\pi^2 - A\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (56)$$

الآن يمكن أن نعوض عن درجتا الحرية w , ϕ وكذلك نعوض عن $\frac{dw}{dx}$ في دوال الإزاحة (1)،(2) وذلك للوصول للحل المطلوب.

$$U_1(x, z) = -z B \frac{L^3}{\pi^3} \frac{(DL^2 + C\pi^2)}{(DL^2 + C\pi^2 - A\pi^2)} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \left[\frac{-L^3}{\pi} \frac{B}{(DL^2 + C\pi^2 - A\pi^2)} \right] \quad (57)$$

$$U_3(x, z) = \frac{BL^4}{\pi^4} \frac{(DL^2 + C\pi^2)}{(DL^2 + C\pi^2 - A\pi^2)} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (58)$$

نلاحظ أن d^f معامل المرونة الذي له علاقة بمقاومة الألياف للثني موجود في المعاملات B,A وينتج عنه اختلاف عند التعويض بقيم مختلفة في دوال الإزاحة (Displacement Functions) وعن طريق هذا الحل (57)،(58) يمكن إيجاد مركبات الانفعال ومركبات الإجهاد الجديدة وإيجاد شكل بياني لها وكذلك إيجاد نتائج عددية لها.

4.5 - عرض النتائج المتحصل عليها لصفحة مرنة متجانسة الخواص ذات ألياف مقاومة للثني:

سوف يتم في هذا البند عرض النتائج المتحصل عليها عند انحناء صفحة مرنة مدعومه ببساطه (Simply Simply supported) ذات ألياف مقاومة للثني ومعرضة لحمل عمودي على السطح العلوي للصفحة، $q(x)$ تمثل دالة الحمل.

ومواصفات المادة المستخدمة هي نفس المواصفات للمادة في البند (5.4).

حيث h تمثل سمك الصفحة، L طول الصفحة، λ تمثل بارامتر وسيط طولي له علاقة بمقاومة الألياف للثني وليس لديها وحدة بعد. وتوجد علاقة رياضية تربط بين λ ، d^f حيث d^f يمثل عامل المرونة الذي يتعلق بمقاومة الألياف للثني والمذكور على الشكل التالي في الورقة البحثية (Farhat and Soldatos,2015).

$$\lambda = \ell / h = d^f / hLC_{11} \quad (59)$$

حيث أن: C_{11} يمثل عامل المرونة خاص للمادة، ℓ يمثل بارامتر وسيط طولي له علاقة بالمواصفات الداخلية للمادة فمثلا له علاقة بسمك الألياف، w هي دالة الانحناء (Diflection Function).

حيث أنه تمت الحسابات الرياضية من خلال العلاقات الفيزيائية التي تربط بين معاملات المرونة والتي ذكرت في الفصل السابق.

1.4.5 - عرض النتائج بالجدول:

قيم λ	$E_T w \left(\frac{L}{2}, \neq \right) / Lq$	Farhat and Soldatos (2015)
$\lambda = 0$	-0.946763	-1.151061
$\lambda = 0.02$	-0.6479724267	-0.853909
$\lambda = 0.04$	-0.4925329544	-0.6802105
$\lambda = 0.06$	-0.3972405370	-0.566259
$\lambda = 0.08$	-0.3328438407	-0.4857485
$\lambda = 0.1$	-0.286413348	-0.425839

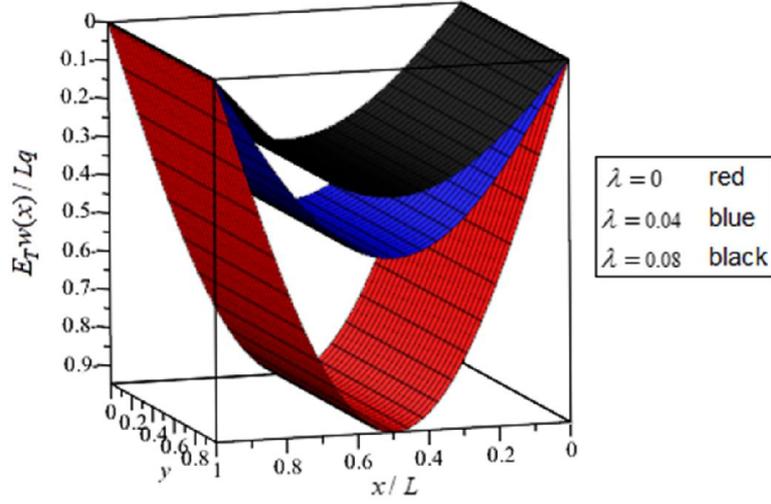
جدول (1) يوضح توزيع دالة الانحناء (w) لصفحة متجانسة الخواص عندما سمك الصفحة ($h/L = 0.25$)

نلاحظ من الجدول (1) توزيع دالة الانحناء (w) عندما سمك الصفحة ($h/L = 0.25$) وأن القيم المختلفة لـ λ تكون في نقاط متسلسلة ومتباعدة بشكل متساوٍ عبر سمك الصفحة المتجانسة.

