الجامعة الأسمرية الإسلامية

كلية العلوم

قسم الرياضيات

تقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود

عمل الطالبة:

مريم فرج أحمد الشويرف

تحت إشراف:

أ.د. الهاشمي علي ادراه

قدمت هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات الإجازة العالية(الماجستير) في الرياضيات

بتاريخ 21 ذوالحجة1447 هـ الموافق 2025/6/17م

الإقــرار

أقر أنا مريم فرج الشويرف بأن ما اشتملت عليه الرسالة إنما هو نتاج جهدي الخاص، باستثناء ما تمت الإشارة إليه حيثما ورد، وأن هذه الرسالة ككل أو أي جزء منها لم يقدم من قبل لنيل أي درجة علمية، أو بحث علمي لدى أي مؤسسة تعليمية أو بحثية أخرى، وللجامعة حق توظيف الرسالة والاستفادة منها مصدراً مرجعيا للمعلومات، لأغراض الاطلاع أو الإعارة أو النشر بما لا يتعارض وحقوق الملكية الفكرية المقررة بالتشريعات النافذة.

التوقيع:

التاريخ:2025/9/3م

الإهـــداء

إلى من علّمني حبّ العلم والاعتماد على النّفس والإصرار على الهدف، أبي.

إلى من تحبّ وتعطي على الدّوام، ووقفت معي في أصعب الظّروف، أمي.

إلى من كانت محبتهم عوناً لي في كلّ الأوقات، زوجي وإخوتي

إلى كلّ من تمنّى لي الخير، ودعا لي بصدق.

أهدي بحثي هذا

الشّكـــر والتّقدير

أتوجّه بالشّكر أوّلًا إلى الدّكتور الهاشميّ ادراه، الذي لم يكن هذا العمل ليتمّ لولاه؛ فلم يدّخر جهدًا، سواء في تقديم النّصح والإرشاد، أو في التّقييم والتّدقيق؛ فله منّي كلّ الشّكر والتّقدير.

كما أتقدّم بالشّكر إلى السّادة أعضاء هيئة التّدريس في قسم الرّياضيّات، وأخصّ بالشّكر الدكتور محمد حمودة والأستاذ محمد مسعود الأرقط، والدّكتور علي فرحات، كما أتوجّه بالشّكر الجزيل إلى الدّكتور عبد السّلام القهواجي وأشكر أعضاء لجنة المناقشة لتكرّمهم بتحكيم هذه الرّسالة.

فهرس المحتويات

قائمة الجداول

قائمة الأشكال

قائمة الملاحق

الملخّـــص

قد تم في هذا البحث، دراسة عملية تقريب الدوال الرياضية باستخدام كثيرات الحدود وذلك لخواصها وخصائصها المميزة، وشملت هذه الدراسة كثيرات حدود تايلور وكثيرات حدود لاجرانج، وبالنسبة للدوال المتعامدة تم دراسة كثيرات حدود تشبيشيف وكثيرات حدود ليجندر. ومن خلال الدراسة تم توضيح كيفية التقريب بكثيرات الحدود، مع الاستعانة ببعض الأمثلة وتنفيذ بعضها باستخدام برنامج MATLAB، كذلك دعم البحث ببعض النظريات والخواص التي من شانها توضح عملية التقريب. اختتمت الدراسة بمقارنة بين كثيرات الحدود الأربعة المذكورة، أعلاه، من خلال مثال تطبيقي، وذيلت بمناقشة بعض التطبيقات لكثيرات الحدود في المجالات العملية والاستفادة من عملية التقريب.

المقـــــــــدمة

Introduction

مقــدمة:

بعد الاختلاف الكبير بين العلماء على تعريف علم التّحليل العدديّ، اتّفقوا على أنّه العلم الذي يستخدم فيه الطّرق العدديّة؛ للحصول على حلول تقريبيّة للعديد من المسائل المعقّدة، بينما الحـــلّول التّحليليّة تعطي حلولًا صحيحةً تامّةً (العدوي،2018)؛ من ثمّ نجد أنّ الهدف من التّحليل العدديّ هو تصميم طرق تقريبيّة - نظريّة التّقريب- للمسائل التي كانت منذ القدم محطّ اهتمام العديد من العلماء الرّياضيّين، وأشهرهم العالم الرّوسيّ تشبيشيف (1853)، الذي يُعدّ مؤسس علم التّقريب، عندما بدأ بدراسة آليّة عمل محركات البخار، وكيفيّة تحويل الحركة الدّائريّة إلى حركة مستقيمة، وتمكّن من تعيين كثيرة الحدود ذات درجة n (Carothers,1998).

وتنسب النّظريّة الأساسيّة في التّقريب إلى العالم الألماني وايرشتراس (1885م)، أمّا الرّياضيّ جاكسون، مؤسّس نظريّة التّقريب البنيويّ، فله العديد من النّظريّات التي تدرس العلاقة بين الصّفات البنيوية للدّالة (أي تركيب الدّالة) ودرجة تقريبها، وكان الرّياضيّ NaumAkhiezer رائداً في نظريّة التّقريب الحديثة وطور أفكار تشبيشيف، وله العديد من التّطبيقات والمسائل التّقريبيّة (الدكاك،2013-2014).

إنّ الاهتمام بنظريّة التّقريب في هذا البحث، خاصةً تقريب الدوال المستمرة باستخدام كثيرات الحدود (محور البحث)، ينبع من أهمّيتها ودخولها في العديد من المسائل الرّياضيّة، والتّطبيقات العمليّة، وفي وصف الظّواهر الطّبيعيّة في الفيزياء والكيمياء؛ ففي الرّياضيّات والهندسة والتّكنولوجيا العديد من التّطبيقات العمليّة، التي تشمل دوالاً معقّدة أو غير مألوفة، تصعب دراستها من حيث اتصالها أو قابليتها للتّكامل أو التّفاضل، وقد تحتاج للكثير من الوقت والجهد، أو قد تكون الدوال على شكل ثنائيّات مرتّبة (x_i, y_i) و(x_j, y_j)، بحيث لا توجد $i = j$، أي عدم الاستمراريّة، ولا يمكن تحديد دالة تمرّ عند هذا الانكسار، بمعنى أنّه يجب أن تكون جميع المركّبات السّينيّة في الثّنائيّات المرتّبة مختلفة وغير متكرّرة، أو دوال البيانات Data Functions، وتسمّى الدّوال المجدولة Tabulated Functions، وقيم الدّالة $\{x_i\}$ المطلوبة هو شكل العلاقة أو الدّالة التي تربط المركّب عند هذه النّقطة $\{y_i\}$ ، وهذه هي مشكلة البحث، التي يُحاوَل حلّها عن طريق استبدال تلك الدوال بدوال بسيطة، وغير معقّدة (كثيرة "أو متعدّدة" الحدود)، وهذا ما يعرف بتقريب الدوال، سواء أكانت عن طريق دوال كثيرات الحدود الجبريّة، أو غير الجبريّة، أو عن طريق دوال أسيّة أو دوال مثلثيّة، وغيرها (شكرالله،2018،ص ص 176-177).

كما أنّ هناك محاولة في هذا البحث للإجابة على عدّة أسئلة، التي لخّصت مشكلة البحث، بالإضافة إلى المشكلة الأساسيّة وهي وجود بعض الدوال المعقدة، وهي على النّحو الآتي:

- كيف يمكننا تمثيل نقاط تّجربة ما على شكل دالة تكون أقرب ما يكون من دالة حقيقيّة؟
- كيف نستطيع تمرير منحنى بنقاط تجربة ما بأقلّ خطأ ممكن؟
- هل لكلّ دالة كثيرة حدود تقريبيّة؟
- ما الشّروط الواجب توفّرها في الدّالة لكي تُقرّب باستخدام كثيرات الحدود؟
- إذا وجدت كثيرة حدود تقريبيّة لدالة ما، فهل هي وحيدة؟
- وكيف يتم إيجادها؟ وما تركيبتها؟

رُكّز في هذا البحث على تقريب الدوال المتّصلة باستخدام دوال كثيرات الحدود الجبريّة Algebraic Polynomials، وهي دوال بسيطة ومتّصلة Continuous Function، وقابلة للتّكامل Integrable وقابلة للتّفاضلDifferentiable ، وهي من أقدم الطّرق في التّحليل العددي، وما زالت من أكثرها استخدامًا، بل هي فرع من فروع التّحليل العدديّ (علي وآخرون، 2015).

وتوجد أنواع منها، على سبيل المثال كثيرة حدود تايلورTaylor Polynomial ، وكثيرة حدود ماكلورين Maclaurin Polynomials ، وكثيرات الحدود المتعامدة Orthogonal Polynomials، مثلًا: كثيرات الحدود تشبيشيف Chebyshev Polynomials ، وكثيرات حدود ليجندرLegendre Polynomials .

تعتبر تقريب الدوال هي طريقة من طرق التحليل العددي التي تستخدم لحل المسائل المعقدة التي يصعب حلها بالطرق التحليلية وبالتالي ينتج عنها أخطاء يجب معرفتها والحكم على الإجابة بالقبول او الرفض وهذا ما يسمى بخطأ التقريب (عيد،2011).

الهدف الثّاني في هذا البحث هو تقليل قيمة الخطأ النّاتج عن التّقريب، وإمكانيّة توزيع الخطأ بطريقة متجانسة على طول الفترة المعرفة عليها الدّالة المراد تقريبها؛ بحيث لا يتعدّى القيمة المسموح بها (شكرالله،2018،ص 315).

لخّصت أهمّيّة البحث (تقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود) في كونه يوفّر الجهد والوقت، ويفسّر بعض الظّواهر الفيزيائيّة والهندسيّة والتّكنولوجيّة، وتبسيطها إلى دوال جبريّة كثيرات حدود يسهل التّعامل معها، والحصول على قيم أدقّ رياضيًّا، وبأقلّ خطأ ممكن.

PafnutyLvovichChebyshev 1821-1894 (الدكاك،2013-2014)

Dunham Jackson
1888 -1946 (الدكاك،2013-2014)

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
1815-1897 (الدكاك،2013-2014)

AkhiezerNaumIlyich

1901-1980(2014-2013،الدكاك)

Sergei Natanovich Bernstein

1880– 1968 (2014-2013،الدكاك)

الفصل الأول

أســـاسيات التقريــب

Basis of an Approximation

تُعدّ القدرة على استبدال دالة ما معطاة بأخرى أبسط منها (كثيرة الحدود) من أهمّ العمليّات المفيدة للمسائل الرّياضيّة، وخاصةً التي تصف الظّواهر الطّبيعيّة، وفي الفيزياء أو الكيمياء، أو في المسائل التي تحوي شروطًا أو قيودًا، تؤدّي إلى صعوبة الحصول على حلول دقيقة، وعمليّة الاستبدال هذه تسمّى بعمليّة تقريب الدوال، قبل الخوض في تفاصيل ولب الموضوع لابد من توضيح بعض وأهم المفاهيم الأساسية ذات صلة بموضوع البحث هي:

(1-1) متعدّدة أو كثيرة الحدود Polynomial

كثيرة الحدود في x ذات الدّرجة n هي دالة على الصّورة الآتية:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 .$$

$a_n \neq 0$ و n عدد صحيح موجب و $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابت constants

(Atkinson,1988,p131;Mudde,2017;Sastry,2012,p22).

النّظريّة الأساسيّة في الجبر المجرّد تنصّ على أنّ كلّ دالة كثيرة حدود $p(x) = 0$ ، لها -على الأقلّ- جدر واحد، ومن ثمّ إذا كانت درجتها n هذا يعني أنّ لها n من الجذور (علي وآخرون ،2015).

(1-1-1) الدوال الجبريّة Algebraic functions

هي دوال تحقّق المعادلة الآتية:

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)\mathrm{y} + p_n(x) = 0 .$$

$p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ هي كثيرات الحدود (Carothers,1998) (علي وآخرون,2015).

إذا كانت الدّالّة على صورة خارج قسمة لدالّتين كثيرتي حدود تسمّى دالة جبريّة قياسيّة، وإلا فهي دالة جبريّة غير قياسيّة.

ومن أهم نظريات التقريب بل هي الأساسية نظرية وايرشتراس؛ نسبة للعالم عضو أكاديميّة (Weierstrass1815-1897) الألماني وايرشتراس العلوم ببرلين.

(2-1) نظريّة تقريب وايرشتراس The Weierstrass Approximation Theorem,1885

تنصّ هذه النّظريّة على أنّه إذا أعطيت أي دالة $f(x)$ معرفة ومتّصلة على الفترة $[\alpha, \beta]$ ، وكانت α و β أعدادًا حقيقيّة و $\varepsilon > 0$، فإنّه توجد كثيرة حدود من الدّرجة n نرمز لها بالرّمز $p_n(x)$، بحيث :

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad x \in [\alpha, \beta] .$$

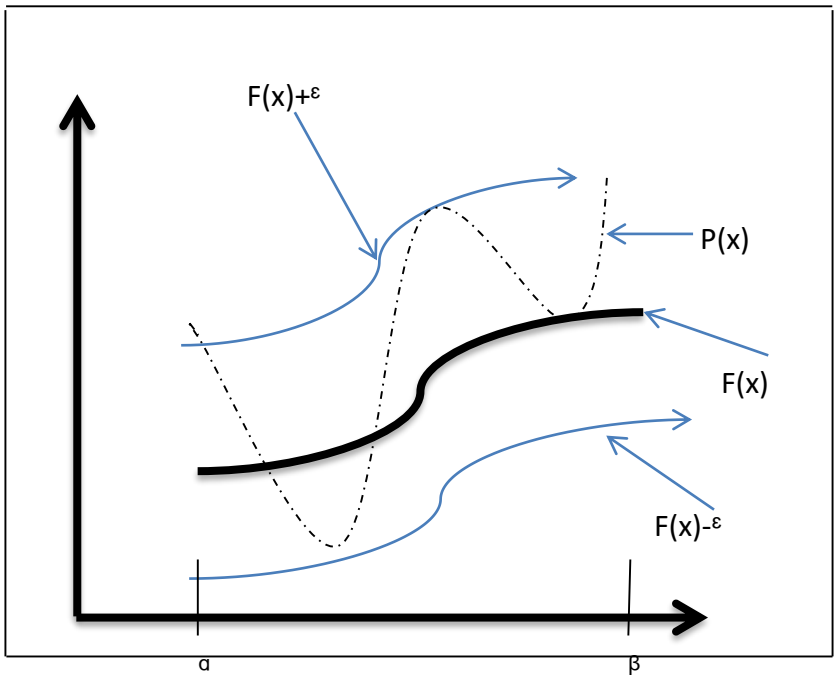
(Aleyan,2013;Atkinson,1988,p198)

(الدكاك،2013-2014؛شكر الله،2018،ص 178).

هندسيًّا، يعني أنّه عندما تُرسم الدوال $f(x-\in)$ و $f(x+\in)$ و $f(x)$ ؛ لإيجاد كثيرة الحدود $p_n(x)$ تُرسم داخل المنطقة المحدودة بالدّالتين $f(x-\in)$ و $f(x+\in)$ لكلّ $x \in [\alpha, \beta]$، وإذا كان هناك جدول بيانات يحتوي على $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ،...، $f(x_n)$ للدّالة $f(x)$ عند x_0 ، x_1 ،...، x_n ومن ثمّ تكون النّقاط الآتية $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ، $\big(x_1, f(x_1)\big)$ ،...، $\big(x_n, f(x_n)\big)$ في الغالب الدّالة $f(x)$ غير معروفة، ويراد إيجاد كثيرة الحدود $p_n(x)$ التي تتساوى مع الدّالة $f(x)$ عند النّقاط x_0 ، x_1 ،...، x_n؛ بحيث $p(x_k) = f(x_k)$ لكلّ $k = 0,1, \dots, n$ (Aleyan,2013)

ولمعرفة برهان هذه النّظريّة يمكن بالرّجوع إلى المرجع
(Atkinson,1988,p198;Carothers,1998) (الدكاك،2013-2014).

ويشترط الاستمراريّة في تقريب الدوال؛ لأنّ الدوال غير المستمرة لا يمكن تقريبها؛ لأنّه لا يوجد معيار لنقاط عدم الاستمراريّة، أي لو كان المعيار على شكل تكامل، فلا يوجد تكامل للدّالة غير المستمرة، وإذا كان على شكل sup لا يوجد supremum للدّالة غير المتّصلة، ولكن يمكن تقريبها إذا جُعلت مقيّدة من خلال اتحادها مع دالة مستمرة تسمّى دالة الإكمال، سواء أكانت دالة متّصلة مقطعيًّا، أو دالة اعتياديّة، أو كثيرة حدود، بمعنى أيّ دالة يشترط أن يكون مداها كلّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة ، أو تقييدها على فترة معيّنة (Judy,2021).



الشّكل(1-1) يوضّح نظريّة وايرشتراس بيانيًّا، المنحنى الأسود الغامق يمثّل الدّالة f(x)، أمّا المنحنى المتقطّع فيمثّل كثيرة الحدود P(x) .

(3-1) الوحدانية Uniqueness

(1-3-1) نظرية

إذا كانت $f(x) \in c[a,b]$ فإنّ أفضل كثيرة الحدود $p_n(x)$ لتقريب الدّالة $f(x)$ تكون وحيدة.

البرهـــان

نفرض أنّ $p(x)$ و $q(x)$ كلاهما أفضل كثيرتي حدود لتقريب الدّالة $f(x)$، وكلاهما من الدّرجة n هذا يعني:

$$\|f-p\|_\infty = \|f-q\|_\infty = E\ .$$

أمّا متوسط الدّالتين $p(x)$ و $q(x)$ فهو:

$$r(x) = \frac{p+q}{2}\ .$$

وهو أفضل تقريب؛ لأنّ

$$f - r = f - \frac{p+q}{2} = \frac{f-p}{2} + \frac{f-q}{2} .$$

$$\|f - r\|_\infty = E .$$

والدّالة $(f - r)$ تملك مجموعة من النّقاط المتناوبة x_{n+1} ,...x_2, x_1, x_0 عددها (n+2) لكلّ i؛ أي أنّ:

$$(f - p)(x_i) + (f - q)(x_i) =^{+}_{-} 2E .$$

هذا يعني:

$$(f - p)(x_i) = (f - q)(x_i) =^{+}_{-} E .$$

لكلّ i ، وبما أنّ x_{n+1} ,...x_2, x_1, x_0 هي المجموعة المتناوبة لكلّ $(f - q)$ و$(f - p)$، فإنّ كثيرة الحدود:

$$q - p = (f - p) - (f - q) .$$

لها (n+2) من الأصفار أو الجذور؛ لأنّ $(q - p) \in p_n$؛ ومن ثمّ فإنّ $p(x) = q(x)$

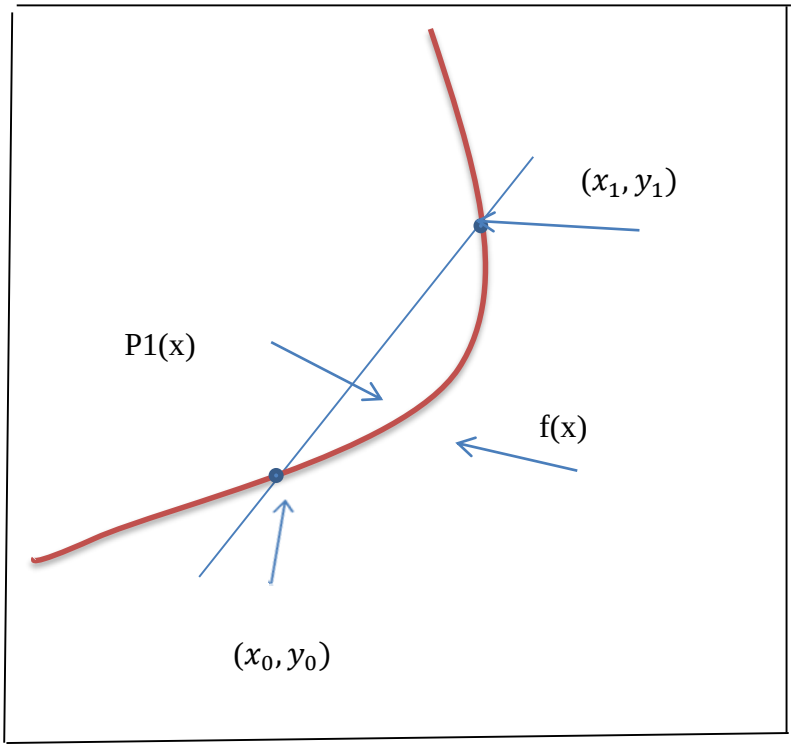
. (Carothers,1998;Mudde,2017)

(4-1) التقريب الخطي The Linear Approximation

لتكن(x_0, y_0) و(x_1, y_1) نقطتين منفصلتين من البيانات، و $f(x_0) = y_0$ و$f(x_1) = y_1$ ؛ فإنّ الخط المستقيم الوحيد الذي يربط بين النقطتين يمكن إيجاده من معادلة الخطّ المستقيم على النّحو الآتي:

$$y = (x - x_0)\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} + y_0 .$$

$$y = \frac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)} y_0 - \frac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)} y_1 + y_0 = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 .$$



الشّكل (1-2) يوضّح التّقريب الخطّي بين نقطتين من البيانات (x_1, y_1)و (x_0, y_0) و الدّالة $f(x)$.

ومن ثمّ، فالتّقريب الخطّي لكلّ $x \in [x_0, x_1]$ هو:

$$p_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1).$$

(شكرالله،2019،ص ص 2-4؛العدوي،2018،ص 129).

(1-4-1) خواص التّقريب الخطّي

Properties of the linear approximation

$f(x) \approx f(x) + f'(x)(x - a) \quad for\ all\ x \approx a$ -1

$(1 + x)^r \approx 1 + rx \quad for\ all\ x \approx 0 \quad and\ r\ real\ number$ -2

$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x \quad for\ all\ x \approx 0$ -3

$\sin(x) \approx x \quad for\ all\ x \approx 0$ -4

(شكر الله،2019؛العدوي،2018).

(2-4-1) مثال

أوجد التّقريب الخطّيّ للدّالة $f(x) = (\mathrm{x}+1)^{\frac{1}{3}}$ عندما $x_0 \approx 0$؟

الحـــــل

$$f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{3}(0+1)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} \quad , f(0) = (0+1)^{\frac{1}{3}} = 1\,,$$

$$p_1(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{1}{3}x + 1.$$

(أبوالفتوح، د.ت).

(5-1) التّقريب التّربيعي أو التّقريب من الدّرجة الثّانية

Quadratic approximation or approximation of second degree

التّقريب التّربيعيّ يعني إيجاد كثيرة حدود تملك قيم الدّالة الأصليّة نفسها، وكذلك المشتقّتان الأولى والثّانية عند نقطة ما a .

$$f(x) \approx p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

وتسمى أيضاً بكثيرة حدود تايلور من الدرجة الثانية التي سنتطرق لها في الفصل التالي (شكرالله،2019،ص 5).