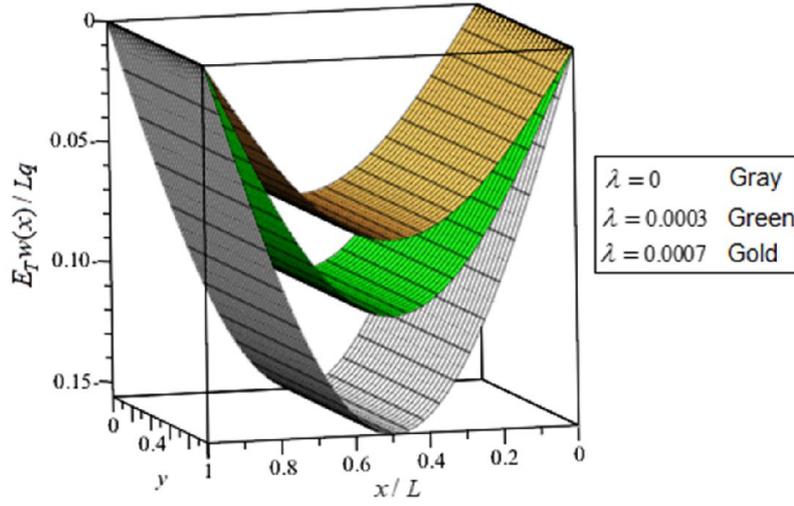
نلاحظ أن التوزيع الذي تم الحصول عليه في حالة $\lambda = 0$ وقريب بشكل طبيعي لنظيره الذي تم الحصول عليه وتقديمه في الورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) وكذلك في نظرية Pagano (1969) وبالتالي نلاحظ من الجدول أنه مع زيادة قيم λ يصاحبه تناقص في قيم دالة الانحناء للصفحة w وتقل القيم وهذا يدل على أنه كلما زادت قيم λ قلت قيم دالة الانحناء w وهذا دليل على مقاومة الألياف للثني.

حيث أنه لمعرفة دقة التقريب تم مقارنتها بالنتائج العددية للحل الفعلي للورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) في حالة سمك الصفحة ($h/L = 0.25$) وذلك لقيم مختلفه للبارمتر λ المعرفة في المعادلة (59) بالبند (4.5). وهنا وجدنا التقريب مرضي ومقنع في حالة الصفحة السمكة فبالنظر التالي سيكون كذلك الحال في حالة الصفحة الرقيقة ((الرفيعة)).

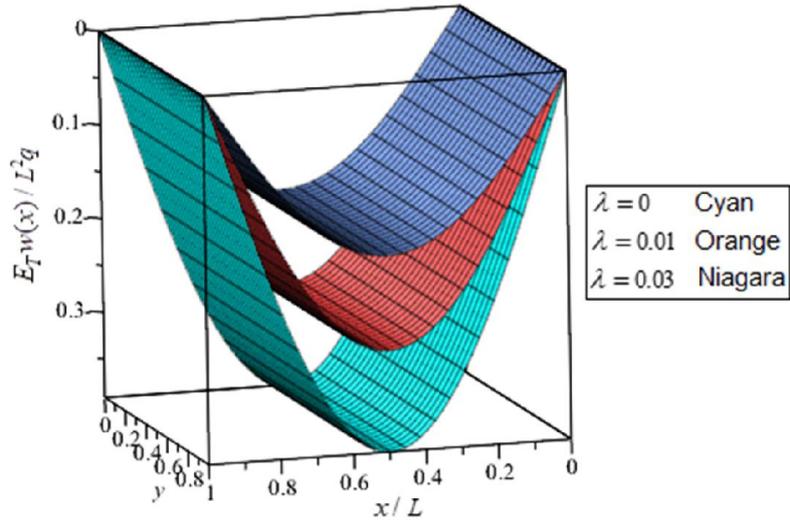
2.4.5 - عرض النتائج بالأشكال البيانية:



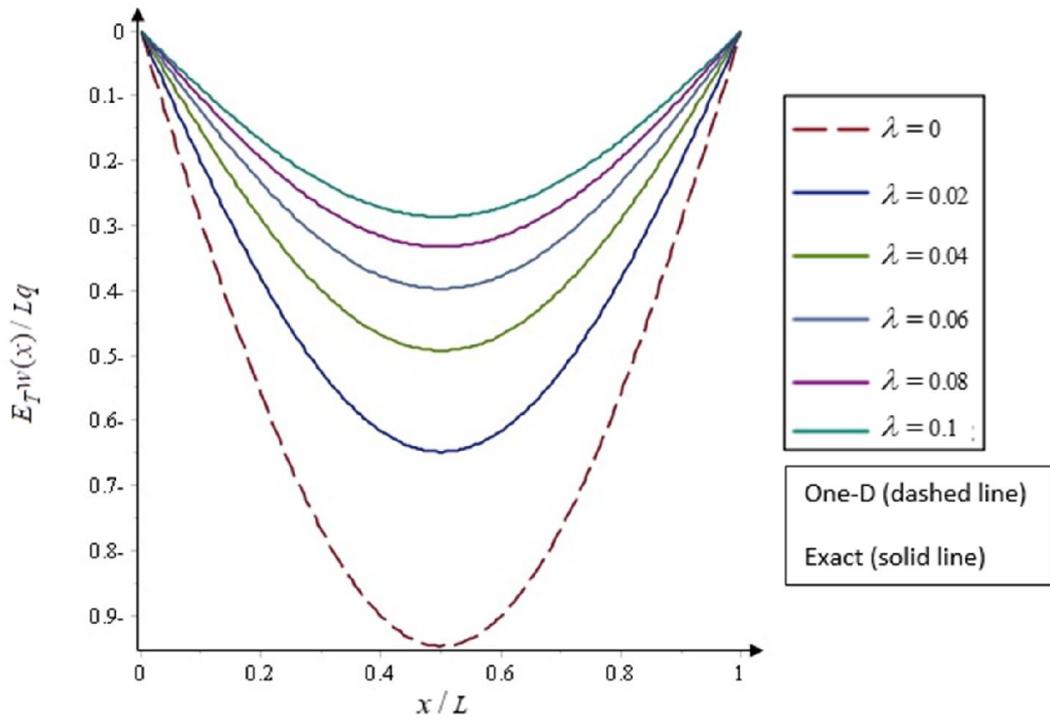
شكل (1) يوضح مركبة الحل التي تمثل انحناء سطح الصفيحة لقيم مختلفة للبارامتر λ عندما $(h / L = 0.25)$