(1-5-1) خواص التّقريب التّربيعي

Properties of the quadratic approximation

-1 $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 \quad , x \approx 0$

-2 $(1+x)^r \approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 \quad x \approx 0\,,\mathrm{r\ real\ number}$

$$\sin(x) \approx x \quad , x \approx 0$$ - 3

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad , x \approx 0$$ -4

(Hirst,2006)

(6-1) الدوال المتعامدة Orthogonal Functions

إذا كانت $\emptyset_2(x)$ و $\emptyset_1(x)$ دالتين معرفتين على الفترة المغلقة $[a, b]$، وقابلتين للتّفاضل والتّكامل على الفترة نفسها، بحيث a و b أعداد حقيقيّة؛ فإنّ:

$$< \emptyset_1, \emptyset_2 >= \int_a^b w(x)\emptyset_1(x)\emptyset_2(x)dx = 0 .$$

حيث $w(x) > 0$ هي دالة الوزن أو التّوازن، وقابلة للتّكامل على الفترة نفسها؛ فيقال: إنّ الدّالة $\emptyset_1(x)$ عموديّة على الدّالة $\emptyset_2(x)$ على الفترة المعطاة بالنّسبة للدّالة الوزن $w(x)$

بصورة عامة يقال أن عائلة من كثيرات الحدود $\{\emptyset_n(x)\}$ متعامدة تبادلياً مع دالة الوزن إذا وإذا كان فقط:

$$< \emptyset_i, \emptyset_j > = 0 \quad for\ j \neq i$$

ويقال أنها متعامدة بانتظام وبشكل تبادلي مع دالة الوزن إذا وإذا كان فقط متعامدة وتحقق الشرط التالي لكل i

$$< \emptyset_i, \emptyset_i >= 1$$

(Atkinson,1988,p208) (شكرالله،2018،ص 195؛عيد،2011).

(1-6-1) تعريف دالة الوزن Definition of weight function

هي دالّة موجبة على طول الفترة $[a, b]$, ولها تكامل منتهٍ على الفترة نفسها.

مثلاً كثيرات حدود تشبيشيف $T_0(x)$ و$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $T_1(x)$ و $T_2(x)$و ... دوال متعامدة مع دالّة الوزن $\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ سنتطرق لها لاحقًا في الفصل الثّاني (Carothers,1998) .

فمثلاً: الدوال $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $\varphi_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$

تُعدّ دوالًا متعامدةً بانتظام على الفترة$[-1,1]$، وبشكل تبادلي(Atkinson,1988,p210)

(2-6-1) بديهيّة Lemma

إذا كانت $w(x) > 0$ على الفترة (a, b), والدّالة $f(x)$ متّصلة على $[a, b]$ وتحقّق:

$$\int_a^b f(x)\, p(x) w(x) dx = 0$$

لكلّ كثيرة حدود $p(x)$ درجتها $(n - 1)$، فإنّ الدّالة $f(x) = 0$ لها على الأقل n من الجدور المختلفة على الفترة (a, b) .

ولمعرفة برهان أو إثبات ذلك، يمكن الرّجوع إلى المرجع (Carothers,1998).

(3-6-1) مثال

حدد ما إذا كانت الدّالّتان الآتيتان:

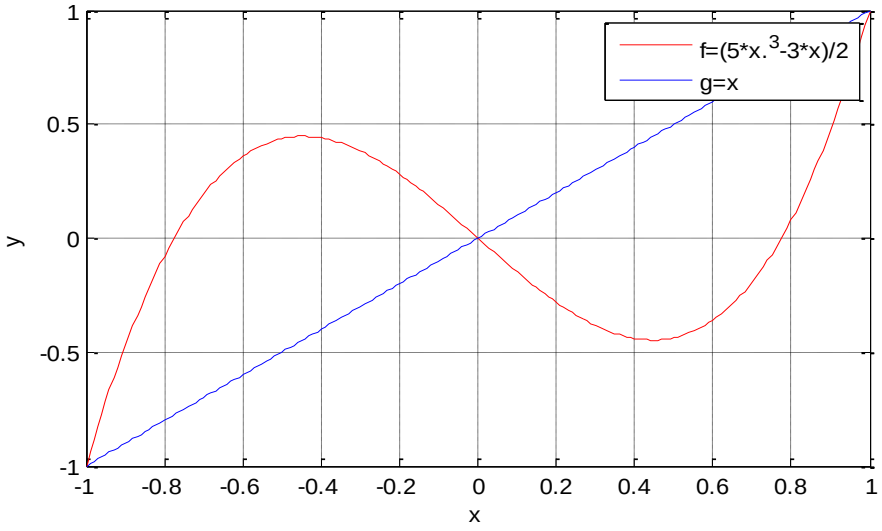
$$f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2}{2} \qquad , \qquad g(x) = x$$

متعامدتين بالنّسبة لدالة الوزن $w(x) = 1$ على الفترة $[-1,1]$.

الحـــــــــل

$$\int_{-1}^{1} x\left(\frac{5x^3 - 3x^2}{2}\right) dx = \left.\frac{x^5 - x^3}{2}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

هذا يعني أنّ الدّالتين $f(x)$ و $g(x)$ متعامدتان (شكرالله،2018،ص ص 195-196).



الشّكل (1-3) يوضّح تعامد الدّالتين $f(x)$ و $g(x)$

الفصل الثاني

تقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود

Approximating Functions by Polynomials

في سنة 1853م، بينما كان العالم الرّياضيّ الرّوسيّ تشبيشيف يشتغل بمسألة تفسر الحركة الخطّيّة لنظام محرّك، استطاع وصف الدّالة المتّصلة والمعرّفة على الفترة المغلقة بواسطة كثيرة حدود، من هنا بدأ استخدام كثيرات الحدود في وصف الدوال (الدكاك،2013-2014).

فالتّقريب بكثيرات الحدود من أقدم الطّرق في التّحليل العدديّ، وما زال من أكثر الطّرق استخدامًا بديلًا عن الدّالة $f(x)$ ، بل هو فرع من فروع التّحليل العدديّ، ومن أهمّ الأسباب التي تؤدّي إلى استخدام كثيرة الحدود $p(x)$ تركيبتها البسيطة، وخواصّها المميّزة (علي وأخرون،2015).

في هذا الفصل دُرست أربع أنواع من كثيرات الحدود (كثيرة حدود تايلور ولاجرانج وتشبيشيف وليجندر) وكيفية استخدامها في تقريب الدوال مع الاستعانة ببعض الأمثلة وتوضيحها ببرنامج الماتلاب.

(1-2) كثيرة حدود تايلور_Taylor Polynomial

في هذا الجانب، تُطُرّق أوّلًا إلى نظريّة تايلور؛ لما لها من أهميّة في نظريّة التّقريب، وليس لأنّها تستخدم في الحصول على صيغ تقريبيّة بديلة للدوال فقط؛ بل لأنّ هناك الكثير من الطّرق العدديّة في عمليّة التّقريب تعتمد عليها، وهذه النّظريّة تسمّى باسم العالم الفيلسوف الإنجليزيّ تايلور (Taylor, 1685-1731) (شكر الله،2018،ص 179).

(1-1-2)نظرية تايلور Taylor theorem

إذا كانت الدّالة $f(x)$ متّصلة على الفترة $[a,b]$، والمشتقّة $f^{n+1}(x)$ موجودة، حيث n عدد صحيح موجب، ولكلّ $x \in [a,b]$، فإنّه يمكن تمثيل الدّالة $f(x)$ أو استبدالها على النّحو الآتي:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \rightarrow (1)$$

حيث ε يقع بين x وx_0 كما أنّ $x_0 \in [a,b]$ ويسمّى بمركز كثيرة الحدود والحدّ

$\frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

ويسمّى شكل لاجرانج للباقي Lagrange Remainder Formula وهو يعدّ الخطأ النّاتج عن عملية التّقريب، ويُرمز له بالرّمز $R_n(x)$ (Olson,2015;Sastry,2012,p14)

(شكرالله، 2018،ص ص 179-180؛علي وأخرون،2015).

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad ; x \neq x_0.$$

ولكن من الصّعب إيجاد القيمة العظمى لـ$|f^{n+1}(\varepsilon)|$ على الفترة بين x و x_0 ، بينما يمكن إيجاد العدد M بحيث

$$M = \max_{\varepsilon \in [x_0, x]} |f^{n+1}(\varepsilon)|.$$

بواسطة هذه النّظريّة يمكن الحصول على ما يسمّى بصيغ تايلور Taylor forms، وهي على التّرتيب، مفكوك تايلور Taylor expansion، وكثيرة حدود تايلور Taylor polynomial، ومتسلسلة تايلور Taylor series (شكرالله،2018،ص 180).

الطّرف الأيمن من المعادلة (1) يسمّى مفكوك تايلور للدّالة $f(x)$ ، حول المركز x_0 ، أمّا الحدود $(n+1)$ الأولى من المفكوك، فتسمّى كثيرة حدود تايلور من الدّرجة النّونية للدّالة $f(x)$ حول المركز، ويرمز لها بالرّمز $p_n(x)$ وتأخذ الشّكل

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

أو

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

وإذا كانت $x_0 = 0$ نحصل على ما يسمّى بصيغ ماكلورين، ويرجع تسمية الصّيغ بهذا الاسم إلى العالم الرّياضيّ الاسكتلنديّ ماكلورين (Maclourin 1698-1746)؛ أي أنّه من مفكوك تايلور

وكثيرة حدوده نحصل على ما يسمّى على التّرتيب بمفكوك ماكلورين وكثيرة حدود ماكلورين ونرمز لها بالرّمز $M_n(x)$(شكرالله، 2018،ص ص 181-182).

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(0)}{i!} x^i.$$

إذا كانت قيمة الدّالة $f(x)$ عند نقطة معيّنة معلومة $f(x_0)$ ، وقيمة المشتقّة الأولى عند نفس النّقطة معلومة $f'(x_0)$ ، يمكن استعمالهما لتقريب الدّالة $f(x)$ عند نقاط أخرى، وهذا التّقريب مفيد جداً عندما تقترب x من x_0 ، تسمّى بكثيرة حدود تايلور من الدّرجة الأولى للدّالة $f(x)$.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

.(Goldstein,2012)

(2-1-2) مثال

قرّب الدّالة $f(x) = \sin(x)$ بواسطة كثيرة حدود تايلور الثّانية والثالثة عندما $x = 0.02$ و $x_0 = 0$، ثم أوجد $\sin(0.02)$؟

الحـــــل

$$\mathrm{p}_2(x) = x,$$

$$\mathrm{p}_2(0.02) = 0.02,$$

$$\mathrm{p}_3(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

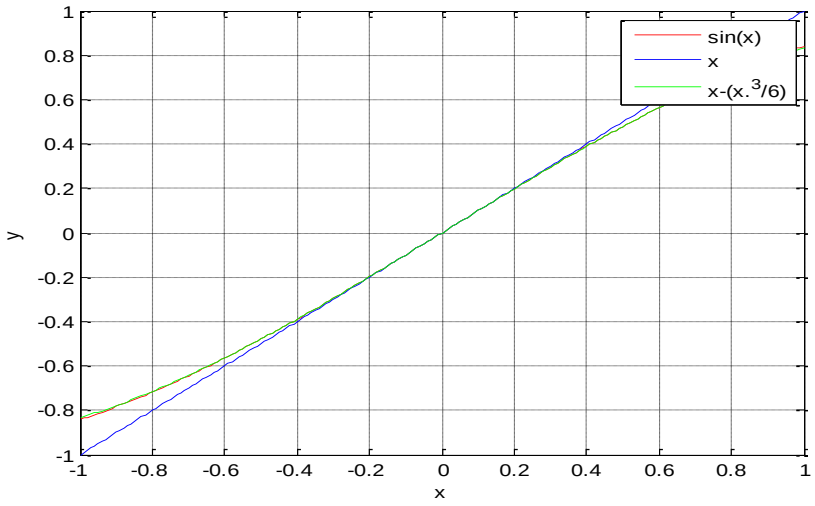
$$\mathrm{p}_3(0.02) = 0.0199986667\,,$$

$$\sin(0.02) = 0.019998666\,.$$

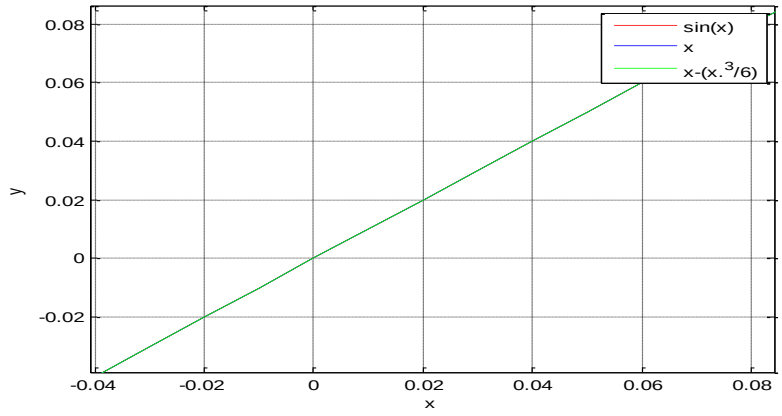
.(Marsden & Weinstein,1985)

يمكن حل المثال والتوصل إلى النّتائج نفسها باستخدام برنامج ماتلاب على النّحو الآتي:

```
sms x

f=sin(x);

t3=taylor(f,'order',3);

t4=taylor(f,'order',4);

subs(t3,0.020);

subs(t4,0.020);

y=-1:0.01:1;

plot(y,subs(f,y),'r',y,subs(t3,y),'b',y,subs(t4,y),'g');

grid

legend('sin(x)','x', 'x-(x.^3/6)');

xlabel('x');ylabel('y');
```



الشّكل(2-1) يوضح تقريب الدّالة باستخدام كثيرة حدود تايلور الثّانية x والثالثة $x - \frac{x^3}{6}$



الشّكل (2-2) يوضّح تقريب الدّالة عند النّقطة 0.02 باستخدام كثيرات الحدود

(3-1-2) ملاحظة

إذا كانت $f(x) = \sin(x)$ ، فإنّ مشتقاتها من أي رتبة وكثيرة حدود تايلور ذات الدّرجة n للدّالة $f(x)$ ، تكون على النّحو الآتي:

$$f^i(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}} \sin(x) & if \;\; i \;\; even\,, \\ (-1)^{\left(\frac{i-1}{2}\right)} \cos(x) & if \;\; i \;\; \;\; odd\,. \end{cases}$$

$$p_n(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \dfrac{x^n}{n!} & for\; n \;\; odd, \\ x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & for \;\; n \;\; even. \end{cases}$$

(حمزة،1999).

(4-1-2) بديهية Lemma

إذا كانت $p_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدّرجة n فإنّ:

$$p_n^i(x_0) = f^i(x_0) \quad , \quad i = 0,1,2, \dots, n$$

تعني أنّ المشتقّة من أي درجة للدّالة التّقريبيّة $p_n(x)$ تتساوى مع مشتقّة الدّالة الأصليّة $f(x)$ من الدّرجة نفسها عند نقطة الأساس x_0.

هذا يعني أنّ التّقريب بواسطة كثيرة الحدود تايلور يكون أكثر دقّة في الفترة الصّغيرة، وخاصةً حول النّقطة الأساسيّة x_0 (شكرالله،2018،ص 181؛ علي وأخرون،2015).

(5-1-2) مثال

أوجد كثيرة حدود تايلور من الدّرجة الأولى والثّانية والثّالثة للدّالة $f(x) = e^x$ ، ثمّ وضّح أيّهم أقرب للدّالة الأصليّة على الفترة [-1,1]؟

الحـــل

$$p_1(x) = 1 + x,$$

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

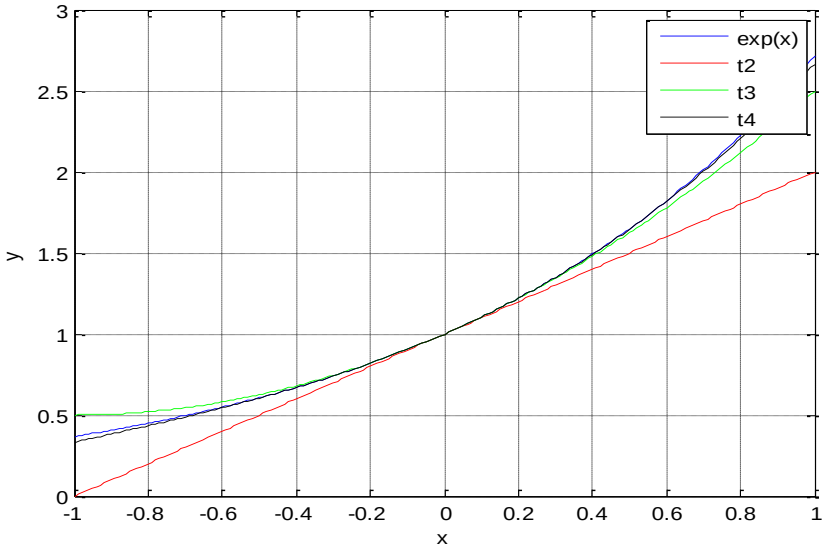
$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

(Goldstein,2012).

وباستخدام برنامج ماتلاب يمكن إيجادها بسهولة على النّحو الآتي:

```
syms x

f=exp(x);

t2=taylor(f,'order',2);

t3=taylor(f,'order',3);

t4=taylor(f,'order',4);

y=-1:0.01:1;

plot(y,subs(f,y),'b',y,subs(t2,y),'r',y,subs(t3,y),'g',y,subs(t4,y),'k');

legend('exp(x)','t2','t3','t4');
```

```
xlabel('x');ylabel('y');

grid
```



الشّكل(2-3) يوضح تقريب الدّالة e^x باستخدام كثيرة حدود تايلور، الأولى المتمثلة باللون الأحمر والثّانية المتمثّلة بالمنحنى الأخضر، والثالثة المتمثّلة بالمنحنى الأسود

الجدول (1) يوضّح المقارنة بين كثيرات الحدود تايلور والدّالة e^x

X	$f(x) = e^x$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
0.5*00*	1.6487213	1.5000000	1.6250000	1.6458333
0.05*0*	1.0512711	1.05*00000*	1.0372500	1.0512708
0.001	1.0010005	1.001*0000*	1.0010005	1.0010005
0.000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000

يُلاحظ أنّ كثيرة حدود تايلور من الدرجة الثّالثة هي الأقرب للدّالة الأصليّة، وخاصةً عندما تقترب x إلى الصّفر. (Olson,2015)

(6-1-2) مثال

استخدم كثيرة حدود تايلور من الدّرجة الثّانية حول النّقطة $x = 2$؛ لإيجاد تقريب $g'(1)$ علمًا بأنّ:

$$g(2) = 3\,, g'(2) = 1\,, g''(2) = -1, g'''(2) = 2\,.$$

حيث $g(x)$ دالة في متغير x.

الحـــل

$$g(x) \approx g(2) + g'(2)(x-2) + g''(2)\frac{(x-2)^2}{2!},$$

$$g'(x) \approx g'(2) + g''(2)(x-2) + g'''(2)\frac{(x-2)^2}{2!},$$

$$g'(x) \approx 3 - x + (x-2)^2,$$

$$g'(1) \approx 3 - 1 + (1-2)^2 = 3.$$

.(Goldstein,2012)

(2-2) استكمال كثيرة الحدود Polynomial Interpolation

في كثير من الأحيان يُتطلب تمثيل العلاقة بين متغيرين (نقاط بيانات)، ويكونان على هيئة جدول، أو في شكل دالّة غير معلومة الصّيغة، ويكون المطلوب إيجاد قيمتها عند نقطة معيّنة، أو إيجاد العلاقة في صورة كثيرة حدود، وطريقة تكوين كثيرة الحدود المطلوبة تسمّى بالاستكمال (أو الاستيفاء) (العدوي،2018،ص 127)؛ فإذا كانت النّقطة المراد معرفة قيمة الدّالة عندها تقع من ضمن النّقاط المعطاة، فيسمّى استكمالًا داخليًّا، أمّا إذا كانت خارج نقاط البيانات، فيسمّى استكمالًا خارجيًّا (صبح والحربي،2006،ص 191؛عيد،2011،ص 159).

ويُعرّف الاستكمال بأنّه طريقة لإنشاء نقاط جديدة في مدى متقطع من نقاط البيانات المعروفة؛ أي رسم منحنى مستمرّ يمرّ بنقط البيانات، وليس من الضّروري أن يمرّ منحنى الاستكمال بجميع النّقاط المعطاة (العدوي،2018،ص 127).

ومن أهمّ مميزات الاستكمال أو تقريب المنحنى إمكانيّة تحديد قيمة الدّالة عند نقاط غير موجودة من ضمن مجموعة النّقاط المعطاة، كما يلعب دورًا كبيرًا في التّكامل العدديّ، والحـــلّ العدديّ للمعادلات التّفاضليّة، وبطريقة التّوصيل بين النّقاط تُقسم طرق الاستكمال؛ فمثلًا: إذا كان التّوصيل عن طريق خطوط مستقيمة، فيُسمى الاستكمال الخطّيّ، وإذا كان عن طريق كثيرة الحدود، فيُسمى

الاستكمال عن طريق كثيرة الحدود، وهناك الاستكمال عن طريق الدوال القياسيّة، مثل: طريقة لاجرانج (بعاج،2017؛العدوي،2018،ص ص 128-129).

(1-2-2) طريقة الاستكمال لاجرانج Lagrange interpolation method

لقد سُمّيت بهذا الاسم نسبة للعالم الرّياضيّ الفرنسيّ لاجرانج Lagrange، وتنصّ على أنّ هناك عدد n من نقاط البيانات (x_i, y_i) حيث $i = 1,2, \dots, n$ ، والمطلوب إيجاد كثيرة حدود من الدّرجة n ، تمرّ بتلك النّقاط، وبشرط أن تتساوى قيم كثيرة الحدود التّقريبيّة مع قيم الدّالة الأصليّة عند x_i؛ أي ينعدم الخطأ بلغة الرياضيات يعني أنّ:

$$L_n(x_i) = y_i = f(x_i) \quad for\ all \quad i = 0,1, \dots, n \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

وبالتالي تكون كثيرة حدود لاجرانج على الصّورة الآتية:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, L_{i,n}(x).$$

(Kira,2019;Sastry,2012,pp101-103) (بعاج،2017؛عيد،2011).

حيث L_i تُسمّى بالدوال الأساسية، $y_i = f(x_i)$ ودرجة كثيرة الحدود تعتمد على عدد النّقاط المعطاة، التي لا يشترط فيها التّرتيب، وكلّما ازدادت عدد النّقاط تزداد درجة كثيرة الحدود، ومن ثمّ نتيجة أدقّ وخطأ أقل، ولكن إذا كان عدد النّقاط كبيرًا جدًّا، فإنّ هذا النّوع من الاستكمال يكون غير سلس، ونحتاج إلى الحاسب الآلي أحياناً (العدوي،2018،ص ص136-139).

فعند وجود نقطتان (x_1, y_1)و(x_0, y_0)، فأفضل منحنى يوصل بين النّقطتين هو خط مستقيم، والدّالة كثيرة الحدود التّقريبيّة $p_1(x)$ ، التي ترسم الخط المستقيم على النّحو الآتي:

$$p_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 . \qquad \rightarrow (2)$$

إذا كان $x = x_0$ فإنّ:

$$p_1(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x_0 - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 = y_0 = f(x_0).$$

إذا كان $x = x_1$ فإنّ:

$$p_1(x_1) = \frac{(x_1 - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 = y_1 = f(x_1).$$

أي أنّ $p_1(x)$ تحقّق الشّرط (1)، وتسمّى بكثيرة حدود لاجرانج من الدّرجة الأولى، وهي معادلة خط مستقيم، ويمكن إثبات ذلك باستخدام قوانين الهندسة التّحليلية (شكر الله،2019،ص ص2-4).

أمّا إذا كانت هناك ثلاث نقاط (x_0, y_0) و(x_1, y_1) و(x_2, y_2)، فإنّ أفضل منحنى يمرّ بهذه النّقاط هو منحنى قطع مكافئ Parabola ، أو منحنى كثيرة الحدود لاجرانج التقريبيّة من الدّرجة الثّانية، وتكون على النّحو الآتي:

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \ . \qquad \rightarrow (3)$$

ولتعميم النّتائج يمكن فرض أنّه توجد مجموعة نقاط (x_0, y_0)، (x_1, y_1)، ...، (x_n, y_n)؛ فإنّ كثيرة حدود لاجرانج النّونيّة تكون كالآتي:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{i,n}(x) y_i \,,$$

حيث $y_i = f(x_i)$

$$L_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \,,$$

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 & : \ i \neq j \\ 1 & : \ i = j \end{cases}$$

البسط في $L_i(x)$ لا يحتوي على $(x - x_i)$, والمقام لا يحتوي على $(x_i - x_i)$, ومجموع معاملات لاجرانج تساوي واحد

(شكرالله،2019،ص ص 4-6) (Carothers,1998).

(2-2-2) ملاحظة

إذا كانت النّقاط المعطاة $x_0, x_1, \dots, x_n$ متساوية البعد فيما بينها، أي أنّ:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h,$$

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad for\ all\ \ i = 0,1, \dots, n-1,$$

$$x_1 = x_0 + h \ \ , x_2 = x_0 + 2h\ , \dots , x_i = x_0 + ih.$$

يُفرض أن $s = \frac{x - x_0}{h}$ فإنّ:

$$x - x_i = x_0 + hs - (x_0 + ih) = h(s - i),$$

$$x_j - x_i = x_0 + jh - (x_0 + ih) = h(j - i).$$

بالتّعويض في حدوديّات لاجرانج يكون:

$$L_j(s) = \frac{h^n s(s-1)(s-2)\dots(s-n)}{h^n (j-1)(j-2)\dots(j-n)} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{s-i}{j-i}.$$

وكثيرة حدود لاجرانج في هذه الحالة هي:

$$p_n(s) = \sum_{j=0}^{n} L_j(s) f_j \ .$$

(صبح والحربي،2006).

(3-2-2) مثال

أوجد كثيرة حدود لاجرانج للدّالة $f(x) = 3^x$ عند النّقاط $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$؟

الحـــــــل

النّقاط المعطاة في هذا المثال متساوية البعد فيما بينها $h = 1\,, n = 2$

$$f_0 = \frac{1}{3}\,, f_1 = 1\,, f_2 = 3$$

$$L_0(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)} = \frac{(s-1)(s-2)}{2},$$

$$L_1(s) = \frac{s(s-2)}{(-1)(1)} = -s(s-2) \quad , L_2(s) = \frac{s(s-1)}{(2)(1)} = \frac{s(s-1)}{2},$$

$$p_2(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{2}\frac{1}{3} + -s(s-2) + \frac{s(s-1)}{2}3,$$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = x + 1,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{6}x(x-1) - (x+1)(x-1) + \frac{3}{2}x(x+1) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1.$$

(صبح والحربي،2006،ص ص 200-201).

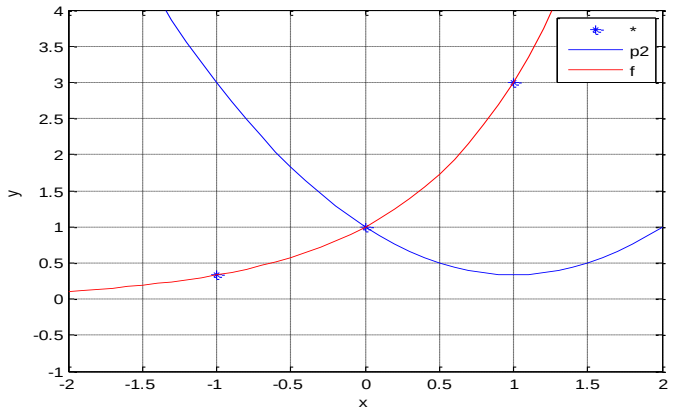
برنامج ماتلاب لحل المثال:

```
function [p,r,s]=lagrangepoly(x,y,xx)
x=[1 2 3 4 5];
y=[55993 57839 59691 61203 67039];
%[p,r,s]=lagrangepoly(x,y);
xx=0.5:0.01:8.5;
if size(x,1)>1;x=x';
end
    if size(y,1)>1;y=y';
    end
```

```
    if size(x,1)>1 ||size(y,1)>1 ||size(x,2)~=size(y,2)
        displaing error
    end %end of scope of if
    N=length(x);
    pvals=zeros(N,N);
    for i=1:N
        pp=poly(x((1:N)~=i));
        pvals(i,:)=pp./polyval(pp,x(i));
    end
    p=y*pvals;
    if nargin==3
        yy=polyval(p,xx);
        p=yy;
    end
    if nargout>1
        r=roots(((N-1):-1:1).*p(1:(N-1)));
        if nargout>2
            s=polyval(p,r);
        end
    end
```

ويمكن التّوضيح بالرّسم

```
syms x
x=-2:0.1:2;
xx=[-1 0 1];
y=[1/3 1 3];
f=3.^x;
p2=0.6667*x.^2-1.3333*x+1.0000;
plot(xx,y,'*',x,p2,'b',x,f,'r');
axis([-2 2 -1 4]);
grid
legend('*','p2','f');
xlabel('x');ylabel('y');
```



الشّكل (4-2) يوضّح الدّالة $f(x) = 3^x$ المتمثّلة بالمنحنى الأحمر، وكثيرة حدود لاجرانج الثّانية المتمثّلة بالمنحنى الأزرق

(4-2-2) مثال

استخدم كثيرات حدود لاجرانج الملائمة للبيانات الآتية، ثمّ أوجد القيمة التّقريبيّة $p_2(1)$

x	-1	0	2
$f(x)$	2	-1	5

الحـــــــــــل

$$L_0(x) = \frac{1}{3}x(x-2) \quad , \quad L_1(x) = \frac{-1}{2}(x+1)(x-2),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}x(x+1),$$

$$p_2(x) = 2x^2 - x - 1.$$

$$p_2(1) = 2 * 1^2 - 1 - 1 = 0$$

(صبح والحربي،2006،ص ص 198-199).

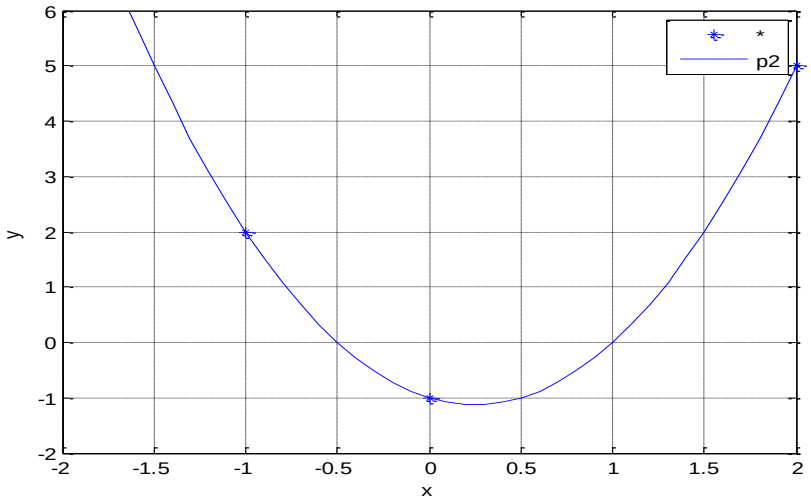
```
function [p,r,s]=lagrangepoly(x,y,xx)
x=[-1 0 2];
y=[2 -1 5];
%[p,r,s]=lagrangepoly(x,y);
xx=0.5:0.01:8.5;
if size(x,1)>1;x=x';
end
    if size(y,1)>1;y=y';
    end
    if size(x,1)>1 ||size(y,1)>1 ||size(x,2)~=size(y,2)
    end
    N=length(x);
    pvals=zeros(N,N);
    for i=1:N
        pp=poly(x((1:N)~=i));
```

```
        pvals(i,:)=pp./polyval(pp,x(i));
    end
    p=y*pvals;
    if nargin==3
        yy=polyval(p,xx);
        p=yy;
    end
    if nargout>1
        r=roots(((N-1):-1:1).*p(1:(N-1)));
        if nargout>2
   s=polyval(p,r);
```

```
        end
    end
p=2*x.^2-x-1;
x=1;
polyval(p,x);
```

ولتوضيح ذلك بالرّسم يُستخدم الماتلاب على النّحو الآتي:

```
syms x
x=-2:0.1:2;
xx=[-1 0 2];
y=[2 -1 5];
p2=2*x.^2-x-1;
plot(xx,y,'*',x,p2,'b');
axis([-2 2 -2 6]);
grid
legend('*','p2');
xlabel('x');ylabel('y');
```



الشّكل (2-5) يوضّح كثرة حدود لاجرانج الثّانية ونقاط البيانات

(5-2-2) مميزات تقريب لاجرانج

1- لا تحتاج لأن تكون القيم أو النّقاط متساوية البعد فيما بينها.

2- توضّح تأثير الدّالة $f(x)$.

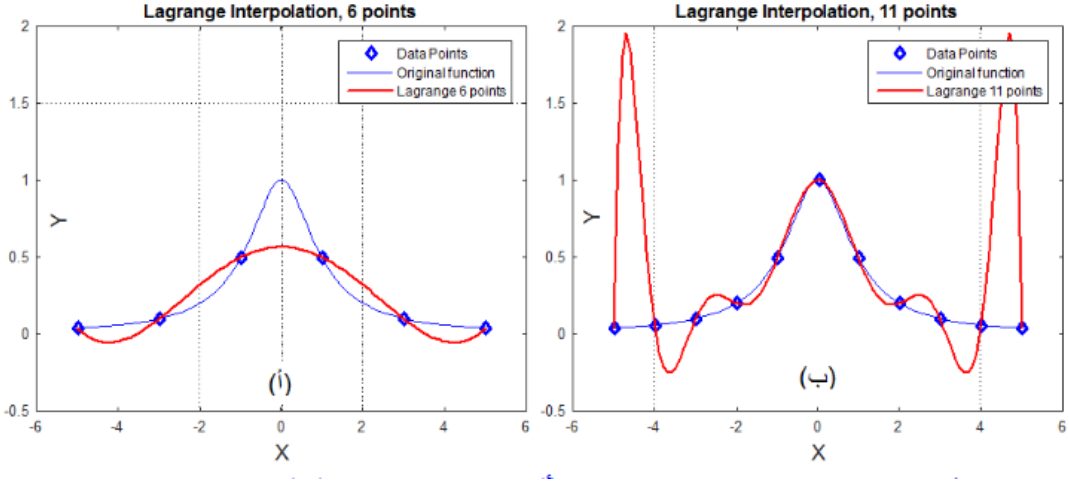
(بعاج،2017).

(6-2-2) عيوب طريقة لاجرانج

1- الزّيادة أو النّقصان في عدد النّقاط يتطلّب إعادة حسابات.

2- هذه الطريقة متعبة حسابيًّا.

3- عند زيادة درجة كثيرة الحدود، دقّة التّقريب في منتصف الشّكل تكون أفضل أحياناً، بينما تضعف عند الأطراف، مثلًا: عند تطبيق طريقة لاجرانج على الدّالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ عند11 و$n = 6$ (بعاج،2017؛العدوي،2018،ص 139).



الشّكل (2-6) يوضّح كثيرة حدود لاجرانج لتقريب الدّالة (أ) باستخدام 6 نقاط و(ب) باستخدام 11 نقطة (العدوي،2018،ص 140)

(2-2-7) نظريّة (تقريب متعدّدة حدود لاجرانج):

بافتراض أنّ الدّالة $f(x)$ متّصلة، وجميع مشتقاتها إلى الرّتبة (n+1) متّصلة أيضًا على الفترة $[a,b]$ بحيث $x_0, x_1, \dots, x_n, x \in [a,b]$ فإنّ:

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x),$$

حيث $p_n(x)$ كثيرة حدود تقريبيّة لدالة $f(x)$

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x).$$

بينما الخطأ يكون على النّحو الآتي:

$$E_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f^{n+1}(c)}{(n+1)!},$$

. (Aleyan,2013) $c = c(x) \in [a, b]$

(صبح والحربي،2006،ص 201).

لمعرفة برهان هذه النظريّة، يمكن الرّجوع للمرجع (صبح والحربي،2006،ص 201).

(3-2) كثيرات حدود تشبيشيف Chebyshev Polynomials

تُعدّ كثيرات حدود تشبيشيف من أكثر كثيرات الحدود المتعامدة شيوعًا، وأسهلها إيجادًا، وستُذكر الأسباب من ضمن الخواص أو الخصائص، وسُمّيت بهذا الاسم نسبة للعالم الرّوسي Chebyshev (1821-1894).

(1-3-2) تعريف كثيرات حدود تشبيشيف Definition of chebyshev polynomials

لتوضيح كيفيّة استخدام تقريب تشبيشيف، لإيجاد متعدّدة حدود تقريبيّة، أوّلًا يجب التّعرّف على كثرة حدود تشبيشيف الجبريّة من النّوع الأوّل ذات الدّرجة النّونيّة، التي تبدو كدالّة مثلثيّة على النّحو الآتي:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)) \quad , x \in [-1,1] \ , n > 0,$$

وبواسطة القاعدة المثلثيّة التي تنصّ على:

$$\cos(n+1)\,\theta + \cos(n-1)\,\theta = 2\cos(n\theta)\cos(\theta),$$

حيث $\theta = \cos^{-1}(x)$ و $x = \cos(\theta)$ و $T_n(x) = \cos(n\theta)$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x),$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad ; n \geq 1.$$

(Mudde,2017; Balcerzak& Pedzich, n.d;Sastry, 2012,p149)

والنّوع الأوّل من كثيرات حدود تشبيشيف هي حلّ للمعادلة التّفاضليّة الآتية:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}f(x) - x\frac{d}{dx}f(x) + n^2 f(x) = 0.$$

(Sastry,2012,p150; Vojcinak et al,n.d) (الدكاك،2013-2014).

ونموذج رودريج لكثيرات حدود تشبيشيف هو:

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

(Vojcinak et al,n.d).

ويمكن الحصول على كثيرة حدود تشبيشيف من أي درجة على النّحو الآتي:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\cos^{-1}(x)) = x,$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 6x^2 + 1,$$

(Vojcinak et al,n.d).

إذا كان n عددًا فرديًّا، فإنّ $T_n(x)$ تحتوي على قوًى فرديّة لـx ، وإذا كان n عددًا زوجيًّا، فإنّ $T_n(x)$ تحتوي على قوى زوجيّة لـx (Carothers,1998) .

أما الدّالة المولّدة لكثيرات حدود تشبيشيف من النّوع الأوّل فهي:

$$\frac{1-xt}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n.$$

.(Victor et al,2016)

أمّا النّوع الثّاني من كثيرات حدود تشبيشيف فهي:

$$U_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

تكون متعامدة مع دالة الوزن $w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ على الفترة $[-1,1]$ بحيث:

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),$$

$$T_n'(x) = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta} = nU_{n-1}(x),$$

$$U_n(x) - xU_{n-1}(x) = T_n(x).$$

$$U_0(x) = T_1'(x) = 1 \ ,$$

$$U_1(x) = \frac{1}{2}T_2'(x) = 2x,$$

$$U_2(x) = \frac{1}{3}T_3'(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = \frac{1}{4}T_4'(x) = 8x^3 - 3x,$$

(Carothers,1998; Pedzich & Balcerzak,n.d; Vojcinak et al,n.d)

و هي حلٌّ للمعادلة التّفاضليّة الآتية:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}f(x) - 3x\frac{d}{dx}f(x) + n(n+2)f(x) = 0.$$

والدّالة المولدة لكثيرات حدود تشبيشيف من النوع الثّاني هي:

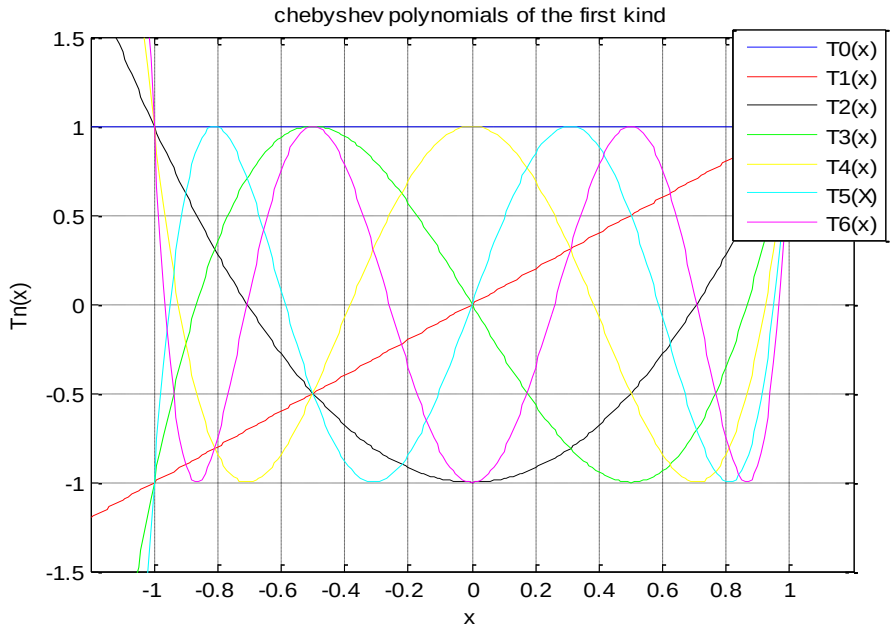
$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = U_0 + U_1 t + U_2 t^2 + U_3 t^3 + \cdots$$

$$= 1 + 2xt + (4x^2 - 1)t^2 + (8x^3 - 3x)t^3 + \cdots$$

.(Vojcinak et al,n.d)

ويمكن رسم كثيرات حدود تشبيشيف السبع الأولى من النوع الاول باستخدام برنامج الماتلاب على النّحو الآتي:

```
% chebyshev oplynomials

x=-1.2:0.01:1.2;

Tnx0=cos(0*acos(x));

Tnx1=cos(1*acos(x));

Tnx2=cos(2*acos(x));

Tnx3=cos(3*acos(x));

Tnx4=cos(4*acos(x));

Tnx5=cos(5*acos(x));

Tnx6=cos(6*acos(x));

plot(x,Tnx0,'B',x,Tnx1,'R',x,Tnx2,'K',x,Tnx3,'G',x,Tnx4,'Y',x,Tnx5,'C',x,Tnx6,
'M');

axis([-1.2 1.2 -1.5 1.5]);

grid;

legend('T0(x)','T1(x)','T2(x)','T3(x)','T4(x)','T5(X)','T6(x)');

title('chebyshev polynomials of the first kind');

xlabel('x'); ylabel('Tn(x)');
```



الشّكل (2-7) يوضح كثيرات حدود تشبيشيف السبع الأولى

(2-3-2) خصائص كثيرة حدود تشبيشيف Properties of chebyshev polynomials

1) كثيرة حدود تشبيشيف متعامدة على الفترة $(-1,1)$ مع دالة الوزن $w(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ على النحو التالي:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \\ \pi & n = m = 0 \end{cases}$$

2) $|T_n(x)| \leq 1 \quad , \quad x \in [-1,1]$

3) متعدّدة حدود تشبيشيف ذات الدّرجة n تملك n من الأصفار أو الجذور في الفترة $[-1,1]$.

$$\overline{x_k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \qquad for \;\; k = 1,2,\dots,n.$$

4) $T_n(x)$ لها قيم مطلقة عند $\overline{x_k}' = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

$T_n\left(\overline{x_k}'\right) = (-1)^k$, k=0,1,2,…,n فان

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad for \;\; n \geq 2\,. \qquad (5$$

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}[T_{m+n} + T_{m-n}] \qquad for \;\; m > n\;. \qquad (6$$

$$T_m\left(T_n(x)\right) = T_{mn}(x) \qquad (7$$

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \qquad (8$$

9) لأي عدد حقيقي x و $|x| > 1$ نحصل على:

$$\frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right] = \cosh(n\cosh^{-1}(x)),$$

$$\therefore T_n(\cosh(x)) = \cosh(nx).$$

$$T_n(x) \leq \left(|x| + \sqrt{x^2-1}\right)^n \qquad for \;\; |x| > 1 \;\; . \qquad (10$$

11) لأيّ جذرين متتاليين لـــ$T_n(x)$ يوجد بالضّبط جذر واحد لـــ$T_{n-1}(x)$ ولا تملك جذورًا أو أصفارًا مشتركة بين $T_n(x)$ و $T_{n-1}(x)$.

$$n = \cos\theta\,, \qquad |T_n'(x)| \leq n^2 \;\; for \;\; |x| \leq 1 \;\;, \qquad (12$$

$$T_n'(x) = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta},$$

$$T_n = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{T_{n+1}'}{n+1} - \tfrac{T_{n-1}'}{n-1}\right] \quad ; \quad n > 2 \quad \text{و} \quad |T_n'(\pm 1)| = n^2\,,$$

$$T_0 = T_1' \quad \text{و} \quad T_1 = \frac{1}{4}\,T_2'.$$

13) معامل x^n في $T_n(x)$ هو 2^{n-1} حيث $n \geq 1$, هذا يعني أنّ أكبر معامل لكثيرة حدود تشبيشيف درجتها n هو 2^{n-1}.

14) $T_{2m}(x)$ دالة فرديّة أي أنّ:

$$T_{2m}(-x) = T_{2m}(x),$$

بينما $T_{2m+1}(x)$ دالة زوجية

$$T_{2m+1}(-x) = -T_{2m+1}(x).$$

$$T_n\left[\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right] = (-1)^j \quad ; j = 0,2, \dots, n, \qquad (15$$

$$T_n\left[\cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)\right] = 0 \quad ; j = 1,3, \dots, n.$$

(Carothers,1998;Dicapua,n.d; Mudde, 2017)

(الدكاك،2013-2014؛شكرالله،2018،ص ص 198-199).