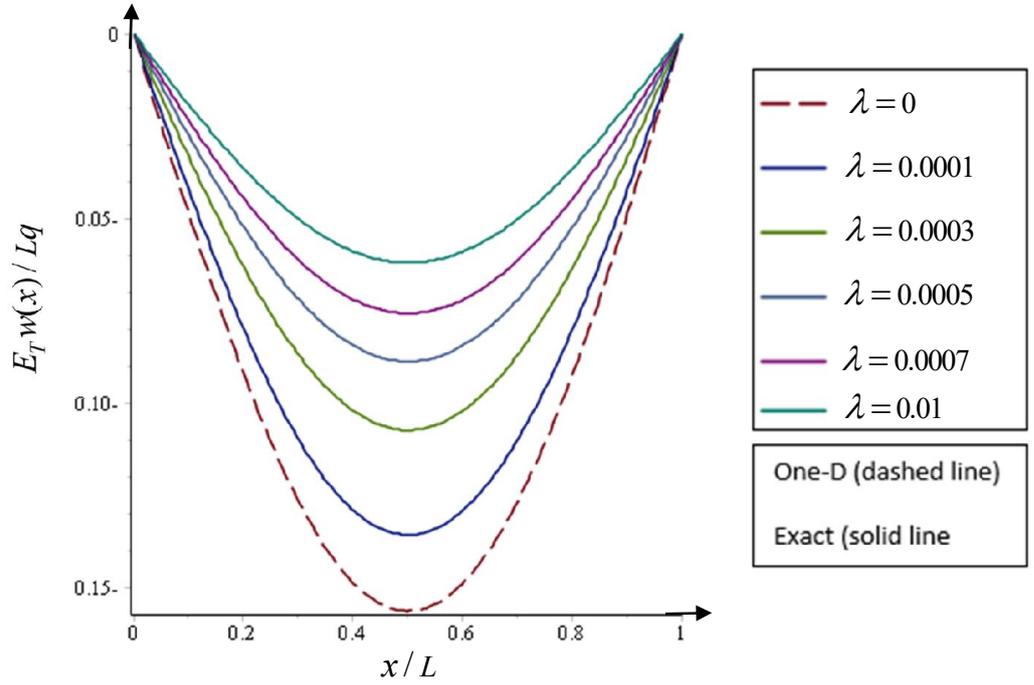
شكل (2) يوضح مركبة الحل التي تمثل انحناء سطح الصفيحة لقيم مختلفة للبارامتر λ عندما $(h / L = 0.01)$



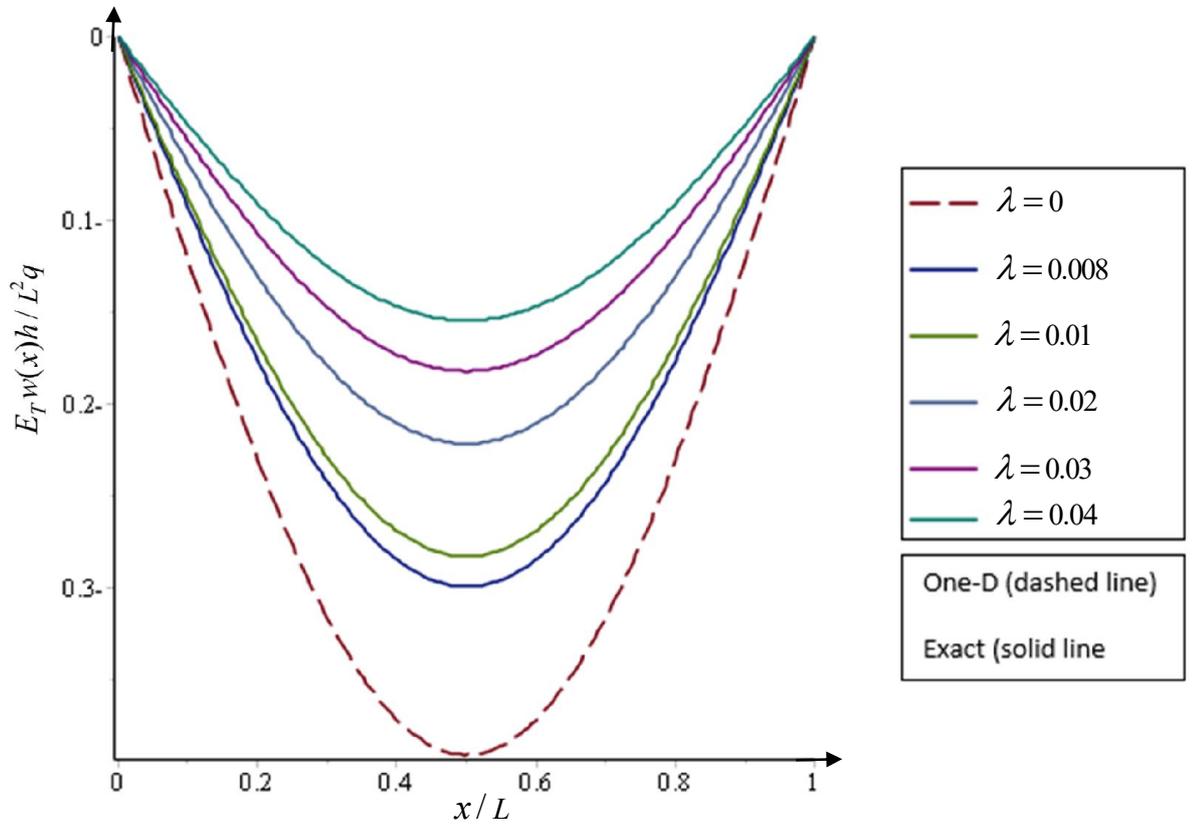
شكل (3) يوضح مركبة الحل التي تمثل انحناء سطح الصفيحة لقيم مختلفة للبارامتر λ عندما $(h / L = 0.1)$