ولمعرفة أو دراسة براهين خصائص كثيرة حدود تشبيشيف يمكن الرّجوع للمرجعين

(Carothers,1998; Mudde, 2017)

(3-3-2) ملاحظة

ومن كثيرات حدود تشبيشيف السّابقة يمكن إيجاد قوى x على النّحو الآتي:

$$1 = T_0(x),$$

$$x = T_1(x),$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(T_2(x) + T_0(x)\right),$$

$$x^3 = \frac{1}{4}\left(3T_1(x) + T_3(x)\right).$$

(Sastry,2012,p151) (عيد،2011،ص 276)

وهذه الطريقة تُسهل إيجاد كثيرة حدود تقريبيّة بصورة أسرع، مثال على ذلك عند تقريب الدّالة

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4,$$

على الفترة $[-1,1]$ بواسطة كثيرة حدود تكعيبية، أوّلًا عن طريق التّعويض عن قوى x في الدّالة

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{15}{8}T_0 - \frac{7}{4}T_1 + T_2 - \frac{1}{4}T_3 + \frac{1}{8}T_4 .$$

بحذف الحدّ T_4 والتّعويض عن كثيرات حدود تشبيشيف يُتحصّل على أفضل تقريب للدّالة:

$$p(x) = \frac{7}{8} - x + 2x^2 - x^3.$$

وبدون هذا الأسلوب الذي يُسمّى economization (توفير أو الاختصار) فإنّ كثيرة حدود التّكعيبيّة التقريبيّة هي:

$$q(x) = 1 - x + x^2 - x^3.$$

.(Carothers,1998;Mudde،,2017)

(4-3-2) كثيرات الحدود تشبيشيف الوحدويّة Monic chebyshev polynomials

هي كثيرة حدود تصاغ على النّحو الآتي:

$$\tilde{T}_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0.$$

أي أنّ معامل x^n هو الواحد الصحيح

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \qquad for\ all\ \ n \geq 1,$$

$$\tilde{T}_0(x) = 1 \ , \qquad \tilde{T}_1(x) = x \ ,$$

ومنها نجد: $\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \frac{1}{2}\tilde{T}_0(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

$$x^2 = \tilde{T}_2(x) + \frac{1}{2}\tilde{T}_0(x) .$$

ومنها نجد : $\tilde{T}_3(x) = x\tilde{T}_2(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_1(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$

$$x^3 = \tilde{T}_3(x) + \frac{3}{4}\tilde{T}_1(x).$$

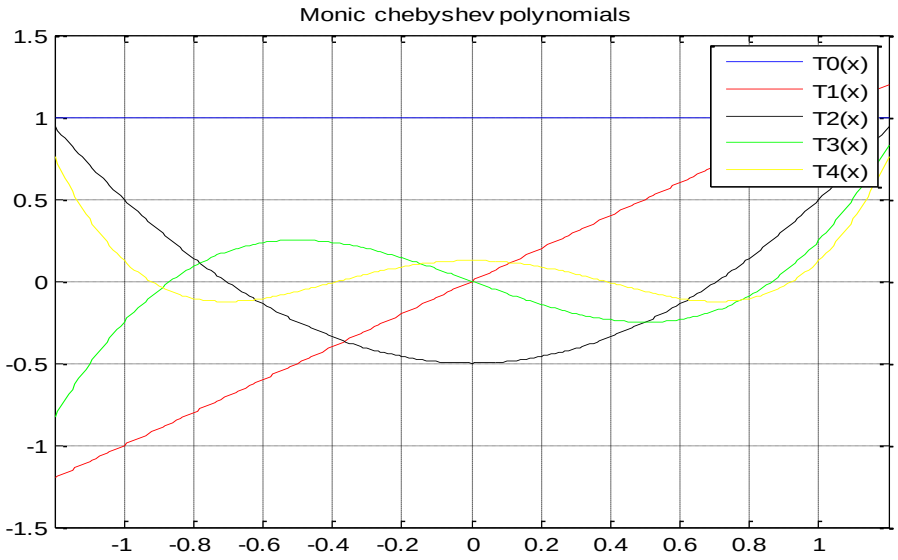
$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \quad ; \quad n \geq 2$$

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x).$$

(شكرالله،2018،ص 199).

وباستخدام برنامج الماتلاب يمكن رسم تلك الدوال:

```
%Monic chebyshev oplynomials

x=-1.2:0.01:1.2;

Tnx0=1;

Tnx1=x;

Tnx2=x.^2-1/2;

Tnx3=x.^3-3/4*x;

Tnx4=x.^4-x.^2+1/8;

plot(x,Tnx0,'B',x,Tnx1,'R',x,Tnx2,'K',x,Tnx3,'G',x,Tnx4,'Y');

axis([-1.2 1.2 -1.5 1.5]);

grid;

legend('T0(x)','T1(x)','T2(x)','T3(x)','T4(x)');

title('Monic chebyshev polynomials' );
```



الشّكل(2-8) يوضح كثيرات الحدود تشبيشيف الوحدويّة الخمس الأولى

أعلى قيمة $\tilde{T}_n(x)$ هي $\left|\tilde{T}_n(x)\right| = 2^{-1-n}$ على الفترة $[-1,1]$ وأصفار أو جدور $\tilde{T}_n(x)$ والقيم المطلقة لها على التّوالي هي:

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k = 1,2,\dots,n,$$

$$\bar{x}_k{}' = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

القيم العظمى أو الصّغرى لـ$\tilde{T}_n(x)$ تكون على النّحو الآتي:

$$\tilde{T}_n(\bar{x}_k{}') = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad , \quad k = 0,1,\dots,n.$$

ويُلاحظ أنّ العلاقة بين $T_n(x)$ و$\tilde{T}_n(x)$ علاقة خطية؛ أي أنّ أصفار كثيرات الحدود تشبيشيف الوحدوية في الفترة $[-1,1]$ هي ذاتها أصفار لـ $T_n(x)$(شكرالله،2018،ص 200).

تُستخدم كثيرة حدود تشبيشيف الوحدوية في اختزال درجة كثيرة حدود ماكلورين بدرجة واحدة، ومن ثم توزيع الخطأ على طول الفترة على النّحو الآتي:

إذا كانت $f(x)$ دالة متّصلة علي الفترة $[-1,1]$, وكثيرة حدود ماكلورين من الدّرجة n $M_n(x)$, تُقرب الدّالة $f(x)$ ونرمز لكثيرة الحدود التقريبيّة المختزلة بالرمز $p_{n-1}(x)$

بما أن $\frac{1}{a_n}[M_n(x) - p_{n-1}(x)]$ هي كثيرة حدود وحدوية درجتها n

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{a_n} M_n(x) - p_{n-1}(x)\right| \geq \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)|,$$

$$\frac{1}{a_n}[M_n(x) - p_{n-1}(x)] = \tilde{T}_n(x),$$

$$p_{n-1}(x) = M_n(x) - a_n\tilde{T}_n(x).$$

وهكذا يمكن الحصول على كثيرة حدود مختزلة، تقلّ درجة على درجة كثيرة حدود ماكلورين، أمّا الخطأ فهو:

$$\max_{x\in[-1,1]} |M_n(x) - p_{n-1}(x)| = |a_n| \frac{1}{2^{n-1}}.$$

ويمكن الحصول أيضًا على كثيرة الحدود المختزلة $p_{n-2}(x)$ من كثيرة الحدود المختزلة $p_{n-1}(x)$ على النّحو الآتي

$$p_{n-2}(x) = p_{n-1}(x) - a_{n-1}\tilde{T}_{n-1}(x).$$

(شكرالله،2018،ص ص 316-317).

(5-3-2) تحويل الفترة Interval Transform

أحيانًا، تُعرف الدّالة على الفترة $[a, b]$، ويراد تقريبها بواسطة كثيرات حدود تشبيشيف، ومن ثم فلا بدّ من إعادة صياغتها على الفترة $[-1,1]$ ويكون التّغيّر على النّحو الآتي:

$$x = t\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2},$$

$$t = 2\frac{x-a}{b-a} - 1,$$

حيث $-1 \le t \le 1$, $a \le x \le b$

وعقد تشبيشيف المناظرة لـــــ$T_{n+1}(x)$ على الفترة $[-1,1]$

$$t_k = \cos(2n+1-2k)\frac{\pi}{2n+2} \;\; ; \;\; k = 0,1,\dots,n,$$

(الدكاك،2013-2014)(Mudde,2017).

(6-3-2) ملاحظة

إذا كانت فترة تعريف الدّالة هي $[0,1]$ فتُعرف كثيرة حدود تشبيشيف على النّحو الآتي؛ وذلك باستبدال x بـــ $2x-1$:

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1) = T_{2n}\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$T_0^*(x) = 1 \quad , \quad 1 = T_0^*(x)$$

$$T_1^*(x) = x \quad , \quad x = \frac{1}{2}T_1^*(x) + 1$$

$$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1 \quad , \quad x^2 = \frac{1}{8}(3T_0^* + 4T_1^* + T_2^*)$$

$$T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1,$$

$$x^3 = \frac{1}{32}(10T_0^* + 15T_1^* + 6T_2^* + T_3^*).$$

$$T_4^*(x) = 64x^4 - 12x^3 + 64x^2 - 3,$$

$$x^4 = \frac{1}{64}T_4^* - \frac{69}{256}T_0^* - \frac{211}{512}T_1^* - \frac{23}{256}T_2^* + \frac{3}{512}T_3^*.$$

$$T_{n+1}^*(x) = 2(2x-1)T_n^* - T_{n-1}^*(x) \quad , \; n \ge 1.$$

(Mudde,2017) (الدكاك،2013-2014).

(7-3-2) مثال

قرب الدّالة $f(x) = x^3 + x^2$ إلى كثيرة حدود تربيعيّة على الفترة $[0,1]$، ثمّ على الفترة $[-3,3]$ مستخدمًا كثيرات حدود تشبيشيف ؟

الحـــــل

$$x^3 + x^2 = \frac{1}{32}(10T_0^* + 15T_1^* + 6T_2^* + T_3^*) + \frac{1}{8}(3T_0^* + 4T_1^* + T_2^*)$$

$$= \frac{11}{16}T_0^* + T_1^* + \frac{5}{16}T_2^* + \frac{1}{32}T_3^*.$$

بحذف T_3^* نجد أنّ أفضل كثيرة حدود تقريبيّة

$$p(x) = \frac{1}{32} - \frac{9}{16}x + \frac{5}{2}x^2.$$

وإذا كانت الفترة $[-3,3]$ أوّلًا، تحوّل الفترة

$$t = \frac{1}{2}(b-a)x + \frac{1}{2}(b+a),$$

$$= \frac{1}{2}(3+3)x + \frac{1}{2}(3-3) = 3x \quad , \quad x = \frac{t}{3}.$$

الأن يتم إيجاد كثيرات حدود تشبيشيف الأربع الأولى، وقوى x والتعويض في الدّالة

$$T_0^*(x) = 1 \quad , \quad 1 = T_0^*(x).$$

$$x = 3T_1^*(x) \quad , \quad T_1^*(x) = \frac{1}{3}x.$$

$$x^2 = \frac{9}{2}(T_0^* + T_2^*) \quad , \quad T_2^*(x) = \frac{2}{9}x^2 - 1.$$

$$x^3 = \frac{27}{4}T_3^* + \frac{81}{4}T_1^* \quad , \quad T_3^*(x) = \frac{4}{27}x^3 - x.$$

$$x^4 = \frac{81}{8}T_4^* + \frac{243}{8}T_0^* + \frac{81}{2}T_2^* \quad , \quad T_4^*(x) = \frac{8}{81}x^4 - \frac{8}{9}x^2 + 1.$$

$$x^3 + x^2 = \frac{27}{4}T_3^* + \frac{81}{4}T_1^* + \frac{9}{2}(T_0^* + T_2^*).$$

$$p(x) = x^2 + \frac{27}{4}x.$$

.(Mudde, 2017)

(8-3-2) نظريّة (تقريب تشبيشيف Chebyshev Approximation)

إذا كانت الدّالة $f(x)$ متّصلة على الفترة $[-1,1]$, فإنّ كثيرة حدود تشبيشيف التقريبيّة ذات الدرجة أصغر من أو تساوي n تكون على النّحو الآتي:

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x),$$

$$c_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\,(x_k),$$

$$c_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\,(x_k)T_j(x_k) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cos\left(\frac{j\pi(2k+1)}{2n+2}\right),$$

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right) \quad ; k = 0,1,2,\dots,n.$$

(عيد،2011،ص ص 276-277).

(9-3-2) مثال

أوجد كثيرة حدود تشبيشيف $p_3(x)$ لتقريب الدّالة $f(x) = e^x$ على الفترة $[-1,1]$؟

الحـــــل

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_j(x),$$

$$c_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\,(x_k),$$

$$c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cos\left(\frac{j\pi(2k+1)}{2n+2}\right),$$

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{8}\right) \quad ; k = 0,1,2,3.$$

c_0	1.2661
c_1	1.6018
c_2	0.2715
c_3	0.0438

$$p_3(x) = 0.9946 + 1.4704x + 0.5430\,x^2 + 0.1752x^3.$$

ويمكن إيجاد كثيرة حدود تشبيشيف بطريقة أخرى، بعد تقريب الدّالة بواسطة كثيرة حدود تايلور على النّحو الآتي:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

$$p_3(x) = \frac{1}{24}[30T_0 + 27T_1 + 6T_2 + T_3],$$

$$p_3(x) = \frac{1}{24}[30 + 27x + 6(2x^2 - 1) + (4x^3 - 3x)],$$

$$= 1 + x + 0.500x^2 + 0.1667x^3.$$

.(Mudde,2017)

(10-3-2) بديهية

إذا كانت $f(x)$ دالّة درجتها n و الحدّ $a_n x^n$ موجود، فإنّ أفضل تقريب للدّالة $f(x)$ بواسطة كثيرة الحدود $p(x)$ ذات الدّرجة على الأكثر $(n-1)$ في الفترة [-1,1] هو

$$p_{n-1}(x) = f(x) - a_n 2^{-n+1} T_n(x).$$

والخطأ هو $a_n 2^{-n+1}$.

(11-3-2) نظرية

إذا كان $n > 1$ و$T_n(x)$ $p_{n-1}(x) = x^n - 2^{-n+1}$ حيث $p(x)$ كثيرة حدود من الدّرجة $(n-1)$ فإنّ:

$$2^{-n+1} = \max_{|x|<1} |x^n - p(x)| < \max_{|x|<1} |x^n - q(x)|,$$

حيث $q(x)$ متعدّدة حدود من الدّرجة $(n-1)$ ؟

البرهـــــان

بما أن $2^{-n+1}T_n(x)$ لها أكبر معامل وهو 1، $p(x)$ كثيرة حدود من الدّرجة $(n-1)$

$$x_k = \cos\left[(n-k)\frac{\pi}{n}\right] \qquad k = 0,1,2,\dots,n,$$

فإنّ $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$

$$T_n(x_k) = T_n\left[\cos\left((n-k)\frac{\pi}{n}\right)\right] = (-1)^{n-k}$$

وبما أنّ $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos(n\theta)| \le 1\,, \quad -1 \le x \le 1$

$$x^n - p(x) = 2^{-n+1} T_n(x),$$

$$|x^n - p(x)| \leq 2^{-n+1} \quad , \qquad k = 0,1,2, \dots, n \,,$$

$$x_k^n - p(x_k) = 2^{-n+1} T_n(x_k) = (-1)^{n-k} 2^{-n+1}.$$

(Carothers,1998;Mudde,2017) (الدكاك،2013-2014).

(4-2) كثيرات حدود ليجندرLegendre Polynomials

كثيرات حدود ليجندر من أيّ درجة تأخذ الشّكل الآتي:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{[n]} \frac{(-1)^i (2n-2i)!}{i!\,(n-2i)!\,(n-i)!} x^{n-2i} \,,$$

$$[n] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & if \qquad n = 0,2,4, \dots \\ \dfrac{n-1}{2} & if \qquad n = 1,3,5, \dots \end{cases} \quad .$$

وهي حلّ للمعادلة التّفاضليّة الآتية

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \,,$$

بحيث n عدد صحيح، $x = \cos \emptyset$ أي $P_n(x)$ كثيرة حدود درجتها n زوجيّة إذا كانت n زوجيّة، وتكون فرديّة إذا كانت n فرديّة، وسمّيت بهذا الاسم نسبة للعالم الفرنسيّ Legendre (1833 -1752)

(Carothers,1998; Poularikas,1999;Sastry,2012,p240)

(1-4-2) صيغة رودريج لكثيرات حدود ليجندر Rodrigues's Formula for Legendre Polynomials

توجد صيغة أخرى لكثيرات حدود ليجندر أكثر استخدامًا من الصّيغة السّابقة؛ وذلك لسهولة تطبيقها تسمّى بصيغة رودريج Rodrigues's؛ نسبة إلى عالم الرّياضيّات الفرنسيّ Rodrigues, B.o.1794-1851. وباستخدام المشتقّة النّونيّة للدّالة $f(x) = x^{2n-2i}$ يُتحصّل على هذه الصّيغة على النّحو الآتي:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n} x^{2n-2i} = \frac{(2n-2i)!}{(n-2i)!} x^{n-2i} \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

حيث$[n]$,i=1,2,3,…, والشّكل العام لكثيرات حدود ليجندر هو:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^{\{n\}} \frac{(-1)^i n!\,(2n-2i)!}{i!\,(n-i)!\,(n-2i)!} x^{n-2i} \rightarrow (2)$$

وبالتّعويض بالعلاقة (1) في (2) ينتج:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{i=0}^{\{n\}} \frac{(-1)^i n!}{i!\,(n-i)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2i} ,$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{i=0}^{\{n\}} \frac{(-1)^i n!}{i!\,(n-i)!} x^{2n-2i} .$$

والآن بجعل المتسلسلة الأخيرة تبدأ من $i = 0$ إلي $i = n$ بدلًا من $i = \{n\}$؛ وذلك لأنّ الحدود الزّائدة عن العدد $\{n\}$ تكون في قوى x أقل من n، بحيث تكون مشتقّاتها صفريّة ومن نّظريّة ذات الحدين Binomial Theorem نجد أنّ:

$$(x^2-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n!}{i!(n-i)!} (x^2)^{(n-i)}.$$

وبالتّعويض يُحصل على شكل رودريج لكثيرات حدود ليجندر من النّوع الأوّل:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] \quad for\ n = 0,1,2, \ldots \quad .$$

(Poularikas،1999؛شكر الله،2018،ص ص 33-34).

معرفة على الفترة $[-1,1]$ أمّا النّوع الثّاني فهو:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} p_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$p_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}[(x^2-1)^n] = 0 \qquad m > n,$$

$$p_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad p_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$p_2^2(x) = 3(1-x^2) \quad , \quad p_3^2(x) = 15x(1-x^2),$$

$$p_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad p_n'(-1) = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

.(Poularikas,1999)

(2-4-2) الدّالة المولدة لكثيرات حدود ليجندر Generating Function for Legendre Polynomials

الدّالة المولّدة لكثيرة حدود ليجندر أو ما يسمّى بالدّالة العامّة تأخذ الشّكل الآتي:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots & |t| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^{-n-1} = p_0 t^{-1} + p_1 t^{-2} + p_2 t^{-3} + \cdots & |t| > 1 \end{cases}$$

(Poularikas,1999) (شكر الله،2018،ص 35)

(2-4-3) بعض الصّور الاختزاليّة لكثيرات حدود ليجندر Reductionist Variations of Legendre Polynomial

$$(n+1)p_{n+1}(x) + np_{n-1}(x) = (2n+1)xp_n(x) \quad , n \geq 1 \qquad (1$$

$$p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x) = (2n+1)p_n(x) \qquad for\ n = 0,1,2,\ldots \qquad (2$$

$$xp_n'(x) - p_{n-1}'(x) = np_n(x) \quad , n = 1,2,3,\ldots \qquad (3$$

$$p_{n+1}'(x) = (n+1)p_n(x) + xp_n'(x) \qquad (4$$

$$p_{n+1}'(x) + p_{n-1}'(x) = (2x)p_n'(x) + p_n(x) \quad , \ n = 1,2,\ldots \qquad (5$$

$$(x^2-1)p_n'(x) = nxp_n(x) - np_{n-1}(x) \qquad (6$$

$$(2n+1)(x^2-1)p_n'(x) = n(n+1)[p_{n+1}(x) - p_{n-1}(x)] \qquad (7$$

$$(1-x^2)p_n'(x) = (n+1)xp_n(x) - (n+1)p_{n+1}(x) \quad (8$$

$$(n+1-m)p_{n+1}^m(x) = (2n+1)xp_n^m(x) - (n+m)p_{n-1}^m(x) \quad (9$$

$$p_1(x) = x \quad , \quad p_0(x) = 1 \quad (10$$

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad , \quad p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$p_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$p_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x$$

$$p_6(x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$$

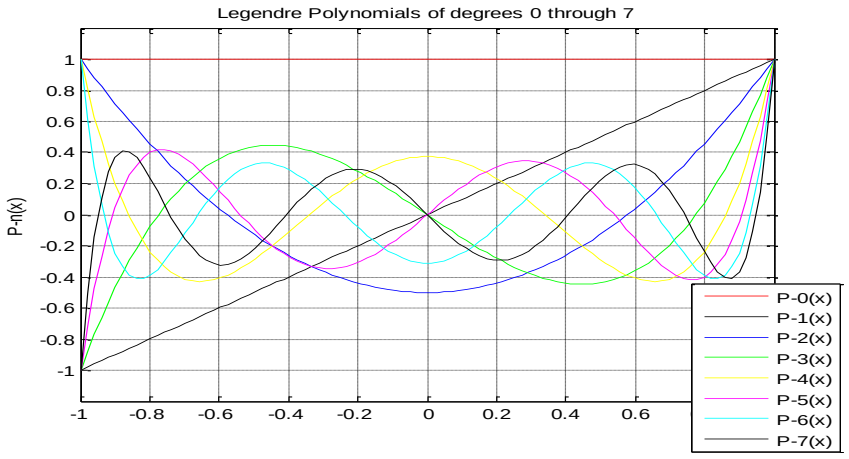
$$p_7(x) = \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

و تُرسم هذه الدوال باستخدام برنامج الماتلاب على النّحو الآتي:

```
clear all; close all;clc;

syms x

x=linspace(-1,1,100);

color=['r' 'k' 'b' 'g' 'y' 'm' 'c' 'k'];

for n=1:8

    nj=n-1;

    for i=1:length(x)

        if nj==0

            f=@(x)1;

        elseif nj==1

            f=@(x)x;
```

```
        elseif nj==2

            f=@(x)(3/2)*x.^2-0.5;

        elseif nj==3

            f=@(x)(5/2)*x.^3-(3/2)*x;

        elseif nj==4

            f=@(x)(35/8)*x.^4-(30/8)*x.^2+(3/8);

        elseif nj==5

            f=@(x)(63/8)*x.^5-(70/8)*x'.^3+(15/8)*x;

        elseif nj==6

            f=@(x)(231/16)*x.^6-(315/16)*x.^4+(105/16)*x.^2-(5/16);

        elseif nj==7

            f=@(x)(429/16)*x.^7-(693/16)*x.^5+(315/16)*x.^3-(35/16)*x;

        end

        y(i,n)=f(x(i));

    end

    plot(x,y(:,n),color(n))

    hold on

end

h=legend('P-0(x)','P-1(x)','P-2(x)','P-3(x)','P-4(x)','P-5(x)','P-6(x)','P-
7(x)',16);

set(h,'interpreter','none')

hold off

grid on

xlim([-1 1]);

ylim([-1.2 1.2]);

ylabel('P-n(x)')
```

```
title('Legendre Polynomials of degrees 0 through 7')
```



الشّكل (2-9) يوضّح كثيرات حدود ليجندر الثمانية الأولى

$$p_n(0) = \begin{cases} 0 & n \quad \text{فردي} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n)!}{2^n\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} & n \quad \text{زوجي} \end{cases} \qquad (11$$

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x) \quad , \quad p_n(-1) = (-1)^n \quad , \quad p_n(1) = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)f^n(x)\,dx \qquad (12$$

(Carothers,1998; Poularikas,1999)

(شكرالله،2018،ص ص 35-41؛عيد،2011،ص 278).