شكل (4) يوضح دالة الانحناء (Deflection Function) لصفيحة متجانسة الخواص ذات سمك $(h / L = 0.25)$



شكل (5) يوضح دالة الانحناء (Deflection Function) عندما السمك ($h / L = 0.01$)



شكل (6) يوضح توزيع دالة الانحناء (Deflection Function) لصفحة متجانسة الخواص عندما سمك ($h / L = 0.1$)

5.5 - مناقشة النتائج:

واضح من الأشكال السابقة (1)،(2)،(3) مركبة الحل المتمثلة في انحناء سطح الصفيحة لقيم مختلفة لمعامل مقاومة الألياف للثني (λ) عندما سمك الصفيحة مقارنة بطولها ($h/L=0.1, h/L=0.01, h/L=0.25$) على التوالي ونلاحظ أن الانحناء يتناقص تدريجياً مع زيادة قيم λ

نلاحظ من الشكل البياني (4) أن الصفيحة متجانسة الخواص ومدعومة ببساطة (Simply Simply Supported) وأن سمك الصفيحة مقارنة بالطول ($h/L=0.25$)

فعند وضع $\lambda=0$ هذا يعني أن الألياف داخل الصفيحة مرنة وغير مقاومة للثني فواضح من الشكل انحناء الصفيحة مباشرة إلى الأسفل. وعند وضع قيمة $\lambda=0.02$ نلاحظ انحناء الصفيحة أقل مقارنة بالسابق وهذا يدل على مقاومتها للثني. وعند وضع قيمة $\lambda=0.04$ نلاحظ انحناء الصفيحة قلّ بكثير مقارنة بالسابق وهذا يدل على مقاومتها للانحناء الناتج عن أثر زيادة مقاومة الألياف للانحناء. وعند وضع قيمة $\lambda=0.06$ نلاحظ من الشكل أن انحناء الصفيحة قلّ أكثر بكثير مقارنة بالسابق وهذا يدل على أثر ازدياد مقاومة الألياف للثني. وعند وضع قيمة $\lambda=0.08$ والذي يدل على زيادة مقاومة الألياف للثني والذي ينتج عنه معدّل انحناء أقل للصفيحة. فعند وضع قيمة $\lambda=0.1$ وهذا يدل على زيادة أكثر في مقاومة الألياف للثني وينتج عنه معدّل انحناء قليل جداً للصفيحة. فواضح أنه كلما زادت قيمة (λ) (زادت مقاومة الألياف للثني) نتج عنه نقص في انحناء الصفيحة.

نلاحظ من الشكل البياني (5) أن الصفيحة مدعومة ببساطة (Simply Simply Supported) وأن سمك الصفيحة مقارنة بالطول

($h/L=0.01$) في هذه الحالة تم تصغير قيم البارامتر λ أي تقليل قيمة مقاومة الألياف للثني تكون أصغر نوعاً ما وذلك للحفاظ على مادة الصفيحة من التشقق وانكسار وخسارة الصفيحة.

فعند وضع $\lambda=0$ هذا يعني أن الألياف داخل الصفيحة مرنة وغير مقاومة للثني فواضح من الشكل انحناء الصفيحة مباشرة إلى الأسفل. وعند وضع $\lambda=0.0001$ نلاحظ أن انحناء الصفيحة قل مقارنة بالسابق وهذا يدل على مقاومتها للثني. وعند وضع $\lambda=0.0003$ نلاحظ أن انحناء الصفيحة قلّ بكثير مقارنة بالحالتين السابقتين وهذا يدل على مقاومتها للانحناء. فعند وضع $\lambda=0.0005$ والذي يدل على زيادة مقاومة الألياف للثني والذي ينتج عنه معدّل انحناء أقل للصفيحة. فعند وضع $\lambda=0.0007$ والذي يدل على زيادة أكثر لمقاومة الألياف للثني ينتج عنه انحناء أقل بكثير من السابق. وعندما وضعت قيمة $\lambda=0.001$ والذي يدل على زيادة مقاومة الألياف للثني نتج عنه نقص في معدّل انحناء الصفيحة. فهذا يعني أنه كلما زادت قيمة (λ) (زادت مقاومة الألياف للثني) ينتج عنه نقص في معدّل انحناء الصفيحة.