(4-4-2) خواصّ كثيرات حدود ليجندر Properties of legendre polynomials

$$\int_{-1}^{1} x^i p_n(x)\,dx = 0 \quad , \quad i = 0,1,2,\dots,n-1 \qquad (1$$

$$|p_n(x)| \le 1 \quad , \quad |x| \le 1 \qquad (2$$

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\,dx = 0 \quad , \quad n = 1,2,\dots \qquad (3$$

$$\int_{-1}^{1} x^n p_n(x)\,dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \qquad (4$$

$$\int_{-1}^{1}[p_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1} \quad (5$$

$$\int_{-1}^{1}\left(p_n^m(x)\right)^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (6$$

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\,dx = 0 \quad , \quad m \neq n \quad (7$$

$$\int_{-1}^{1} p_n^m(x)p_k^m(x)\,dx = 0 \quad , \quad k \neq n \quad (8$$

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p'_{n+1}(x)\,dx = 2 \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \quad (9$$

$$\int_{-1}^{n} p_n(x)dx = \frac{p_{n+1}(x)-p_{n-1}(x)}{2n+1} \quad , \quad n \geq 1 \quad (10$$

$$\int_{-1}^{1} x^2p_{n+1}(x)p_{n-1}(x)\,dx = \frac{2n(n+1)}{(4n^2-1)(2n+3)} \quad , \quad n \geq 1 \quad (11$$

$$|p_n(\cos\gamma)| \leq \sqrt{2}\frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}\sqrt{\sin\gamma}} \quad , 0 < \gamma < \pi \quad , n = 1,2,\dots \quad (12$$

(Poularikas,1999)(عيد،2011،ص ص 278-279).

كما يمكن حساب قوى x حسابًا مشابهً لما تُحصّل عليه في كثيرات حدود تشبيشيف بدلالة كثيرات حدود ليجندر، على النحو التالي:

$$1 = p_0(x) \quad , \quad x = p_1(x) \quad , \quad x^2 = \frac{1}{3}\left(p_0(x) + 2p_1(x)\right),$$

$$x^3 = \frac{1}{5}\left(3p_1(x) + 2p_3(x)\right),$$

$$x^4 = \frac{1}{35}\left(7p_0(x) + 20p_2(x) + 8p_4(x)\right).$$

(عيد،2011،ص 278).

(5-4-2) تقريب ليجندر Legendre Approximation

من المعروف أنّ كثيرة حدود ليجندر من الدوال المتعامدة Orthogonal function على الفترة [-1,1]؛ لذا ستُستخدم هذه الخاصّيّة في تقريب الدّالة $f(x)$؛ فهي متّصلة ومشتقّاتها متّصلة أيضًا على الفترة نفسها، وعند افتراض أنّ الدّالة يمكن وضعها في الشّكل الآتي:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

حيث $p_n(x)$ كثيرات حدود ليجندر، وبضرب طرفي المعادلة السّابقة في الدّالة $p_m(x)$؛ حيث m ثابت، ومن ثمّ إجراء عمليّة التّكامل من $x = -1$ الى $x = 1$ يُحصل على:

$$\int_{-1}^{1} f(x)p_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx\,.$$

ومن خاصّيّة التّعامد نلاحظ أنّ كلّ حدود المتسلسلة $\sum a_n \int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx$ هي أصفار، إلّا إذا كانت $m = n$ ،وفي هذه الحالة يُلحظ أن:

$$\int_{-1}^{1} f(x)p_m(x)dx = a_m \int_{-1}^{1} [p_m(x)]^2 dx = a_m \left[\frac{2}{2m+1}\right].$$

ومن ثمّ فإنّ:

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)p_m(x)dx.$$

(شكرالله،2018،ص ص 41-42؛عيد،2011،ص 279).

وإذا كانت فترة التّقريب هي [a ,b] بحيث a<b فإنّ:

$$t = \frac{2}{b-a}\left[x - \frac{b+a}{2}\right],$$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}.$$

(Poularikas,1999) (شكرالله،2018،ص 203؛عيد،2011،ص 280).

(7-4-2) مثال

استخدم كثيرات حدود ليجندر في الحصول على صورة تقريبيّة للدّالة $f(x) = x^2$ ؟.

الحـــل

$$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x) \quad = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \cdots \quad .$$

ويمكن حساب بعض المعاملات $\{a_n\}_{n\geq 0}$ باستخدام العلاقة

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) p_n(x) dx \, ,$$

بما أنّ الدّالة $f(x) = x^2$ زوجية، وإذا كانت $p_n(x)$ فرديّة، فإنّ $x^2 p_n(x)$ تكون فرديّة أيضًا، والتّكامل يكون صفرًا، أي أنّ... $a_n = 0, n = 1,3,5,$ ، أمّا إذا كانت $p_n(x)$ زوجيّة؛ أي $n = 0,2$؛ فيكون التّكامل كما سبق، وهكذا نجد أنّ الدّالة $f(x) = x^2$ يمكن وضعها في الصّورة التّقريبيّة.

$$x^2 = \frac{1}{3} p_0(x) + \frac{2}{3} p_2(x) + \cdots \quad .$$

(شكرالله،2018،ص ص 42-43).

(8-4-2) مثال

أوجد كثيرة حدود ليجندر من الدّرجة الثّانية للدّالة $f(x) = \sin x$ في المجال $[0, \pi]$ ؟.

الحـــل

أوّلًا، نغيّر الفترة من $[0, \pi]$ إلى الفترة $[-1,1]$؛ حيث $x = \frac{1}{2}(1+t)\pi$، وتأخذ الدّالة الشّكل الآتي بدلالة المتغيّر t.

$$f(t) = \sin\left[\frac{1}{2}(1+t)\pi\right] .$$

وكثيرة الحدود التّقريبيّة (من الدّرجة الثّانية) تأخذ الشّكل

$$Y(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x),$$

حيث:

$$p_0(x) = 1 \ \ , p_1(x) = x \ \ , p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,.$$

ويبقى إيجاد الثّوابت a_0, a_1, a_2، ويتم على النّحو الآتي:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad a_1 = 0 \ , \ \ a_2 = \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)$$

$$Y(t) = \frac{15\pi^2 t^2 - 3\pi^2 - 180t^2 + 60}{\pi^3}.$$

(عيد،2011،ص ص 279-280).

(9-4-2) مثال

قرّب الدّالة بواسطة كثيرات حدود ليجندر

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < \ x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

الحـــــــل

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)dx\,,$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{0} f(x)p_n(x)dx \ + \int_{0}^{1} f(x)p_n(x)dx \quad \right].$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} p_n(x)dx.$$

$$p_0(x) = 1 \ \ , p_1(x) = x \ \ , p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = \frac{3}{4} \quad , \quad a_2 = \frac{5}{2},$$

$$f(x) = \frac{1}{2}p_0 + \frac{3}{4}p_1 - \frac{5}{2}p_2 + \cdots .$$

.(Poularikas،,1999)

(10-4-2) مثال

باستخدام خواص كثيرات حدود ليجندر أوجد قيمة التكاملات الأتية:

1- $\int_{-1}^{1} x^3 p_4(x)dx$ 2 - $\int_{-1}^{1} x^2 p_2(x)\,dx$

الحـــل

$$\int_{-1}^{1} x^3 p_4(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{8}(35x^4 + 30x^2 + 3)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 p_2(x)\,dx \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)x^2\,dx = \frac{4}{15}$$

.(Shoemaker,1962)

(11-4-2) مثال

أوجد صورة تقريبيّة للدّالة $f(x) = e^x$ المعرّفة على الفترة $[-1,1]$، وذلك باستخدام كثيرة حدود ليجندر الثّالثة والثّانية والأولى، ثمّ قارن النّتائج مع كثيرة حدود ماكلورين المقربة $M_3(x)$ للدّالة نفسها ؟.

الحـــل

لتقريب $f(x)$ بكثيرات حدود ليجندر يُفرض أنّه أمكن تمثيلها على النّحو الآتي:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n p_n(x)$$

$$= a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x),$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x 1 dx = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right),$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^x x dx = \frac{3}{e},$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} e^x \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right] dx = \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right),$$

$$a_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} e^x \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) dx = \frac{259}{2e} - \frac{35e}{2}.$$

$$f(x) = 0.996 + 0.6443x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{1} a_n p_n(x) \ = 0.9963 + 1.1036x,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2} a_n p_n(x) = 0.9963 + 1.1036x + 0.5367x^2,$$

$$M_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} x^i = 1.0000 + x + 0.5000x^2 + 0.1667x^3 .$$

الجدول (2) يوضّح المقارنة بين الدّالة $f(x) = e^x$ كثيرات حدود ليجندر الأولى، والثّانية، والثّالثة؛ وكثيرة حدود ماكلورين $M_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} x^i$

x	$f(x) = e^x$	$\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} x^i$	$\sum_{n=0}^{3} a_n p_n(x)$	$\sum_{n=0}^{2} a_n p_n(x)$	$\sum_{n=0}^{1} a_n p_n(x)$
-0.04	0.6703	0.6693	0.8132	0.9530	0.9522
-0.02	0.8187	0.8187	0.8875	0.9744	0.9742
0.00	1.0000	1.0000	0.9963	0.9963	0.9963
0.20	1.2214	1.2213	1.1480	1.2385	1.2170
0.40	1.4918	1.4907	1.3512	1.5236	1.4377

بدراسة البيانات السّابقة، يتبيّن أنّ قيمة الدّالة، باستخدام كثيرة حدود ماكلورين أو متعدّدة حدود ماكلورين، تنطبق مع قيمة الدّالة الأصليّة عند مركز الفترة ومحيطها، بينما تبتعد قيمتها عن قيمة الدّالة الأصليّة، كلّما بعدنا إلى أطراف الفترة، كما أنّ قيم كثيرة حدود ليجندر ذات الدّرجة الثّالثة أقرب ما يكون إلى قيم الدّالة الأصليّة إلى كثيرة حدود ماكلورين، بمقارنة مع كثيرة الحدود الثّانية والأولى، وهذا يؤكّد أنّه كلّما زادت درجة كثيرة الحدود، يزداد تقاربها إلى الدّالة نفسها (شكرالله،2018،ص ص 205-208).

في خلاصة هذا الفصل، يمكن إجراء مقارنة بين كثيرات الحدود الأربعة ذات الدرجة الثالثة ثم بين كثيرات الحدود ذات الدرجة الرابعة (كثيرات حدود ماكلورين وكثيرات الحدود ليجندر وكثيرات حدود تشبيشيف وكثيرات حدود لاجرانج) للدالة $f(x) = \ln(2x + 3)$ على الفترة $[-1,1]$عند عدد من النقاط كالآتي:

والجدول (3) يوضّح المقارنة بين كثيرات حدود ماكلورين وتشبيشيف وليجندر ولاجرانج ذات الدرجة الثالثة للدّالة $f(x) = \ln(2x + 3)$

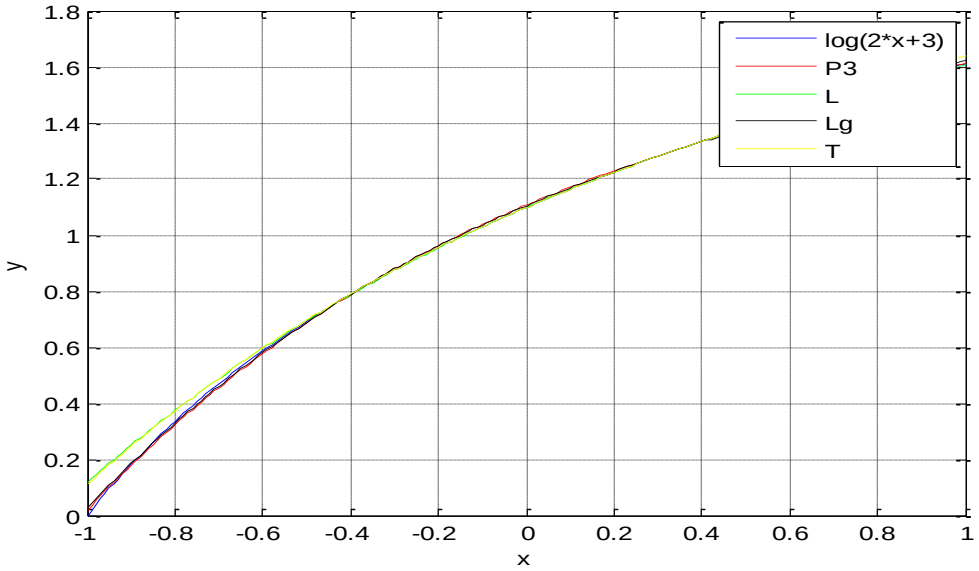
x	$\ln(2x+3)$	كثيرة حدود ماكلورين $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} x^i$	كثيرة حدود ليجندر $\sum_{n=0}^{3} a_n p_n(x)$	كثيرة حدود تشبيشيف $P_3(x)$	كثيرة حدود لاجرانج $\sum_{i=0}^{3} f(x_i) L_{3,i}(x)$
-0.60	0.5878	0.5972	0.5799	0.5767	0.5932
-0.40	0.7885	0.7900	0.7886	0.7877	0.7862
-0.20	0.9555	0.9556	0.9613	0.9624	0.9535
0.25	1.2528	1.2529	1.2538	1.2570	1.2539
0.50	1.3863	1.3888	1.3810	1.3830	1.3863
0.75	1.5041	1.5153	1.4998	1.4981	1.5026

الجدول (4) يوضّح المقارنة بين كثيرات حدود ماكلورين وتشبيشيف وليجندر ولاجرانج ذات الدرجة الرابعة للدّالة $f(x) = \ln(2x + 3)$

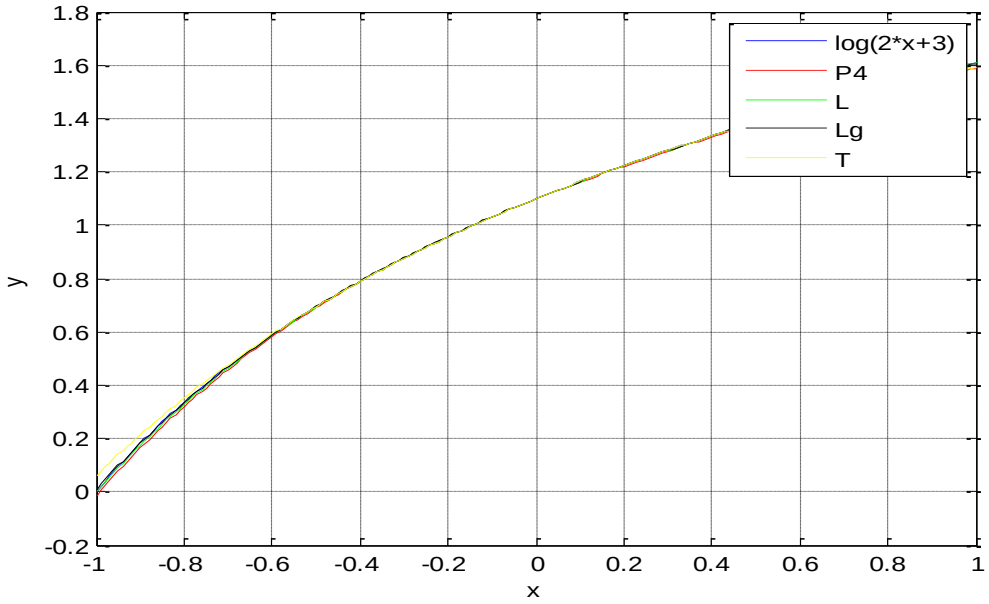
x	$\ln(2x+3)$	كثيرة حدود ماكلورين $\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i!} x^i$	كثيرة حدود ليجندر $\sum_{n=0}^{4} a_n P_n(x)$	كثيرة حدود تشبيشيف $P_4(x)$	كثيرة حدود لاجرانج $\sum_{i=0}^{4} f(x_i) L_{4,i}(x)$
-0.60	0.5878	0.5909	0.5880	0.5806	0.5850
-0.40	0.7885	0.7703	0.7912	0.7884	0.7901
-0.20	0.9555	0.9555	0.9576	0.9573	0.9574
0.25	1.2528	1.2527	1.2515	1.2494	1.2511
0.50	1.3863	1.3856	1.3869	1.3805	1.3863
0.75	1.5041	1.4996	1.5068	1.4949	1.5071

من الجدول الأول يتّضح أنّ كثيرة حدود لاجرانج ذات الدّرجة الثالثة أقرب ما يكون إلى الدّالة الأصليّة، ثمّ كثيرة حدود ليجندر الثّالثة وتأتي بعد ذلك كثيرة حدود ماكلورين، ثمّ تشبيشيف، ولكن كثيرة حدود لاجرانج الرابعة هي الأنسب لتقريب الدّالّة المعطاة من كثيرة الحدود لاجرانج الثالثة إي أن كثيرات الحدود ذات الدرجة الرابعة تعطي قيم تقريبية أدق من كثيرات الحدود ذات الدرجة الثالثة، وبالتالي هي أقرب للدالة الأصلية، هذا يؤكد أن كلما ازدادت درجة كثيرة الحدود كلما كانت النتائج أدق.

يُلاحظ أنّه عند التّقريب بكثيرة الحدود ماكلورين تكون أقلّ دقّة عند أطراف الفترة، إي تختلف اختلافًا أكبر كلّما ابتعدت عند المركز، وهذه من عيوب كثيرة حدود ماكلورين وتايلور، وبالتالي إذا كانت الفترة طويلة أو بعيدة على الصفر فأن كثيرة حدود ماكلورين غير مناسبة للتقريب، نلاحظ أن كثيرة حدود تشبيشيف تعطي قيم تقريبية قريبة من قيم الدالة الأصلية كلما اقتربنا من مركز الفترة. ولابد الإشارة إلي ان كل هذه الملاحظات لا يمكن تعميمها وتختلف باختلاف الدالة المعطاة وفترة التعريف .



الشّكل (2-10) يوضّح كثيرة حدود ماكلورين الثالثة المتمثّلة بالمنحنى الأصفر، وتشبيشيف الثالثة المتمثّلة بالمنحنى الأحمر، ولاجرانج الثالثة المتمثّلة بالمنحنى الأخضر، وليجندر الثالثة المتمثّلة بالمنحنى الأسود للدّالة $f(x)$ المتمثّلة بالمنحنى الأزرق على الفترة [1,1-]



الشّكل (2-11) يوضّح كثيرة حدود ماكلورين ذات الدرجة الرابعة المتمثّلة بالمنحنى الأصفر، وتشبيشيف الرابعة المتمثّلة بالمنحنى الأحمر، ولاجرانج الرابعة المتمثّلة بالمنحنى الأخضر، وليجندر الرابعة المتمثّلة بالمنحنى الأسود للدّالة $f(x)$ ، المتمثّلة بالمنحنى الأزرق على الفترة [-1,1]

الفصل الثالث

خطـأ التقريـب

Rounding Error

يعدّ التّحليل العدديّ أحد فروع الرّياضيّات المهمّة، وهو الذي يربط بين الرّياضيّات التّحليليّة والحاسب الآلي، ويستخدم عادة في إيجاد حلول لبعض المسائل والمشاكل، التي يصعب حلها بالرّياضيّات التحليليّة؛ إذ يُتحصل على حلول تقريبيّة، ووجود هذا الحلّ التّقريبيّ أو ظهوره يعني أنّه يوجد تباين أو اختلاف بينه وبين الحلّ المضبوط، وعلينا معرفته لكي يمكن القول أو الاقرار إن كان التّقريب جيّدًا أم لا، ولكن لو عُرف الخطأ لأمكن إيجاد الحلّ الفعليّ المضبوط؛ أي أنّ إيجاد الخطأ غير ممكن أو غير متاح بصورة مبسطة، ومن ثمّ نسعى لإيجاد تقريب للخطأ، أو تقليص حجم الخطأ (صبح والحربي،2006،ص 5).

والمهمّة الحقيقيّة للتّحليل العدديّ هي إيجاد الحلّ التّقريبيّ لمسألة ما، وتقويم الخطأ أو تقليصه؛ لأنّ معظم الأعداد التي يُتعامل معها هي أعداد تقريبيّة؛ لأنّها غالبًا ما تمثّل أطوالًا أو قياساتٍ أو قيمًا فيزيائيّة، والكثير من الأعداد الحقيقيّة لا يمكن التّعبير عنها بعدد منتهٍ من الأرقام؛ فمثلًا: العدد π يساوي تقريبًا 3.1415 (علي وآخرون، 2015؛ نعمة، 2018،ص 7).

وفي هذا الفصل ومن خلال دراسة الخطأ لعدة أنواع من التقريب ومن خلال الشرح سنقوم بالإجابة على السؤالين التاليين:

- أيمكن تحديد ما إذا كان التّقريب جيّداً أم لا؟
- أيمكن الحصول على تقريب أفضل عندما تكون n (درجة كثيرة الحدود) كبيرة أم العكس؟ ووصول الي النتيجة التي تنص على ان كلما ازدادت درجة كثيرة الحدود كلما كان التقريب أفضل وأدق.

(1-3) أنواع الخطأ Types of Error

(1-1-3) الخطأ المطلق Absolute Error

ويعرّف بأنّه الفرق بين القيمة الحقيقيّة والقيمة التقريبيّة، ويرمز له على النّحو الآتي:

$$E_a = |x - x_1| = \Delta x$$

حيث x هي القيمة الفعليّة أو الحقيقيّة وx_1 القيمة التقريبيّة المحسوبة أو التّجريبيّة منها نجد :

$$x_0 - E_x \leq x \leq x_0 + E_x$$

أي أنّ العدد الفعليّ يقع بين $x_0 - E_x$ و $x_0 + E_x$ (Sastry,2012,p8)

(صبح والحربي،2006،ص 6؛علي وآخرون،2015؛عيد،2011،ص 18).

(2-1-3) الخطأ النّسبيّ Relative error

هو عبارة عن الخطأ المطلق مقسومًا على القيمة الحقيقيّة:

$$E_r = \frac{E_a}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|}\ ,\ \ x \neq 0.$$

$x \neq 0$ (صبح والحربي،2006،ص 7؛عيد،2011،ص 18).

(3-1-3) مثال

إذا كان $x_0 = 0.00005$, $x = 0.00004$ حيث x_0 هي القيمة التّقريبيّة لـ x ، أوجد الخطأ المطلق والخطأ النّسبيّ.

الحـــــل

الخطأ المطلق $E_a = |x - x_0| = |0.00004 - 0.00005| = 0.00001$

الخطأ النّسبيّ $E_r = \frac{E_a}{|x|} = \frac{0.00001}{0.00004} = 0.25$

(صبح والحربي،2006،ص ص 8-9).

```
clear all

clc

x=0.00004;

x0=0.00005;

ex=abs(x-x0);

sx=ex/x;
```

(4-1-3) خطأ التدوير The error Rounding

يظهر هذا الخطأ عند الاكتفاء بعدد معين من الأرقام العشرية، إي إذا كان

$x = 0.x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n$ ،والمطلوب الاكتفاء بـ(n-1) رقم على يمين الفاصلة إي حذف x_n نحصل على

$x = 0.x_1x_2 \dots x_{n-2}\bar{x}_{n-1}$.

$\bar{x}_{n-1}$ يتم تحديده كالاتي:

إذا كان $x_n < 5$ فأن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1}$.

إذا كان $x_n > 5$ فأن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$.

أما إذا كان $x_n = 5$ و x_{n-1} عدد زوجياً فأن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1}$ وإذا كان x_{n-1} فردياً فأن $\bar{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$ عندئذ يكون الخطأ الناتج من عملية التقريب أو التدوير هو

$0.5 \times 10^{-(n-1)} = 0.5 \times 10^{1-n} = 5 \times 10^{-n}$.

(صبح والحربي،2006،ص ص9-10).

(5-1-3) مثال

قرب العدد $x = 7.2535$ إلى ثلاث خانات عشرية ثم إلى خانتين عشريتين ثم إلي خانة عشرية واحدة وما هو الخطأ الناتج في كل حالة؟

الحـــــل

$x_0 = 7.254$ والخطأ الناتج لا يتجاوز $.5 \times 10^{-4}$

$x_0 = 7.25$ والخطأ الناتج لا يتجاوز $.5 \times 10^{-3}$

$x_0 = 7.2$ والخطأ الناتج لا يتجاوز $.5 \times 10^{-2}$

(صبح والحربي،2006،ص 10).

(6-1-3) ملاحظة

الخطأ المطلق في حاصل جمع أي عددين أو طرحهما، لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة لهذين العددين، كذلك الخطأ النّسبيّ لحاصل ضرب عددين تقريبيّن أو قسمتهما، لا يتجاوز مجموع الأخطاء النّسبيّة للعددين (صبح والحربي،2006،ص ص 11-13؛عيد،2011،ص ص 30-32).

(7-1-3) مثال

إذا كان $x_1 = 3.221$ و $x_2 = 3.222$ أوجد الخطأ المطلق والنسبي لحاصل جمعهما وطرحهما؟

الحـل

الخطأ المطلق الناتج من تدوير أو تقريب العددين على اعتبار أنهما عددين مدورين هو

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5 \times 10^{-4}$.

$$|\Delta x_1 + \Delta x_2| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001.$$

$$|\Delta x_1 - \Delta x_2| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001.$$

والخطأ النسبي في حالة الجمع

$$\frac{|\Delta x_1 + \Delta x_2|}{x_1 + x_2} = \frac{0.001}{6.443} = 0.00015526$$

اما الخطأ النسبي في حالة الطرح هو

$$\frac{|\Delta x_1 - \Delta x_2|}{x_1 - x_2} = \frac{0.001}{0.001} = 1 .$$

(صبح والحربي،2006،ص ص11-12).

(2-3) تحليل الخطأ في التّقريب الخطّيّ

Analysis of Error in Linear Approximation

(1-2-3) نظرية

الخطأ الذي يربط التّقريب الخطّيّ $p_1(x)$ ونقاط الفترة $[a,b]$ لدالة $f(x)$ هو:

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\varepsilon),$$

حيث $\varepsilon \in [a,b]$.

البرهـــــان

يُفترض أنّ x نقطة ثابتة، بحيث $x \in [a,b]$، وباستخدام نظريّة تايلور ويُعبّر عن قيم $f(a)$ و$f(b)$ بدلالة $f(x)$ و$f'(x)$ و$f''(\varepsilon_a)$ و $f''(\varepsilon_b)$ بحيث $\varepsilon_a \in [a,x]$,

$\varepsilon_b \in [x,b]$ يُحصل على الآتي:

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \tfrac{1}{2}(a-x)^2 f''(x) + \cdots \quad .$$

$$f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(x) + \cdots \quad .$$

يمكن كتابة $p_1(x)$ على النّحو الآتي:

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{a-b}f(b).$$

وباستبدال $f(a)$, $f(b)$ ينتج:

$$p_1(x) = \frac{(x-b)-(x-a)}{a-b}f(x) + \frac{(x-b)(a-x)-(x-a)(b-x)}{a-b}f'(x)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{(x-b)(a-x)^2-(x-a)(b-x)^2}{a-b}\right]f''(x)+\cdots .$$

يُلاحظ أن:

$$\left[\frac{(x-b)(a-x)^2-(x-a)(b-x)^2}{a-b}\right]=(x-a)(x-b)\frac{x-a-x+b}{a-b}$$
$$=(x-a)(x-b) .$$

$$f(x)-p_1(x)=\frac{1}{2}(x-b)(x-a)f''(x)+\cdots .$$

لكلّ $x\in[a,b]$ يوجد $\varepsilon_x\in[a,b]$ بحيث :

$$\frac{1}{2}(x-b)(x-a)f''(x)+0f'''(x)=\frac{1}{2}(x-b)(x-a)f''(\varepsilon_x) .$$

لذلك فالخطأ في التّقريب الخطّي هو:

$$f(x)-p_1(x)=\frac{1}{2}(x-b)(x-a)f''(\varepsilon_x)$$

لكل $x\in[a,b]$ يوجد $\varepsilon_x\in[a,b]$ (Atkinson,1988,p137).

كما يُلاحظ أنّه إذا كان $x=a$ أو $x=b$، فإنّ الخطأ يكون صفراً، ومن ثمّ فالخطأ الأعظميّ للتّقريب الخطّي يُعطي بواسطة:

$$|f(x)-p_1(x)|\leq\frac{1}{2}|x-b||x-a|\max_{u\in[a,b]}|f''(u)|,$$

خطأ التّقريب الخطّي الأعظم هو:

$$|f(x)-p_1(x)|\leq\frac{(b-a)^2}{8}\max_{u\in[a,b]}|f''(u)|.$$

يُلاحظ أنّ الخطأ في التّقريب الخطّي ينقص كلّما نقص طول الفترة

.(Anselone & John Lee,2015)

(3-3) تحليل الخطأ في التّقريب التّربيعيّ

Analysis Error in Quadratic Approximation

إذا كانت x وa أعدادًا حقيقيّة مختلفة، و$[a,x]$ فترة مغلقة، والدّالة $f:[a,x]\to R$ بحيث:

1) f, f', f'' دوال متّصلة.

2) لكلّ $c\in[a,x]$ و$f'''(c)$ موجودة و$|f'''(c)|\le M(x)$ حيث M عدد حقيقيّ موجب، و $E_2(x,a)=f(x)-p_2(x,a)$ هو الخطأ الناتج من القريب الثنائي للدالة $f(x)$وتحقّق الآتي:

$$|E_2(x,a)|\le\left[\frac{M(x)}{3!}\right]|x-a|^3$$

.(Anselone & John Lee,2015)

(1-3-3) مثال

إذا كان $f(x)=\frac{1}{1-x}$ و$x\neq 1$ وكانت :

$$f'''(c)=\frac{6}{(1-c)^4}\quad ;\quad c\neq 1.$$

فما هو التّقريب الثّنائيّ للدّالة والخطأ الناتج عن التقريب؟

الحل

التقريب الثنائي للدالة عندما $a=0$

$$p_2(x)=1+x+x^2.$$

والخطأ هو:

$$E_2(x,0)=f(x)-p_2(x)\quad ,\quad x<1.$$

إذا كان $0 < x < 1$ و $0 < c < x$

$$|f'''(c)| = \left|\frac{6}{(1-c)^4}\right| \leq \left|\frac{1}{(1-x)^4}\right| = M_3(x).$$

$$|E_2(x,0)| \leq \left[\frac{|x|^3}{(1-x)^4}\right] = 0.001 \qquad for\ all\ \ x \in [0,0.1].$$

إذا كان $x < 0$ و $x < c < 0$

$$|f'''(c)| = \left|\frac{6}{(1-c)^4}\right| < 6 = M_3(x).$$

$$|E_2(x,0)| \leq |x|^3 \leq (0.01)^3 = 0.001 \qquad for\ \ x = -0.01\ .$$

.(Cohen & Henle,2005)

(4-3) خطأ التّقريب باستخدام كثيرة حدود تايلور

Analysis Error by Using Taylor Polynomial

التقريب باستخدام كثيرة حدود تايلور هو أسلوب رياضي لتقريب الدالة عن طريق حساب مشتقة الدالة عند نقطة معينة، ولكن متى يقال: إنّ التّقريب دقيق؟ وبمعنًى آخر، متى يكون الخطأ $f(x) - p_n(x)$ صغيرًا؟ وهو ما يسمّى بالباقي $R_n(x)$.

(1-4-3)أستخدم نموذج لاجرانج لحساب الخطأ $|R_n(x)|$

نموذج لاجرانج لحساب خطأ التّقريب للدّالة $f(x)$ باستخدام كثيرة حدود تايلور من الدّرجة النّونيّة $p_n(x)$، ويعتمد على درجتها، إذا امكن إيجاد عدد حقيقيّ موجب M، بحيث $|f^{n+1}(c)| \leq M$ ، $c \in [a,x]$، فإنّ نموذج لانجرانج يكون على النّحو الآتي:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

.(Olson,2015) (علي وأخرون،2015)

(2-4-3) ملاحظة

إيجاد الحدّ الأعظم لـــ$|f^{n+1}(c)|$ غالبًا ما يكون صعبًا جدًّا؛ وذلك على الفترة $[a,x]$، ولكن يمكن تخمين العددM ، الذي يكون معلومًا، وهو أصغر من أكبر حد أعظميّ؛ فمثلًا: إذا كانت $f^{n+1}(c)$ هي $\sin(x)$ ، أو $\cos(x)$، يمكن جعل $M=1$ ، بالطّريقة نفسها، إذا كان $|f^{n+1}(c)|=\sqrt{c}$ والفترة $[1,3]$ ، فإنّ الحدّ الأعظميّ هو $\sqrt{3}$ (Goldstein,2012).

(3-4-3) متباينة تايلور Taylor inequality

إذا وجد عدد حقيقيّ موجب M بحيث $|f^{n+1}(x)| \le M$ لكلّ x و$|x-a| \le d$ فإنّ:

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

لكلّ x في الفترة $|x-a| \le d$ (Goldstein,2012).

(4-4-3) نظريّة تايلور Taylor theorem

إذا كانت $f(x)$ دالّة قابلة للتّفاضل $(n+1)$ من المرّات، على الفترة التي تشمل c ، فإنّ لكلّ x في الفترة يوجد $z \in [x,c]$ بحيث:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x),$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$$

إذا كان الباقي يقترب من الصّفر عندما $n \to \infty$، فإنّ مفكوك تايلور يتحوّل إلى متسلسلة تايلور وهي متسلسلة متقاربة , وإذا كان الخطأ أكبر من الصّفر، هذا يعني أنّ الخطأ أكبر من القيمة الصّحيحة، وإذا كان أصغر من الصّفر، فإنّ تقريبنا يكون كبيرًا جدًا، ونموذج الخطأ المعروف يدلّ فقط على حجم الخطأ وليس الخطأ الفعليّ (عيد،2011،ص 24).

(5-4-3) مثال

إذا كان $f(2)=8$ و $f'(2)=5$ و $|f''(x)| \le 3$ لكلّ x تنتمي إلى نطاق الدّالة، فأوجد $f(2.5)$ وخمّن خطأ التّقريب ؟

الحـــل

$p_1(x) = f(2) + f'(2)(x-2) \quad ; \quad a = 2$

$f(2.5) = p_1(2.5) = f(2) + f'(2)(2.5-2) = 8 + 5(2.5-2) = 10.5$.

$\mathrm{R}_1(2.5) \leq \frac{M}{2!}(2.5-2)^2 = \frac{M}{8}$.

بما أنّ 3 هو الحدّ العلوي للمشتقّة الثّانية ومن ثمّ $M = 3$

$\mathrm{R}_1(2.5) \leq \frac{3}{2!} = \frac{3}{8}$.

.(Goldstein,2012)

(6-4-3) مثال

باستخدام كثيرة حدود تايلور من الدّرجة الأولى حول $x = 9$ قرب الدّالّة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة [8.5,9.5]أوجد مقدار الخطأ بحيث يكون أقل من 0.01.

الحـــل

تُستخدم المتباينة تايلور بحيث $n = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}}$ و $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

$|f''(x)| = \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.

قيمة هذا الحدّ تكون أقلّ ما يمكن عندما يكون المقام هو الأصغر، وعلى الفترة [8.5,9.5] الحدّ الأعلى بالضّبط هو $\frac{1}{4(8.5)^{\frac{3}{2}}}$

$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!}|x-9|^2 \leq \frac{M}{2!}0.5^2 = \frac{M}{8}$.

عندما $|x-9| \leq 0.5$ فأنّ:

$$\frac{M}{8} \leq 0.01 \quad \text{ومنها يمكن إيجاد} \quad M \leq 0.08 = \frac{2}{25}$$

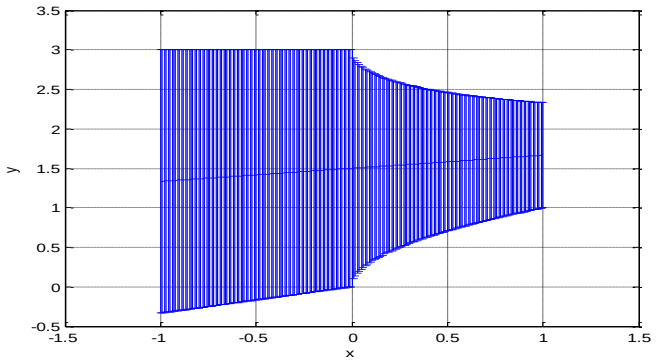
$$\frac{1}{4(8.5)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{25} \quad \text{وهذا يؤدّي إلي} \quad 4(8.5)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{25}{2}$$

$$4(8.5)^{\frac{3}{2}} > 4 \times 8 = 32 > \frac{25}{2}.$$

.(Stanoyevith,2011)

باستخدام برنامج الماتلاب يمكن توضيح الخطأ بيانيًّا

```
x=-1:0.01:1;

f=x.^0.5;

taylor=3+(x-9)/6;

error=taylor-f;

errorbar(x,taylor,error);

grid

xlabel('x');ylabel('y');
```



الشّكل (3-1) يوضّح الخطأ للدّالّة $f(x) = \sqrt{x}$

(7-4-3) مثال

قرّب الدّالة $f(x) = e^x$ حيث $x = 0.5$ وبخطأ أقلّ من 0.000005

الحـــــــل

$|R_n(0.5)| \leq 0.000005,$

$$|R_n(0.5)| = \left|\frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(0.5)^{n+1}\right| = \frac{e^z}{(n+1)!}(0.5)^{n+1}\,.$$

$0 < z < 0.5$

$e^z < e^{0.5} < 4^{0.5} = 2$

$$|R_n(0.5)| < \frac{2}{(n+1)!}(0.5)^{n+1} = \frac{1}{2^n(n+1)!},$$

$$\frac{1}{2^n(n+1)!} < 0.000005 \quad or \quad 2^n(n+1)! > 200000\,.$$

n	$2^n(n+1)!$
1	4
2	24
3	192
4	1920
5	23040
6	322560
7	5160960

يمكن ملاحظة أنّه عندما n=6 تتحقق المتباينة $2^n(n+1)! > 200000$.

$$p_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720},$$

$$p_6(0.5) = 1.64872 \quad , \quad E = 1.65264 \times 10^{-6}.$$

(شكرالله،2018،ص ص 189-190).

(8-4-3) مثال

إذا كان $f(x) = \ln(1+x)$ و$p_5(x)$ هي كثيرة حدود تايلور من الدّرجة الخامسة و$p_3(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدّرجة الثّالثة

$$p_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

إذا كانت $p_5(x)$ تقريب للدّالة $f(x)$ على الفترة $[0,1]$، فإن الخطأ يساوي صفرًا، إذا كان $x = 0$ ويكون الأكبر عندما $x = 1$ وضح الخطأ في كل حالة؟

الحـــــــل

الجدول الآتي يوضّـــح كثيرة الحدود تـايلور الخـامســـة وكثيرة الحدود تـايلور الثّـالثـة والدّالـة $f(x) = \ln(1+x)$، وخطأ التّقريب في حالة اسـتخدام $p_5(x)$ و$p_3(x)$ على الفترة $[0,1]$ ، كما يُلاحظ من الجدول الآتي أنّه كلّما ازدادت درجة كثيرة الحدود يقلّ الخطأ، ويكون أقل ما يمكن حول الصّفر

الجدول (5) يوضّح المقارنة بين كثيرات الحدود تايلور الخامسة والثّالثة للدّالّة $\ln(1+x)$ والأخطاء المرافقة مع كلّ تقريب

x	$f(x) = \ln(1+x)$	$p_3(x)$	$p_5(x)$	$\lvert\ln(1+x) - p_3(x)\rvert$	$\lvert\ln(1+x) - p_5(x)\rvert$
0.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.2	0.18232156	0.18266666	0.18233067	0.0003451	0.00000911
0.4	0.33647224	0.34133333	0.33698133	0.00486109	0.00050906
0.6	0.47000363	0.49200000	0.47515200	0.02199637	0.00514837
0.8	0.58778666	0.65066665	0.61380267	0.06287999	0.02601601
1.0	0.69314718	0.83333333	0.78333333	0.14018615	0.09018615

(Steiner,2008).

(5-3) خطأ التّقريب باستخدام كثيرة حدود لانجرانج

Error Approximation by Using Lagrange Polynomial

إنّ خطأ التّقريب باستخدام كثيرة حدود لانجرانج مماثل أو مشابه لخطأ التّقريب باستخدام كثيرة حدود تايلور، ما عدا العامل $(x-x_0)^{N+1}$، ويُستبدل به حاصل ضرب

$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)$ ؛ لأنّ التّقريب عند كلّ $N+1$ من النّقاط x_k حيث:

$$E_N(x_k) = f(x_k) - p_N(x_k) = y_k - y_k = 0,$$

لكل $k = 0,1,2,\dots,N$ (Kira,2019) (عيد،2011،ص 165).

(1-5-3) نظريّة

بفرض أنّ الدّالة $f(x)$ متّصلة وقابلة للاشتقاق (n+1) من المرّات، بحيث تكون المشتقات دوالًا متّصلةً على الفترة [a, b] و$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ وهي (n+1) من النّقاط، بحيث:

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f^{n+1}(c)}{(n+1)!},$$

$$c \in [a,b]$$

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x),$$

حيث $p_n(x)$ متعدّدة حدود تستخدم في تقريب $f(x)$

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)L_{n,k}(x).$$

البرهـــــان

إذا كان $n = 1$ فأولاً تُعريف الدّالة الخاصّة $g(t)$ على النّحو الآتي:

$$g(t) = f(t) - p_1(t) - E_1(x)\frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x-x_0)(x-x_1)} \quad \rightarrow (1)$$

يُلاحظ أنّ x_0, x_1, x ثوابت و t متغيّر والدّالّة $g(t)$ تؤول إلى الصّفر

$$g(x) = f(x) - p_1(x) - E_1(x) = 0.$$

$$g(x_0) = f(x_0) - p_1(x_0) = 0\,.$$
$$g(x_1) = f(x_1) - p_1(x_1) = 0\,.$$

بفرض أنّ $x \in (x_0, x_1)$ ثُمّ تطبيق نظريّة رول على الدّالة $g(t)$ المعرفة على$[x_0, x]$ فتنتج القيمة d_0، بحيث $x_0 < d_0 < x$.

$$g'(d_0) = 0 \qquad \rightarrow \quad (2)$$

ثمُّ تُطبّق نظريّة رول على الدّالّة $g(t)$ المعرفة على $[x, x_1]$؛ فتنتج القيمة d_1، بحيث

$$x < d_1 < x_1\,.$$

$$g'(d_1) = 0 \qquad \rightarrow \quad (3)$$

وعند الرّجوع وتطبيق نظريّة رول على الدّالة $g'(t)$ على الفترة $[d_0, d_1]$ تنتج القيمة c .

$$g''(c) = 0\ .$$

وبالرّجوع إلى المعادلة (1) وحساب مشتقات $g'(t)$ و$g''(t)$

$$g'(t) = f'(t) - p_1'(t) - E_1(x)\frac{(t-x_0)-(t-x_1)}{(x-x_0)(x-x_1)}\,.$$

$$g''(t) = f''(t) - 0 - \mathrm{E}_1(x)\frac{2}{(x-x_0)(x-x_1)}\,. \qquad \rightarrow (4)$$

في المعادلة الأخيرة تُستخدم $p(t)$ متعدّدة حدود ذات درجة n=1 و $p_1''(t) = 0$

$$0 = f''(c) - E_1(x)\frac{2}{(x-x_0)(x-x_1)},$$

$$E_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)f''(c)}{2!}.$$

(Kira,2019;Sastry,2012,p107) (بعاج،2017؛ علي وآخرون،2015).

(2-5-3) نظريّة (حدود الخطأ لتقريب لانجرانج وعقد متساوية البعد)

Bounds of Error for Lagrange Approximation and Equally Spaced Nodes

بفرض أنّ الدّالّة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ التي تتضمّن عقدًا (نقاط) متساوية البعد، أو المسافة $x_k = x_0 + hk$، و $f(x)$ ومشتقاتها إلى الرّتبة (n+1) جميعها مستمرة ومحدودة على فترات جزئيّة خاصّة $[x_0,x_1], [x_0,x_2], [x_0,x_3]$ على التّوالي، M عدد حقيقيّ موجب، بحيث:

$$|f^{n+1}(x)| \le M_{n+1} \qquad for \quad x_0 \le x \le x_n$$

$n = 1,2,3$ وحدّ الخطأ المناظر للحالات الثّلاث على النّحو الآتي:

$$|E_1(x)| \le \frac{h^2 M_2}{8} \qquad x \in [x_0,x_1] \quad ,$$

$$|E_2(x)| \le \frac{h^3 M_3}{9\sqrt{3}} \qquad x \in [x_0,x_2] \quad ,$$

$$|E_3(x)| \le \frac{h^4 M_4}{24} \qquad x \in [x_0,x_3] \ .$$

(Kira,2019).

النّظريّة السّابقة توضّح العلاقة البسيطة بين حجم الخطأ للتّقريب الخطّيّ والتّربيعيّ والتّكعيبيّ في كلّ حالة، وحدّ الخطأ $|E_n(x)|$ الذي يعتمد على h في طريقتين:

أوّلًا / h^{n+1} موجودة و $|E_n(x)|$ يكون تناسبيًّا مع h^{n+1} .

ثانيًا/ قيم M_{n+1} تعتمد على h، وتميل إلى $|f^{n+1}(x_0)|$ عندما تؤول h إلى الصّفر.

يمكن استنتاج أنه عندما تؤول h إلى الصّفر، فإنّ $|E_n(x)|$ يقترب من الصّفر، وإذا كانت مشتقات الدّالة محدودة حدًّا موحّدًا على الفترة $|h| < 1$ ، وكانت n كبيرة، هذا يؤدّي إلى أن يكون h^{n+1} صغيرًا، وكثيرة الحدود التقريبيّة ذات دّرجة كبيرة سوف تكون لها أقلّ خطأ

.(Sastry,2012,p107)

(3-5-3) مثال

إذا كانت $p(x)$ متعدّدة حدود لاجرانج للدّالة $f(x) = \sin x$ عند عشر نقاط على الفترة $[0,1]$ موجودة، فما هو الخطأ المحتمل للتقريب؟

الحـــــــل

بما أنّ $n + 1 = 10$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(10)}(x) = -\sin(x).$$

ومن ثمّ فإنّ خطأ التقريب سيكون القيمة الأكبر لـــ $\left|\frac{1}{10!} f^{10}(\varepsilon) \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$ لكلّ $x, x_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon \in [0,1]$.

$$max|x - x_i| = 1.$$

$$max|f^{n+1}(\varepsilon)| = max|-\sin\varepsilon| = 1.$$

لذلك الخطأ المحتمل هو $\frac{1}{10!}(1)(1)^{10} \approx 2.8 \times 10^{-7}$ (Krasor,2000).

(4-5-3) مثال

في تجربة لدراسة العلاقة بين اكتساب القوّة G والقوّة النّاتجة P في مكبّر الصّوت، والبيانات على النّحو الآتي:

P	5	7	8	11
G	0.00	1.46	2.04	3.42

1- استخدم متعدّدة الحدود لانجرانج من الدّرجة الثّانية $q(x)$؛ لإيجاد القوّة المكتسبة، عندما تكون القوّة النّاتجة تساوي 6.5

2- $G = 10\log_{10}\left(\frac{p}{5}\right)$ أوجد الخطأ الذي يحدث عند تقريب لانجرانج من الدّرجة الثّانية.