نلاحظ من الشكل البياني (6) أن الصفيحة مدعومة ببساطة (Simply Simply Supported) وأن سمك الصفيحة مقارنة بالطول ($h/L=0.1$)

فعند وضع $\lambda=0$ هذا يعني أن الألياف داخل الصفيحة مرنة وغير مقاومة للثني فواضح من الشكل انحناء الصفيحة إلى الأسفل. وعند وضع $\lambda=0.008$ فنلاحظ أن انحناء الصفيحة قلّ بكثير مقارنة بالسابق وهذا يدل على مقاومة الألياف للثني. وعند وضع $\lambda=0.01$ نلاحظ أن انحناء الصفيحة قلّ أكثر من السابق فهذا دليل على مقاومتها للانحناء. وعند وضع $\lambda=0.02$ نلاحظ أن انحناء الصفيحة قلّ أكثر بكثير

مقارنة بالحالات السابقة فهذا يدل على زيادة مقاومة الألياف للثني. وعند وضع $\lambda = 0.03$ والذي يدل على زيادة مقاومة الألياف للثني والذي ينتج عنه معدّل انحناء أقل للصفحة. فعند وضع $\lambda = 0.04$ والذي يدل على زيادة أكبر في مقاومة الألياف للثني ينتج عنه معدّل انحناء أقل بكثير للصفحة. فواضح أنه كلما زادت مقاومة الألياف للثني نتج عنه نقص في معدّل انحناء الصفحة.

6.5-المقارنة بين النتائج المتحصل عليها:

تم في هذا البند المقارنة بين النتائج المتحصل عليها في حالة أن سمك الصفحة مقارنة الى طولها ($h/L=0.25$) وذلك من خلال النتائج المتحصل عليها في الفصل السابق والنتائج المتحصل عليها في هذا الفصل ومقارنتها مع الحل الفعلي (Exact Solution) المتحصل عليه في الورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) عند قيم مختلفة للبارامتر λ المعرفة في المعادلة (59). وذلك من خلال عرضها في الجدول التالي:

قيم λ	النتائج المتحصل عليها في الفصل الرابع في حالة ($h/L=0.25$)	النتائج المتحصل عليها في هذا الفصل في حالة ($h/L=0.25$)	Farhat and Soldatos (2015)
$\lambda = 0$	-4.213202591	-0.946763	-1.151061
$\lambda = 0.02$	-1.380463094	-0.6479724267	-0.853909
$\lambda = 0.04$	-0.825463094	-0.4925329544	-0.6802105
$\lambda = 0.06$	-0.5887598087	-0.3972405370	-0.566259
$\lambda = 0.08$	-0.4575547173	-0.33284384407	-0.4857485
$\lambda = 0.1$	-0.3741707795	-0.286413348	-0.425839

جدول (2) يوضح المقارنة بين النتائج المتحصل عليها في حالة سمك الصفحة ($h/L=0.25$)

الجدول (2) يوضح المقارنة بين النتائج المتحصل عليها عندما سمك الصفحة مقارنة بطولها هي ($h/L=0.25$).

عند قيمة $\lambda = 0$ (هذا يعني ان الألياف داخل الصفيحة مرنة ((غير مقاومة للثني)).

فلاحظ مدى قرب النتائج في هذا الفصل وذلك بعد اختيار داله الإزاحة التي تكون

فيها $\phi_1(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$ فلاحظ قربها للقيمة المناظرة لها في نظرية

Farhat and Soldatos (2015) ويجدر بنا الإشارة هنا إلى أن القيمة الفعلية

المتحصل عليها في ورقة Farhat and Soldatos (2015) هي نفس القيمة

المتحصل عليها باستخدام حل Pagano (1969) والتي هي نقطة قياس لدقة ومعايرة

النظريات التقريبية فلاحظ قربها أكثر بكثير جدا من القيمة المناظرة للنتائج المتحصل

عليها في الفصل الرابع وذلك بعد اختيار داله الإزاحة مع داله التشكيل

(The Shape Function) على الشكل التالي $\phi_1(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{2 h(0.5 + \sigma)}\right)$.

وعند قيمه $\lambda = 0.02$ ، $\lambda = 0.04$ (هذا يعني ان الألياف داخل الصفيحة مقاومة

للانحناء) فلاحظ مدى قرب ودقه النتائج المتحصل عليها عندما $\phi_1(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

أفضل وأقرب جدا من النتائج المناظرة لها في الفصل الرابع . وكذلك في حالة القيم

$\lambda = 0.06$ ، $\lambda = 0.08$ ، $\lambda = 0.1$ فلاحظ أن القيم المناظرة في الفصل الرابع أقرب

نوعا ما للنتائج المناظرة لها في نظرية (Farhat and Soldatos,2015) .

وكذلك القيم المناظرة لها في حالة أن (The Shape Function)

$\phi_1(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$ فهي قريبه أيضا للحل الفعلي (Exact Function) المناظر لها

في نظرية (Farhat and Soldatos,2015) .

-فلاحظ انه عند تبسيط داله الإزاحة مع داله التشكيل (The Shape Function)

فالنتائج كانت أقرب وأدق ومرضية جداً لذلك في هذا الفصل تم إيجاد نتائج أخرى

وذلك في حالة أن سمك الصفيحة مقارنة بطولها هو ($h/L = 0.1$, $h/L = 0.01$).

7.5 - الخاتمة:

تم في هذا الفصل دراسة تأثير فرضية مقاومة الألياف للثني لصفحة مرنة متجانسة الخواص ذات ألياف مقاومة للثني

وذلك باختيار دالة الإزاحة مع دالة التشكيل (The Shape Function) عندما $\phi_1(z) = \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$ الواردة في نظرية Ferreira et al. (2005) وإيجاد ما يترتب على ذلك مركبات انفعال ومركبات الإجهاد وصولاً لمنظومة معادلات تفاضلية ((معادلات الاتزان)). وتم في هذا الفصل إيجاد الحل لمنظومة المعادلات التفاضلية. وتم الحصول على النتائج وتمثيلها بجدوال وأشكال بيانية توضّح ذلك باستخدام لغة برمجة (Maple 18). ومناقشة هذه النتائج المتحصل عليها وذلك لمعرفة مدى دقة التقريب في حالة أن سمك الصفحة ($h/L = 0.25$) ومقارنة نتائجها مع نتائج الورقة البحثية Farhat and Soldatos (2015) وتم كذلك مناقشة الأشكال البيانية.

وكذلك تمت المقارنة بين النتائج المتحصل عليها في هذا الفصل والفصل السابق واتضح أن الأبسط تركيبية لدالة الإزاحة مع دالة التشكيل (The Shape Function) كانت الأفضل والأقرب للنتائج لذلك تم إيجاد نتائج أخرى لها مع تغيير سمك الفايبر ((الألياف)) .

الاستنتاج

قدمت هذه الرسالة دراسة تحليلية لعدة أوراق بحثية تتضمن فرضيات مختلفة لدوال الازاحة وما يترتب عليها من مركبات انفعال ومركبات إجهاد وكذلك معادلات الاتزان والشروط الحدية لها.

وكذلك تم في هذه الرسالة دراسة تحليلية لإنحناء الصفيحة من طبقة واحدة تحت تأثير حمل عمودي يوتر على السطح العلوي للصفيحة . وقد تم اختيار عدة نماذج للصفيحة منها الصفيحة المدعومة بألياف مرنة وأخرى مدعومة بألياف غير مرنة وتقاوم الثني بدرجات متفاوتة لتلك المقاومة وترتب عنه الاختلاف في نوعية الألياف فيما يتعلق بمركبات الإجهاد منها الجزء المتماثل وغير المتماثل لمركبات الاجهاد الناتج من الاختلاف في طبيعة الألياف من حيث مقاومتها أو عدم مقاومتها للثني.

باستخدام قانون هوك تم عرض الجزء المتماثل لمركبات الإجهاد وباستخدام التعاريف المعروضة في نظرية Soldatos (2009) تم عرض الجزء غير المتماثل وفقا لدوال الازاحة المفترضة لهذا البحث.

وتم استنتاج معادلات الاتزان بدلالة درجات الحرية ومشتقاتها المكونة لدوال الإزاحة مستخدمين ما عرض في نظرية Soldatos (2009) ذا العلاقة بالبحث مع الوضع في الاعتبار فرضية أن القضبان مقواه بألياف مقاومة للثني.

كذلك تم التوصل لحل منظومة نايفير للمعادلات التفاضلية المتحصل عليها والمتضمنة حدود لها علاقة بقابلية مقاومة الألياف للثني وحساب النتائج العددية لها وذلك باستخدام لغة البرمجة (maple 18) وتم عرض هذه النتائج بجداول وأشكال بيانية وبعد ذلك

تم مناقشة هذه النتائج وتمت المقارنة بين النتائج المتحصل عليها في الفصلين الرابع والخامس وذلك في حالة أن سمك الصفيحة ($h/L=0.25$).

حيث اتضح أن الأبسط تركيبة لدالة الإزاحة مع دالة التشكيل (The Shape Function) كانت الأفضل والأقرب للنتائج الفعلية (Exact Solution) لذلك تم إيجاد نتائج أخرى لها مع تغيير قيم البارامتر (λ) التي لها علاقة بسمك الألياف (Farhat and Soldatos (2015)). ولوحظ أنه كلما زادت مقاومة الألياف للثني نتج عنه نقص في معدل انحناء الصفيحة.

اتضح من خلال دراسة هذا الموضوع أنه يوجد بعض النقاط التي يمكن البحث فيها وتطويرها ومقارنة نتائجها وهي كالآتي:

❖ يمكن إيجاد الحلول للمسائل المدروسة في هذا البحث وذلك من خلال شروط حدية أخرى مختلفة.

❖ يمكن تطبيق النظريات المستخدمة في هذا البحث في حالة أن الصفيحة من عدة طبقات وذلك للحصول على النتائج.