الحـــــل

$$q(6.5) = \frac{(6.5-7)(6.5-8)}{(5-7)(5-8)} \times 0.00 + \frac{(6.5-5)(6.5-8)}{(7-5)(7-8)} \times 1.46$$
$$+ \frac{(6.5-5)(6.5-7)}{(8-5)(8-7)} \times 2.04 = 0 + 1.6425 + 0.5100$$
$$= 1.1325 \approx 1.1\,.$$

```
function [p,r,s]=lagrangepoly(x,y,xx)

x=[5 7 8 ];

y=[0.00 1.46 2.04 ];

%[p,r,s]=lagrangepoly(x,y);

xx=0.5:0.01:8.5;

if size(x,1)>1;x=x';

end

    if size(y,1)>1;y=y';

    end

    if size(x,1)>1 ||size(y,1)>1 ||size(x,2)~=size(y,2)

        displaing error

    end %end of scope of if

    N=length(x);
```

```
    pvals=zeros(N,N);
    for i=1:N
        pp=poly(x((1:N)~=i));
        pvals(i,:)=pp./polyval(pp,x(i));
    end
    p=y*pvals;
    if nargin==3
        yy=polyval(p,xx);
        p=yy;
    end
    if nargout>1
        r=roots(((N-1):-1:1).*p(1:(N-1)));
        if nargout>2
            s=polyval(p,r);
        end
end
p=-0.0500*x.^2+1.3300*x -5.4000;
x=6.5;
polyval(p,x)
```

من ثم يُستخدم نموذج الخطأ

$$E(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{n!} f^n(\varepsilon) \ ,$$

$$f(x) = \mathrm{G}(x) = \log_{10}\left(\frac{p}{5}\right) \ ,$$

$$\frac{d\left(\log_{10}\left(\frac{p}{5}\right)\right)}{dp} = \frac{d[\log_{10}(p) - \log_{10}(5)]}{dp} = \frac{\mathrm{d}\log_{10}(p)}{dp}$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{\ln p}{\ln 10}\right] = \frac{1}{p\ln 10}$$

$$\frac{d^3}{dp^3}\left[\log_{10}\left(\frac{p}{5}\right)\right] = \frac{2}{p^3\ln 10}$$

$$E(6.5) = \frac{(6.5-6)(6.5-7)(6.5-8)}{6}\left(\frac{10}{\ln 10}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon^3}\right) = \frac{0.5429}{\varepsilon^3} \ ,$$

حيث $\varepsilon \in [5,8]$

$$\varepsilon = 5 \quad \rightarrow \quad E_{mim} = 0.0043 \ ,$$

$$\varepsilon = 8 \quad \rightarrow \quad E_{max} = 0.0011 \ ,$$

إذا كان $x = 6.5$، فإنّ الخطأ:

$$E_{actual} = G(6.5) - q(6.5)$$

$$= 10\log_{10}\left(\frac{6.5}{5}\right) - 1.1325 = 1.1394 - 1.1325 \ = 0.0069$$

.(*Numerical Methods of Approximation*,2008)

(5-5-3) مثال

ليكن لدينا الجدول التّجريبيّ الآتي:

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

المطلوب حساب $\ln(0.6)$ باستخدام كثيرات الحدود الانجرانج، ثُمّ احسب الخطأ.

الحـــــل

$$L_0(0.6) = \frac{-1}{6} \quad \text{و} \quad L_1(0.6) = \frac{2}{3}$$

$$L_2(0.6) = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad L_3(0.6) = \frac{-1}{6}$$

$$p_3(0.6) \approx -0.5100354\,.$$

```
function [p,r,s]=lagrangepoly(x,y,xx)

x=[0.40 0.50 0.70 0.80];

y=[-0.9162991 -0.693147 -0.356675 -0.223144];

%[p,r,s]=lagrangepoly(x,y);

xx=0.5:0.01:8.5;

if size(x,1)>1;x=x';

end

    if size(y,1)>1;y=y';

    end

    if size(x,1)>1 ||size(y,1)>1 ||size(x,2)~=size(y,2)

        displaing error

    end %end of scope of if

    N=length(x);

    pvals=zeros(N,N);

    for i=1:N

        pp=poly(x((1:N)~=i));

        pvals(i,:)=pp./polyval(pp,x(i));

    end

    p=y*pvals;

    if nargin==3

        yy=polyval(p,xx)
```

```
        p=yy;
    end
    if nargout>1
        r=roots(((N-1):-1:1).*p(1:(N-1)));
        if nargout>2
            s=polyval(p,r);
        end
    end
p=1.6843*x.^3-4.5254*x.^2+5.2769*x -2.4108;
x=0.60;
polyval(p,x)
```

وهي قيمة $\ln(0.6)$ المطلوبة .

$$E(x) = \frac{f^4(c)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ ,$$

$$f^4(x) = \frac{-6}{x^4} \quad , \quad M = max|f^4(\varepsilon)| = \frac{6}{0.4^6} = 234.175$$

$$E(x) = M\left(\frac{1}{4!}\right)\prod_{i=0}^{3}(0.6-x_i) \ .$$

$$\prod_{i=0}^{3}(0.6-x_i) = 0.0004 \ .$$

$$|E(0.6)| < \frac{M}{4!} \ (0.0004) = 0.0039 \ .$$

$$\ln(0.6) = E(0.6) + p_3(0.6) = 0.0039 - 0.5100354 = -0.5061354 \ .$$

(صبح والحربي،2006،ص ص 204-205).

وبصفة عامّة في تقريب لانجرانج المقدار $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ يكون صغيرًا إذا كانت x_j و x النقاط قريبة من بعضها البعض، ويكون كبيرًا إذا كانت متباعدة عن بعضها البعض، أمّا المقدار $\frac{1}{(n+1)!}$ فيؤول إلى الصّفر إذا كانت n كبيرة، وأمّا إذا كانت الدّالة $f(x)$ معرفة على الفترة [-1,1]، معتمدة على عقد متساوية البعد، والخطأ يؤول إلى الصّفر، كلّما ازدادت n لكلّ الدوال، مثل الدوال المثلثيّة، أو الدوال الأسيّة، بحيث يكون جميع مشتقاتها محدودة بواسطة الثّابت M، وبخلاف ذلك الخطأ لا يؤول إلى الصّفر عند زيادة n (غير معروف،2020).

(6-3) خطأ التّقريب باستخدام كثيرة حدود تشبيشيف

Error Approximation by Using Chebyshev Polynomial

إذا كانت الدّالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ مستمرتين على الفترة [-1,1]، فإنّ استكمال تشبيشيف أو تقريبه سوف يُنتج متتالية من كثيرات الحدود $\{p_n(x)\}$، تقترب بانتظام إلى الدّالة $f(x)$ على الفترة [-1,1].

إذا كانت الدّالة $f(x)$ كثيرة حدود، أو يمكن كتابتها على النّحو الآتي:

$$f(x) \approx p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

فأنّ $p_{n-1}(x)$ كثيرة حدود تقريبيّة للدالة $f(x)$ درجتها $(n-1)$ وبحذف معامل x^n هو a_n

$$max|f(x) - p_{n-1}(x)| = max\big|f(x) - \big(p_n(x) - Q_n(x)\big)\big|$$

$$< max|f(x) - p_n(x)| + max|Q_n(x)| \ .$$

$Q_n(x)$ كثيرة حدود درجتها n وتحتوي على العامل a_n للحدّ x^n، والحدّ الأوّل في الطّرف الأيمن يساوي صفرًا

$$Q_n(x) = \frac{a_n}{2^{n-1}} \ .$$

.(Mudde,2017)

(1-6-3) ملاحظة

كثيرة حدود تشبيشيف الوحدويّة يكون لها أقلّ خطأ من متعدّدة حدود تشبيشيف على الفترة نفسها، وهو $\frac{1}{2^{n-1}}$ (Mudde,2017).

(2-6-3) مثال

قّرب الدّالّة $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ بواسطة كثيرة الحدود تشبيشيف التّربيعيّة على الفترة[-1,1]، ثمّ أوجد كثيرة حدود تشبيشيف التّربيعيّة الوحدويّة، والخطأ في كلا الحالتين.؟

الحـــــل

$$2x^3 + 3x^2 = \frac{1}{2}[3T_1 + T_3] + \frac{3}{2}[T_0 + T_2],$$

$$= \frac{3}{2}T_0 + \frac{3}{2}T_1 + \frac{3}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_3.$$

بحذف الحدّ T_3 يمكن الحصول على الخطأ الأكبر، وهو $\frac{1}{2} = \frac{2}{2^{3-1}}$ ، وأفضل كثيرة الحدود التقريبيّة

$$p(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}x,$$

$$2x^3 + 3x^2 = 2\left(\tilde{T}_3 + \frac{3}{4}\tilde{T}_1\right) + 3\left(\tilde{T}_2 + \frac{1}{2}\tilde{T}_0\right)$$

$$= \frac{3}{2}\tilde{T}_0 + \frac{3}{2}\tilde{T}_1 + 3\tilde{T}_2 + 2\tilde{T}_3.$$

بحذف الحد $\tilde{T}_3$ يُتحصّل على الخطأ الأكبر، وهو $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^{3-1}}$ ، وأفضل كثيرة الحدود التّقريبيّة هي

$$p(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}x \quad .$$

.(Sastry,2012,p152)

(3-6-3) بديهية

إذا كانت $f(x)$ دالة درجتها n و a_n معامل x^n، فإنّ أفضل تقريب للدّالّة $f(x)$ بواسطة كثيرة الحدود $p(x)$ ذات الدّرجة على الأكثر $(n-1)$ في الفترة [-1,1] هي:

$$p(x) = f(x) - a_n 2^{-n+1} T_n(x) .$$

والحدّ الأكبر للخطأ $a_n 2^{-n+1}$ وهذا هو تقريب تشبيشيف (الدكاك، 2013-2014).

إذا كانت الدّالة $f(x) = x^n$ وكثيرة الحدود الجبريّة على الفترة $[a, b]$ هي:

$$p_{n-1}(x) = x^n - \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \tilde{T}_n(x) .$$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) .$$

$$E_n = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} .$$

(الدكاك،2013-2014).

(4-6-3) مثال

ادرس الدّالّة $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ بحيث تقرّب بواسطة كثيرة الحدود تشبيشيف ذات الدّرجة الثّالثة، في الفترة [-1,1]، ثمّ أوجد كثيرة الحدود تشبيشيف الثّالثة للدّالّة نفسها، وكذلك الخطأ على الفترة [0,1]، ثمّ الفترة [-3,3].

الحـــــــــل

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 - 2(2)^{-4+1} T_4(x),$$

$$= 2x^4 + 3x^3 + 5x + 4x^2 + 6 - \frac{1}{4}[8x^4 - 8x^2 + 1].$$

أفضل كثيرة حدود تقريبيّة:

$$p(x) = 3x^3 + 6x^2 + 5x + \frac{23}{4} \ .$$

والخطأ هو

$$a_0 2^{-n+1} = 2(2)^{-4+1} = \frac{1}{4} \ .$$

يمكن حلها أيضًا بأسلوب economization، ويُتحصّل على كثيرة الحدود التّقريبيّة نفسها؛ لأنّه إذا كانت الدّالة معرفة على الفترة [0,1].

$$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$
$$= \frac{1651}{128}T_0^* + \frac{1301}{256}T_1^* + \frac{113}{128}T_2^* + \frac{27}{256}T_3^* + \frac{1}{32}T_4^* \ .$$

$$p(x) = 3.375x^3 + 2x^2 - 0.082x + 13.676 \ .$$

الخطأ الأكبر هو$\frac{1}{32} = 0.03125$

أمّا إذا كانت الدّالّة معرفة على الفترة [-3,3]

$$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = \frac{81}{4}T_4^* + \frac{81}{4}T_3^* + 99T_2^* + \frac{303}{4}T_1^* + \frac{339}{4}T_0^*$$

بحذف T_4^* يُتحصّل على كثيرة الحدود الخطأ الأكبر هو$\frac{81}{4} = 20.25$

$$p(x) = 3x^3 + 22x^2 + 45.5x - 14.25 \ .$$

هذا يؤكّد أنّه كلّما كانت الفترة أطول يكون الخطأ أكبر (Mudde,2017).

(5-6-3) مثال

أوجد كثيرة حدود ماكلورين $M_4(x)$ للدّالة $f(x) = e^x$ على الفترة [-1,1]، ثم اختزل درجة كثيرة الحدود باستخدام كثيرة حدود تشبيشيف المختزلة بحيث لا تتعدى القيمة العظمى الخطأ 0.05.

الحـــل

$$M_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \ .$$

القيمة العظمى للخطأ

$$R_4(x) \leq \frac{\varphi_5}{5!}\gamma^5 = \frac{e}{5!}1^5 \approx 0.0230 \ .$$

كثيرة الحدود المختزلة هي

$$M_3(x) = M_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x) \ .$$

$$\tilde{T}_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \qquad , \qquad a_4 = \frac{1}{24}$$

$$M_3(x) = 0.9948 + x + 0.5417x^2 + 0.1667x^3.$$

والخطأ النّاتج من عمليّة الاختزال هو:

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |M_4(x) - M_3(x)| = |a_4|\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{24}\frac{1}{2^3} \approx 0.0052 \ .$$

أمّا الخطأ الكلّي فهو:

$$R\big(M_3(x)\big) = 0.0230 + 0.0052 = 0.0282 \ .$$

وهذا المقدار لا يتعدى القيمة المسموح بها للخطأ 0.05 (شكرالله،2018،ص ص319-321).

ولاحظ شكر الله (2018) أنّ كثيرة الحدود المختزلة $M_3(x)$ تعطي تقريبًا أفضل من كثيرة حدود ماكلورين $M_4(x)$، عندما يُبتعد عن x_0، ويُوزّع الخطأ بانتظام على طول الفترة وبطريقة متجانسة، بينما تكون طريقة ماكلورين أفضل عند x_0 والمنطقة المحيطة بها فقط أي جوارها (شكرالله،2018،ص324)

أمّا إذا أُريد تقريب الدّالة $f(x)$ بواسطة كثيرة حدود الاستكمال عند (n+1) من النّقاط في الفترة $[-1,1]$، ويكون تقريبًا دقيقًا إلى حدّ ما، بحيث يقلّل خطأ الاستكمال، فسوف يتم اختير النّقاط، بحيث تكون أصفارًا أو جذورًا لكثيرة حدود تشبيشيف $T_{n+1}(x)$

.(Saleri,Quateroni & Gervasio,2010)

(6-6-3) نظريّة:

إذا كانت العقد المختارة هي جذور لكثيرة حدود تشبيشيف

$$x_i = \cos\left[\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right] \qquad ; i = 0,1,2,\dots,n \ ,$$

على الفترة [-1,1] فإنّ الخطأ لكثيرة الحدود المتعمدة على العقد x_i هو:

$$E(x) = |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{-1\leq t\leq 1} |f^{n+1}(t)| \ .$$

وهو أفضل حدّ علويّ يُتحصل عليه بواسطة العقد x_i (الدكاك،2013-2014).

(7-6-3) مثال

إذا كانت الدّالة $f(x) = \sin(x)$، وقرّبت بواسطة كثيرة حدود درجتها الخامسة، عند عقد لكثيرة حدود تشبيشيف T_6 على الفترة [-1,1]، فما هو أكبر خطأ على الفترة نفسها؟

الحـــــل

$$|f^6(\delta)| = |-\sin(\delta)| \leq \sin(1) \ .$$

$$|f(x) - p_5(x)| \leq \frac{\sin(1)}{2^5(5+1)!} = 0.00003652217816 \ .$$

هذا هو الحدّ العلويّ للخطأ.

وإذا كانت $p_n(x)$ كثيرة حدود لانجرانج المعتمدة على عقد تشبيشيف T_n، وكانت

$f \in C^{n+1}[a,b]$، فإنّ:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{2(b-a)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} \{|f^{n+1}(x)|\} \ .$$

لتوضيح ذلك يتم إيجاد معاملات كثيرة الحدود لانجرانج $p_3(x)$ أوّلًا في حالة استخدام عقد متساوية المسافة، ثُمّ في حالة استخدام عقد تشبيشيف.

1- في حالة عقد متساوية المسافة على الفترة[-1,1]

$$x_0 = -1 \qquad x_1 = \frac{-1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3} \qquad x_3 = 1$$

فإنّ معاملات كثيرة الحدود لانجرانج تكون على النّحو الآتي:

$$L_{3,0}(x) = 0.062500 + 0.062500x + 0.562500x^2 - 0.562500x^3 \ .$$

$$L_{3,1}(x) = 0.502500 + 1.687500x - 0.562500x^2 + 1.687500x^3 \ .$$

$$L_{3,2}(x) = 0.562500 + 1.687500x - 0.562500x^2 - 1.687500x^3 \ .$$

$$L_{3,3}(x) = 0.062500 - 0.062500x + 0.562500x^2 + 0.562500x^3 \ .$$

2-في حالة استخدام عقد تشبيشيف

$$x_0 = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right), x_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right), x_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right), \qquad x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$C_0(x) = 0.103553 + 0.112085x + 0.707107x^2 - 0.765367x^3 \ .$$

$$C_1(x) = 0.603553 - 1.577161x - 0.707107x^2 + 1.847759x^3 \ .$$

$$C_2(x) = 0.603553 + 1.577161x - 0.707107x^2 - 1.847759x^3 \ .$$

$$C_3(x) = 0.103553 - 0.112085x + 0.707107x^2 + 0.765367x^3 \ .$$

.(Gervasio,Quateroni & Saleri,2010)

(8-6-3) مثال

أوجد كثيرة حدود لانجرانج ذات الدّرجة الثّالثة، وكذلك الخطأ لدالّة $f(x) = e^x$، في حالة العقد متساوية المسافة، وفي حالة عقد تشبيشيف على الفترة [-1,1]

الحـــلّ

أوّلًا: في حالة استخدام عقد متساوية المسافة

$$x_0 = -1 \qquad x_1 = \frac{-1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3} \qquad x_3 = 1$$

وقيم الدّالة عند هذه النّقاط

$$f(x_0) = e^{-1} = 0.367879 \ , \quad f(x_1) = e^{-\frac{1}{3}} = 0.176152 \ .$$

$$f(x_2) = e^{\frac{1}{3}} = 1.395612 \quad , \quad f(x_3) = e^1 = 2.718282 \ .$$

أمّا معاملات كثيرة الحدود، فسوف تؤخذ من الشّرح السّابق، ومن ثَمَّ تكون كثيرة الحدود على النّحو الآتي:

$$P(x) = 0.995196 + 0.999049x + 0.547885x^2 + 0.176519x^3 \ .$$

ثانيًا: توجد كثيرة الحدود باستخدام عقد تشبيشيف

$$x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) , x_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) , x_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right), \qquad x_0 = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right).$$

وقيم الدّالّة عند تلك العقد تكون على النّحو الآتي:

$$f(x_0) = e^{-0.923879} = 0.396958 \, .$$
$$f(x_1) = e^{-0.382683} = 0.682028 \, .$$
$$f(x_2) = e^{0.382683} = 1.466214 \, .$$
$$f(x_3) = e^{0.923879} = 2.519044 \, .$$

أمّا معاملات كثيرة الحدود فسوف تُؤخذ من الشّرح السّابق

$$V(x) = 0.994615 + 0.998933x + 0.542901x^2 + 0.175176x^3 .$$

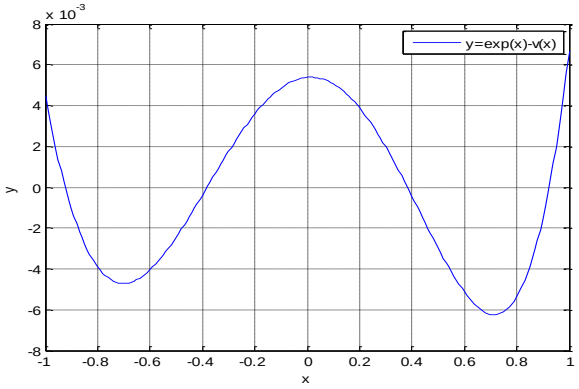
ولمقارنة الدّقة بين $P(x)$ و $V(x)$ يكون الحدّ الأقصى أو الأدنى للخطأ $|e^x - P(x)|$ هو:

$$|e^x - P(x)| \leq 0.00998481 \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

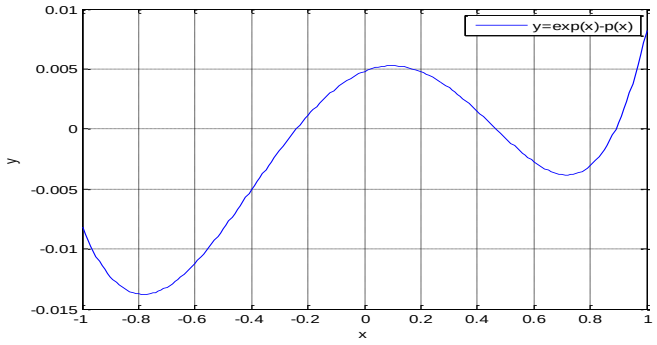
وذلك عندما يكون $x = 0.754901$

والحدّ الأقصى للخطأ $|e^x - V(x)|$ عند $x = 1$ هو:

$$|e^x - V(x)| \leq 0.00665687 \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 .$$



الشّكل (2-3) يوضّح خطأ الدّالة $y = e^x - V(x)$ عند تقريب لاجرانج على الفترة [-1,1]



الشّكل (3-3) يوضّح خطأ الدّالة $y = e^x - P(x)$ عند تقريب لاجرانج على الفترة [-1,1]

.(Venkateshan & Swaminathan,2023)

(9-6-3) النّظريّة

إذا كانت $\tilde{T}_n(x)$ كثيرة حدود تشبيشيف معرّفة على النّحو الآتي:

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$$

فإنّ القيمة العظمى للخطأ $\left|\tilde{T}_n(x)\right|$ على الفترة [-1,1] هي 2^{1-n} (الدكاك،2013-2014).

وكثيرة حدود تشبيشيف درجتها N يمكن الحصول عليها بواسطة استكمال لاجرانج المعتمدة على (N+1) من العقد، التي تكون أصلًا أصفارًا أو جذورًا لكثيرة حدود تشبيشيف، وعليه فالخطأ يكون صغيرًا ويؤول إلى الصفر كلّما كانت $N \to \infty$، والمثال السّابق يوضح ذلك؛ حيث تكون كثيرة الحدود لاجرانج الثّالثة المتعمدة على أربع عقد، وهي أصفار لكثيرة حدود تشبيشيف، هي:

$$V(x) = 0.994615 + 0.998933x + 0.542901x^2 + 0.175176x^3 .$$

بالتعويض عن قيم $\{1, x, x^2, x^3\}$ بدلالة كثيرات حدود تشبيشيف فأن :

$$V(x) = 1.26562T_0 + 1.130315T_1 + 0.271005T_2 + 0.043794T_3 .$$

وبحذف الحدّ الأخير، والتّعويض عنه بقيم $\{T_0, T_1, T_2\}$

$$V(x) = 1.26562 + 1.130315x + 0.271005(2x^2 - 1)$$
$$= 0.994615 + 1.130315x + 0.542901x^2 .$$

$V(x)$ الأخيرة هي كثيرة حدود تشبيشيف ذات الدّرجة الثّانية للدّالة $f(x) = e^x$على الفترة [-1,1]، التي يمكن الحصول عليها مباشرةً، كما في الفصل السّابق.