❖ يمكن تطبيق الفكرة المستخدمة في هذا البحث على العديد من النظريات التقريبية مع الأخذ في الاعتبار أن الألياف مقاومة للثني.

المصطلحات العلمية

Strenght of material مقاومة المواد

Engineering structures الانشاءات الهندسية

Loads حمولات

Supports of beams مساند الصفائح

Sharp variation مناطق التغيرات الحادة

Cracks شقوق

Experimental mrthods طرق تجريبية

Approximate methods طرق تقريبية

Simply simply supported دعم ببساطة

The displacement function دالة الازاحة

Rigid bodies أجسام جاسئة ((متماسكة))

Elastic bodies أجسام مرنة

Plastic body جسم لدن

Elasticity المرونة

Elastic limit حد المرونة

Stress الإجهاد

Strain الإنفعال

Shear strain الإنفعال القصي ((العرضي))

Bluk strain الإنفعال الحجمي

Young modulus معامل المرونة

Deformable body جسم قابل للتشكل

Ductility المطيلية

Malleability الطروقية

Brittleness التقصف

Resistance المقاومة

Stiffness الصلابة

Toughness المتانة

Resilience الرجوعية

Hardness الصلادة

Thick plate صفيحة سميكة

Thin plate صفيحة رقيقة

Moderately thick plate صفيحة سميكة لحد ما

chell سطوح غير مستوية

Thin sheets with small vertical displacement
صفائح رقيقة ذات إزاحات رأسية صغيرة

Thin sheets with large vertical displacement
صفائح رقيقة ذات إزاحات رأسية كبيرة

Thick sheets صفائح سميكة

Neutral سطح محايد

Poissons modulus معاملات بواسون

Shear modulus معاملات القص

Shear stress إجهاد القص

Stress components مركبات الإجهاد

The symmetric part الجزء المتماثل

Strain components مركبات الإنفعال

anti-symmetric part الجزء غير المتماثل

Fibres curvature تقوس الألياف

Navier-type differential equations معادلات نافير

Exact solution الحل الفعلي

Couple-stress الإجهاد المزدوج

Normal strain الإنفعال العمودي

Transverse shear strains الإنفعال القصي العرضي

Normal stress الإجهاد العمودي

Integration constant الثوابت التكاملية

The shape function دالة التشكيل

Equilibrium equations معادلات الاتزان

Diffection function دالة الانحناء

Poisson ratio نسبة بواسون

Lame parameters معاملات لاميه

المراجع (References)

الطرشة، إحسان؛ و وهبي، سهي. (2013). أساسيات نظرية المرونة. مطبعة جامعة البعث.

الغامدي، نجاه؛ وزنفور، أشرف. (2008). تحليل الانحناء للصفائح المثدرجة ثلاثية الطبقات تحت تأثير أحمال ميكانيكية وحرارية. [درجة دكتوراه الفلسفة في العلوم تخصص رياضيات تطبيقية (ميكانيكية الاجسام الصلبة - نظرية المرونة)].

ميلود، ميلود؛ والسحيري، علي. (2003). خواص المادة. دار شموع الثقافة للطباعة والنشر الزاوية - ليبيا.

جونز، روبرت؛ وجبرة، رفيع. (2010). ميكانيك المواد المركبة. سلسلة كتب التقنيات الاستراتيجية والمتقدمة. مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية المنظمة العربية للترجمة.

إمام، محمود؛ مهدي، محمد؛ وأميين، محمد. (2007). خواص المواد وإختياراتها (ط 1). كلية الهندسة - جامعة المنصورة.

References in English

Aydogdu,M.,Aksencer,T.,and Soldatos.K.P.(2021). On three-dimensional dynamics of Fibre-reinforced functionally graded plates when fibres resist bending. *Journal of Engineering Mathematics*, 128(1),1-26.

Belkhodja,Y.,Ouinas,D.,Fekirini,H.,VinaOlay,J.,and Touahmia, M.(2020). Three new hybrid quasi-3D and 2D higher-order shear deformation theories for free vibration analysis of functionally graded material monolayer and sandwich plates with stretching effect. *Advanced Composites Letters*, 29,1-22.

Bresse,J.A.(1859). Cours demecanique applique. *Paris Mallet-Bachelier*.

Cho,M.,Parmerter,R.(1993). Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 31, 1299-1306.

DiSciuva,M. (1992). Multilayered anisotropic models with continuous interlaminar stresses. *Composite Structures*, 22, 149-167.

DiSciuva,M.(1986). Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates;An evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*, 105 (3), 425-442.

Farhat,A.,Gwila,N.(2017). Euler-Bernoulli Beam Theory in the Presence of fiber Bending Stiffness. *International Organization of Scientific Research Journal of Mathematics*, 10-17

Farhat,A.F.(2013). Basic problems of fibre-reinforced structural components when Fibres resist Bending. PhD thesis. *The University of Nottingham England*.

Farhat,A.,Soldatos,K.(2015). Cylindrical Bending and Vibration of Polar Material Laminates. *Mechanics of advanced Materials and Structures*, 22,885-896.

Fedorova,S.,Bursa,J.(2016). Application of Polar Elasticity ot The problem of Pure Bending of a Thick Plate. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 5-10.

Ferreira,A.,Roque,C.,and Jorge,R.(2005). Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers and Stuctures*, 83 (27), 2225-2237.

He,J.,Chou,M.,and Zhang,X.(1993). Bending analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory. *Composite Structures*, 24, 125-138.

Heuer,R.(1992). Static and dynamic analysis of transversely isotropic moderately thick sandwich beams by analogy. *Acta Mechanica*, 91, 1-9.

Kant,T.,Manjunatha,B.(1989). Refined theories for composite and sandwich beams with C^0 finite elements. *Computers and Structures*, 33,755-764.

Kirchhoff.(1850). Kirchhoff-love plate theory, From Wikipedia, the free encyclopedia.

Lee,K.,Lin,W.,and Chow,S.(1994). Bidirectional bending of laminated plates using an improved zig-zag model. *Composite Structures*,28(3),283-294.

Levy,M.(1877). Memoire sur la theorie des plaques elastiques planes. *Journal des Mathematiques Pures et Appliquees*, 30,219,306.

Li,X.,Liu,D.(1995). Zigzag theory for composite laminates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 33, 1163-1165.

Liu,D.,Li,X.(1996). An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis. *Journal of Composite Materials*, 30,1539-1561.

Liu,S.,Soldatos,k.(2008). Extension of anew approach towards accurate stress analysis of laminates subjected to thermo-mechanical loading. *Journal of Engineering Mathemat*, 185-200.

Lo,K.,Christensen,R.,and Wu,E.(1977). A higher order theory for plate deformations Part 2 Laminated plates. *The American Society of Mechanical Engineers Trans Journal of Applied Mechanics*, 44,669–676.

Lu,X.,Liu,D.(1992). An interlaminar shear stress continuity theory for both thin and thick composite laminates. *The American Society of Mechanical Engineers Trans Journal of Applied Mechanics*, 59 (3),502-509.

Lu,X.,Liu,D.(1992). Interlayer slip theory for cross-ply laminates with nonrigid interfaces. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 30, 1063-1073.

Manjunatha,B.,Kant,T.(1993). Different numerical techniques for the estimation of multiaxial stresses in symmetric/unsymmetric composite and sandwich beams with refined theories. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 12,2–37.

Noor,A.,Burton,W.(19 89). Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates. *Composite Structures*, 11 (3), 183-204.

- Pagano, N. (1969). Exact solution for composite Laminates in cylindrical bending. *Journal Composite Materials*, 3, 398-411.
- Ping, L., Yongwell, Z., and Kaida, Z. (1994). Bending of high-order refined shear deformation theory for rectangular composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 31, 2491-2507.
- Rayleigh, J. (1877). The theory of sound. *London Macmillan Publishers*.
- Reddy, J. (1984). A simple higher-order theory for Laminated composite plates. *Journal Applied Mechanics*, 51 (4), 745-752.
- Savoia, M. (1995). On the accuracy of one-dimensional models for multilayered composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, 33 (4), 521-544.
- Shimpi, R., Ghugal, Y. (1999). A layerwise trigonometric shear deformation theory for two layered cross-ply laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 18, 1516-1542.
- Shimpi, R., Ghugal, Y. (2001). A new layerwise trigonometric shear deformation theory for two-layered cross-ply beams. *Composites science and Technology*, 61 (9), 1271-1283.
- Soldatos, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94, 195-220.
- Soldatos, K. (2013). Foundation of polar linear elasticity, *Journal of Elasticity*, 50-57.
- Soldatos, K. (2003). Accurate Stress Analysis of Laminated Composite Structures. *Modern Trends in composite Laminates Mechanics*, 69-132

Soldatos,k.(2009). Towards anew generation of 2D mathematical models in the mechanics of thin-walled fibre-reinforced structural components. *International Journal of Engineering science*, 47,1346-1356.

Soldatos,K.(2020). On the characterisation of polar fibrous composites when fibres resist bending-Part III The spherical part of the couple–stress. *International Journal of Solids and Structures*, 217-225.

Soldatos,K.(2021). Determination of the spherical part of the couple-stress in a polar fibre-reinforced elastic subjected to pure bending. *Acta Mechanica*, 1-17.

Soldatos,k.,Ayodada,M.,Gul,U.(2019). plane strain polar elasticity of fiber reinforced functionally graded materials and Structur. *journal of mechanics of materials and structures*, 497-535

Soldatos,k.,Farhat,A.(2016). On Reissner's_displacement field in modelling thin elastic plates with embedded fibres resistant in bending. *Institute of Mathematics and it's Applications Journal of Applied Mathematics*, 1-20.

Soldatos,K.,Watson,P.(1997). A method for improving the stress analysis performance of one and two-dimensional theories for Laminated composites. *Acta Mechanica*, 123,163-186.

Spencer,A.,Soldatos,K.(2007). Finite deformations of fibre-reinforced elastic Solids with fibre bending Stiffenss. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 42(2),355-368.

Srinivas,S.,Rao,A.(1970). Bending vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 6 (11), 1463-1481.

Stein,M.(1986). Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 24,1537–1544.

Timoshenko,S.(1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41,742-746.

Ting,T.(1996). Anisotropic Elasticity: Theory and Application. *Oxford University Press*.

Touratier,M.(1991). An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29 (8), 901-916.

Vinayak,R.,Prathap,G.,and Naganarayana,B.(1996). Beam elements based on a higher order theory - I formulation and analysis of performance. *Computers and Structures*, 58,775–789.