ولهذا، فإنّ استخدام كثيرة الحدود تشبيشيف بصفة عامّة في التّقريب، يمكن بواسطته الحصول على كثيرة الحدود التّقريبيّة، وقيمة الخطأ الأعظمي لها أقلّ، مقارنة مع التّقريب بكثيرات الحدود الأخرى، وذلك إذا كانت الدّالّة $f(x)$ و $f'(x)$ مستمرتين على الفترة [-1,1] وكثيرة الحدود التقريبيّة تقترب بانتظام إلى الدّالة $f(x)$ (شكر الله،2018،ص ص 324-325).

(11-6-3) ملحوظة

عند تقريب الدّالة إلى كثيرة حدود تايلور، ثُمّ التّعويض على قوى x، بدلالة كثيرات حدود تشبيشيف، وحذف الحدين الأخيريين، وبمقارنة الخطأ في الحالتين نجد بعض الاختلاف، (Mudde,2017).

(12-6-3) مثال

الدّالة $f(x) = e^x$ قربها بواسطة كثيرة حدود تايلور الثّالثة على الفترة [-1,1] وقلل الخطأ؟

الحـــــل

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \ .$$

الخطأ في حالة التّقريب بمتعدّدة حدود تايلور

$$\max_{-1\le x\le 1} |e^x - p_3(x)| = 0.0516 \ ,$$

$$p_3(x) = \frac{5}{4}T_0 + \frac{9}{8}T_1 + \frac{1}{4}T_2 + \frac{1}{24}T_3 \ .$$

وبحذف الحدين الأخيرين والخطأ لكثيرة حدود الأولى بدلالة كثيرات حدود تشبيشيف هو 0.2917 أمّا الخطأ الكلّيّ 0.3333

$$p_1(x) = \frac{5}{4} + \frac{9}{8}x \ .$$

وخطأ تايلور من الدّرجة الأولى على الفترة نفسها هو0.5000 (Mudde,2017).

(13-6-3) ملاحظة

هناك علاقة تربط بين كثيرات حدود تشبيشيف وكثيرات حدود ليجندر، وهي على النّحو الآتي:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} T_n\left(\frac{x}{b}\right) dx = \frac{\pi}{2}\left[P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

حيث $b > a > 0$ و T_n كثيرات حدود تشبيشيف و P_n كثيرات حدود ليجندر.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(1-x^2y)dx = \frac{\pi}{2}\left[P_n(1-y) + P_{n-1}(1-y)\right].$$

.(Tyler,1963)

في نهاية هذا الفصل، على سبيل المثال تُحسب قيم الخطأ كثيرات الحدود الأربعة (ماكلورين، وليجندر، وتشبيشيف، و لاجرانج)، ومن ثَمّ عقد مقارنة بينها؛ لمعرفة أيّ من كثيرات الحدود الأنسب لتقريب الدّالة $f(x) = \ln(2x+3)$ على الفترة $[-1,1]$عند عدد من النقاط، أولا إيجاد خطأ كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة ثم إيجاد خطأ كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة ، والجدولين الآتيين يوضّحان ذلك:

الجدول (6) يوضّح قيمة الخطأ لكثيرات حدود ماكلورين، ولاجرانج، وتشبيشيف، وليجندر ذات الدّرجة الثّالثة للدّالّة $\ln(2x+3)$،عند عدد من النقاط

x	$\ln(2x+3)$	خطأ كثيرة حدود ماكلورين الثالثة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{i!}x^i\right\|$	خطأ كثيرة حدود ليجندر الثالثة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{n=0}^{3}a_nP_n(x)\right\|$	خطأ كثيرة حدود تشبيشيف الثالثة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{n=0}^{3}P_n(x)\right\|$	خطأ كثيرة حدود لانجرانج الثالثة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{i=0}^{3}f(x_i)L_{3,i}(x)\right\|$
-0.60	**0.5878**	**0.0094**	**0.0079**	**0.0111**	**0.0054**
-0.40	**0.7885**	**0.0015**	**0.0001**	**0.0008**	**0.0023**
-0.20	**0.9555**	**0.0001**	**0.0058**	**0.0069**	**0.0020**
0.25	**1.2528**	**0.0001**	**0.0010**	**0.0042**	**0.0011**
0.50	**1.3863**	**0.0025**	**0.0053**	**0.0033**	**0.0000**
0.75	**1.5041**	**0.0112**	**0.0043**	**0.0060**	**0.0015**

الجدول (7) يوضّح قيمة الخطأ لكثيرات حدود ماكلورين، ولاجرانج، وتشبيشيف، وليجندر ذات الدّرجة الرابعة للدّالّة $\ln(2x+3)$، عند عدد من النقاط.

x	$\ln(2x+3)$	خطأ كثيرة حدود ماكلورين الرابعة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{i!}x^i\right\|$	خطأ كثيرة حدود ليجندر الرابعة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{n=0}^{4}a_np_n(x)\right\|$	خطأ كثيرة حدود تشبيشيف الرابعة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{n=0}^{4}P_n(x)\right\|$	خطأ كثيرة حدود لانجرانج الرابعة $\left\|\ln(2x+3)-\sum_{i=0}^{4}f(x_i)L_{4,i}(x)\right\|$
-0.60	**0.5878**	**0.0031**	**0.0002**	**0.0072**	**0.0028**
-0.40	**0.7885**	**0.0182**	**0.0027**	**0.0001**	**0.0016**
-0.20	**0.9555**	**0.0000**	**0.0021**	**0.0018**	**0.0019**
0.25	**1.2528**	**0.0001**	**0.0013**	**0.0034**	**0.0017**
0.50	**1.3863**	**0.0007**	**0.0006**	**0.0058**	**0.0000**
0.75	**1.5041**	**0.0045**	**0.0027**	**0.0092**	**0.0030**

من خلال الجداول السابقة نلاحظ أن كثيرة حدود لاجرانج الثالثة هي الأقرب للدالة المعطاة ثم كثيرة حدود لجندر ولكن كثيرة حدود لاجرانج الرابعة أقرب من كثيرة حدود لاجرانج الثالثة ونلاحظ أن كثيرة حدود لجندر ذات الدرجة الرابعة تعطي معدل خطأ اقل من كثيرة حدود لاجرانج الثالثة، هذا يؤكد القاعدة التي تنص على أنه، كلما كانت درجة كثيرة الحدود كبيرة كلما كانت أنسب أو أفضل لتقريب الدالة.

ولا ننسى أن نذكر أن هذه الملاحظات خاصة بدالة المعطاة فقط إي أن قد تختلف كثيرة الحدود الأنسب للتقريب باختلاف الدالة المعطاة والفترة المعرفة عليها.

الفصل الرابع

تطبيقات على تقريب الدوال

Applications on Approximating Functions

يعتبر موضوع تقريب الدوال من المواضيع الأساسية في التحليل العددي، والتي تلعب دوراً كبيراً في حل العديد من المسائل الرياضية والتطبيقات العملية، مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد، ولها دوراً حيوياً في فهم الظواهر الطبيعية والعمليات الحسابية، كتصميم وتحليل الأنظمة الهندسية، والدوائر الكهربائية والكثير من التجارب الفيزيائية، أي انها أداة قوية ومرنة تستخدم بشكل أوسع نتطرق إلى بعض التطبيقات لأنواع مختلفة من التقريب.

(1-4) تطبيقات على التّقريب الخطّي

Applications on The Linear Approximation

(1-1-4) مثال

من النّظريّة النّسبيّة التي تربط بين كتلة جسم متحرّك m، والسّرعة v المعرفة كالآتي:

$$m = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

حيث m_0 كتلة الجسم عند السّكون، وc سرعة الضّوء، فما السّرعة النّاتجة عند زيادة 1% لكتلة الجسم؟

الحـــــــــل

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$u = \frac{v}{c}$$

بما أنّ v صغيرة جدًّا مقارنة مع c، وهذا يؤدّي إلى $u \approx 0$

وباستخدام خواصّ التّقريب الخطّي نتحصّل على:

$$\frac{1}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{1 - \frac{u^2}{2}} \approx 1 + \frac{u^2}{2} \quad , \quad u \approx 0$$

$$\frac{m}{m_0} = 1.01 \to 1 + \frac{u^2}{2} = 1.01 \to \frac{u^2}{2} = 0.01 \to u = \sqrt{0.02} \approx \frac{1}{7} .$$

$$u = \frac{v}{c} \to v \approx \frac{c}{7} \approx \frac{186000}{7} \approx 27000\, mi/sec .$$

.(Cresser,2003)

(4-1-2) مثال

قدّرت شركة ما أنّه يمكن بيع ألف لعبة برمجيّة $f(x)$ بالسّعر AED (الدّرهم الإماراتيّ) x، كما هو معطًى في الجدول:

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

فما عدد الألعاب التي يمكن بيعها بسعر AED 24؟

الحـــــــل

$$f(x_0) = f(20) = 18,$$

$$f'(x_0) = f'(20) = \frac{14 - 18}{30 - 20} = \frac{-2}{5},$$

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 18 - \frac{2}{5}(x - 20),$$

$$p_1(24) \approx 18 - \frac{2}{5}(24 - 20) = 16.4$$ لعبة.

(أبو الفتوح،د.ت).

(4-2) تطبيقات على التقريب باستخدام كثيرات حدود تايلور

Applications on Approximation by Using Taylor Polynomials

(4-2-1) مثال

باستخدام كثيرات حدود تايلور أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$

الحـــــــــل

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

وكثيرة حدود تايلور للدّالّة $\sin x$

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots,$$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\cdots,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)=1.$$

.(Goldstein,2012)

(2-2-4) مثال

نظريّة آينشتاين للعلاقة الخاصّة بين كتلة جسم متحرّك والسّرعة تنصّ على:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

حيث m_0 كتلة الجسم عند السّكون، وc سرعة الضّوء، والطّاقة الحركية للجسم هي الاختلاف بين الطّاقة الكليّة وطاقة الجسم عند السّكون، وهي على النّحو الآتي:

$$k=mc^2-m_0c^2.$$

وضّح أنّ السّرعة تكون صغيرة جدًّا مقارنة مع سرعة الضّوء، وهذا يتوافق مع فيزياء نيوتوني الكلاسيكيّة:

$$k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

باستخدام كثيرة حدود تايلور، أوجد الخطأ لـ k عندما $|v| \leq 100\ m/s$

الحـــــــــل

$$k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 ,$$

$$= m_0c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-0.5} - 1 \right].$$

$$(1 + x)^{-0.5} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \cdots , \quad \lfloor x \rfloor < 1$$

$$\therefore k = m_0c^2 \left[\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \frac{5v^6}{16c^6} + \cdots \right) - 1 \right].$$

$$= m_0c^2 \left[\frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} - \frac{5v^6}{16c^6} + \cdots \right].$$

$$k = m_0c^2 \left(\frac{v^2}{2c^2} \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 .$$

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!} x^2 .$$

$$f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-0.5} - 1] , x = \frac{-v^2}{c^2} .$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} m_0c^2 (1 + x)^{\frac{-5}{2}} \quad |v| \leq 100 .$$

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{-5}{2}}} \leq \frac{3m_0c^2}{4\left(1-\frac{100^2}{c^2}\right)^{\frac{-5}{2}}} ,$$

$$c = 3 \times 10^8 \ \frac{m}{s}.$$

$$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{3m_0c^2}{4\left(1-\frac{100^2}{c^2}\right)^{\frac{-5}{2}}} * \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0 .$$

الخطأ على الأكثر $(4.17 \times 10^{-10})m_0$ (Cresser,2003).

(3-4) تطبيقات على التقريب باستخدام كثيرات حدود لاجرانج

Applications on Approximation by Using Lagrange Polynomials

(1-3-4) مثال

الجدول الآتي يوضّح البيانات التي تحصّلنا عليها من مكتب السّجل المدني بمدينة زليتن للسنوات 2017- 2020-2023ميلادي، والمطلوب دراسة البيانات باستخدام كثيرات حدود لاجرانج، مع تخمين أو توقع عدد الأسر في سنة 2025 و2030؟

السنوات	2017	2020	2023
عدد الأسر	55993	61203	67522

الحـــــــل

$x_0 = 0$ عوضاً عن 2017

$x_1 = 3$ عوضاً عن 2020

$x_2 = 6$ عوضاً عن 2023

$$p_2(x) = 61.6111x^2 - 246987.3889x + 247577750.784 .$$

أما توقعنا لعدد الأسر لسنة 2025 سوف تكون $p_2(8) = 72351$ أسرة.

بينما لعدد الأسر لسنة 2030 سوف تكون $p_2(13) = 86579$ أسرة.

بلدية زليتن (*http://www.zliten.gov.ly*).

(2-3-4) مثـــال

احسب القيمة التّقريبيّة للمقاومة $f(x)$ عند درجة حرارة $x = 40$ درجة مئويّة إذا كانت البيانات التي تمثّل قراءات بين درجة الحرارة لموصل كهربائي والمقاومة على النّحو الآتي:

$(30.5,610), (35.4,708), (50.2,810), (78.1,1562), (90.5,1900)$.

الحـــــــــل

بما أنّ درجة الحرارة عند 40 تقع بين 35.4 و50.2، إذًا يمكن الحصول عليها بواسطة أكثر من كثيرة حدود تقريبيّة.

أوّلًا: عن طريق كثيرة الحدود التّقريبيّة من الدّرجة الأولى باستخدام $(30.5,610)$ و $(50.2,810)$

$$p_1(x) = \frac{(x - 50.2)}{(35.4 - 50.2)}(708) + \frac{(x - 35.4)}{(50.2 - 35.4)}(810) .$$

$$p_1(x) = 6.89914x + 464.0262 .$$

```
function [p,r,s]=lagrangepoly(x,y,xx)

x=[50.2 35.4 ];

y=[810 708 ];

%[p,r,s]=lagrangepoly(x,y);

xx=0.5:0.01:8.5;
```

```
if size(x,1)>1;x=x';
end
    if size(y,1)>1;y=y';
    end
    if size(x,1)>1 ||size(y,1)>1 ||size(x,2)~=size(y,2)
        displaing error
    end %end of scope of if
    N=length(x);
    pvals=zeros(N,N);
    for i=1:N
        pp=poly(x((1:N)~=i));
        pvals(i,:)=pp./polyval(pp,x(i));
    end
    p=y*pvals;
if nargin==3
        yy=polyval(p,xx);
        p=yy;
    end
    if nargout>1
        r=roots(((N-1):-1:1).*p(1:(N-1)));
        if nargout>2
            s=polyval(p,r);
        end
    end
```

ثانيًا: عن طريق كثيرة الحدود الّتقريبيّة من الدّرجة الثّانية باستخدام

$(30.5,610), (35.4,708), (50.2,810)$ بحيث يكون:

$$p_2(x) = \frac{(x-35.4)(x-50.2)}{(30.5-35.4)(30.5-50.2)}(610)$$

$$+\frac{(x-30.5)(x-50.2)}{(35.4-30.5)(5-35.4-50.2)}(708)$$

$$+\frac{(x-30.5)(x-35.4)}{(50.2-30.5)(50.2-35.4)}(810)\,.$$

$$p_2(x) = -718.417 + 63.8486x - 0.6653863x^2\,.$$

```
function [p,r,s]=lagrangepoly(x,y,xx)

x=[30.5 35.4 50.2 ];

y=[610 708 810 ];

%[p,r,s]=lagrangepoly(x,y);

xx=0.5:0.01:8.5;

if size(x,1)>1;x=x';

end

    if size(y,1)>1;y=y';

    end

    if size(x,1)>1 ||size(y,1)>1 ||size(x,2)~=size(y,2)

        displaing error

    end %end of scope of if

    N=length(x);

    pvals=zeros(N,N);

    for i=1:N

        pp=poly(x((1:N)~=i));
```

```
        pvals(i,:)=pp./polyval(pp,x(i));
    end
    p=y*pvals;
    if nargin==3
        yy=polyval(p,xx);
        p=yy;
    end
    if nargout>1
        r=roots(((N-1):-1:1).*p(1:(N-1)));
        if nargout>2
            s=polyval(p,r);
        end
    end
```

عند $x = 40$ نجد أن:

$$p_1(40) = 6.89914(40) + 464.0262 = 739.6822\,.$$

عند $x = 40$ نجد أن:

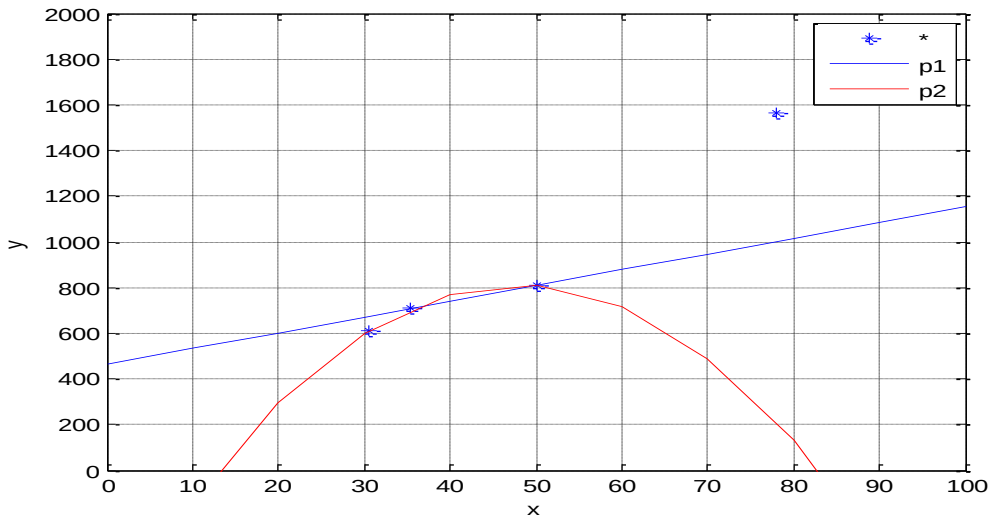
$$p_2(40) = -718.417 + 63.8486(40) - 0.6653863(40)^2 = 770.9234\,.$$

(شكرالله،2019،ص ص 6-9).

```
p1=6.89914*x+464.0262;
p2=-0.6653063*x.^2+63.8486*x -718.417;
x=40;
polyval(p1,x)
polyval(p2,x)
```

ويمكن رسم كثيرات الحدود باستخدام الماتلاب على النّحو الآتي:

```
syms x

x=0:10:100;

xx=[30.5 35.4 50.2 78.1 90.5];

y=[610 708 810 1562 1900];

p1=6.89914*x+464.0262;

p2=-0.6653063*x.^2+63.8486*x -718.417;

plot(xx,y,'*',x,p1,'b',x,p2,'r');

axis([0 100 0 2000]);

grid

legend('*','p1','p2');

xlabel('x');ylabel('y');
```



الشّكل (4-1) يوضّح العلاقة بين درجات الحرارة لموصل كهربائيّ والمقاومة؛ باستخدام كثيرات الحدود لاجرانج الأولى ذات المنحنى الأزرق، والثّانية ذات المنحنى الأحمر.

(4-4) تطبيقات على التقريب باستخدام كثيرات حدود ليجندر

Applications on Approximation by Using Legendre Polynomials

(1-4-4) مثال

أثبت المفكوك الآتي:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'^{n}}{r^{n+1}}\right)p_n(\cos\theta')\,,\quad r>r'$$

حيث $p_n(\cos\theta')$ هو كثيرة حدود ليجندر، و θ' هي الزّاوية المحصورة بين r' و r

الحـــــل

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2=r^2-2rr'\cos\theta'+r'^2$$

$$=r^2\left[1-2\left(\frac{r'}{r}\right)x+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]\quad,\qquad x=\cos\theta'\,.$$

نجد أنّ

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2xr''+r''^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\omega}}$$

بحيث $r''=\frac{r'}{r}$ و $\omega=2xr''-r''^2$

باستخدام مفكوك ذات الحدين يُحصل على:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}(1-\omega)^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{r}\left[1+\frac{\omega}{2}+\frac{3\omega^2}{8}+\frac{5\omega^3}{16}+\cdots\right].$$

$$=\frac{1}{r}\left[1+r''x-\frac{r''^2}{2}+\frac{3}{8}\left(4x^2+r''^4-4xr''^3\right)+\frac{5}{16}\left(8r''^3x^3+\cdots\right)+\cdots\right].$$

وبتجميع معاملات r'' يُحصل على :

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}\left[1+x\left(\frac{r'}{r}\right)+\frac{1}{2}(3x^2-1)\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\frac{1}{2}(5x^3-3x)\left(\frac{r'}{r}\right)^3+\cdots\right],$$

$$=\frac{1}{r}\left[p_0(x)+p_1(x)\left(\frac{r'}{r}\right)+p_2(x)\left(\frac{r'}{r}\right)^2+p_3(x)\left(\frac{r'}{r}\right)^3+\cdots\right].$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'^n}{r^{n+1}}\right)p_n(\cos\theta')\,.$$

(ناصر وعبدالهادي،د.ت).

ملاحظة

مفكوك ذات الحدين كالآتي:

$$+(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+\cdots$$

الخلاصة (الاستنتاج)

قدم هذا البحث دراسة تحليلية لتقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود الأربعة (كثيرات حدود تايلور وكثيرات حدود لاجرانج وكثيرات حدود تشبيشيف وكثيرات حدود ليجندر) حيث تم في هذه الرسالة توضيح مميزات وعيوب كل نوع وكيفية اختيار الطريقة المناسبة على حسب نوع المشكلة والمعطيات والدقة المطلوبة في الحل كما يلي:

1- كثيرات حدود تايلور وماكلورين.

- عند التقريب بكثيرات حدود تايلور يشترط أن تكون الدالة متصلة ومشتقاتها موجودة عن نقطة معينة.
- منسبة للتقريب عند نقطة معينة أو إذا كانت فترة تعريف الدالة صغيرة وتقل دقة التقريب بطول الفترة.
- إذا كانت المشتقة غير موجودة عند نقطة التقريب او تأخذ شكل متذبذب حولها مما يؤدي الي عدم وجود المشتقة فان لا يمكن تقريبها باستخدام تايلور ويفضل تقريبها باستخدام تشبيشيف.
- تستخدم في التحليلات الهندسية ودراسة الانظمة الديناميكية وفي فهم كيفية تغير الانظمة قرب نقاط التوازن.

2- كثيرات حدود لاجرانج.

- لا تعتمد على مشتقة الدالة انما يتم تقريبها عند نقاط معينة بحيث يكون الخطأ عندها يساويا صفرا.
- طريقة مناسبة إذا كانت البيانات على هيئة جدول او ثنائيات مرتبة او مجموعة نقاط والمطلوب الحصول على دالة او رسم منحنى يمر بأكبر عدد منها بشرط غير متكررة او المطلوب الحصول على علاقة بين متغيرين.
- تمتاز بإيجاد قيمة الدالة عند نقاط غير موجودة من ضمن النقاط المعطاة وتتميز بسهولة الفهم وتعطي دقة عالية عند تحديد النقاط.
- تعتمد درجتها على عدد النقاط المعطاة التي لا يشترط فيها الترتيب وليست متساوية البعد فيما بينها.

- عند زيادة درجة كثيرة الحدود تقل الدقة في منتصف الفترة او الشكل.
- إذا كانت النقاط قريبة من بعضها ودرجة كثيرة الحدود كبيرة تكون قيمة الخطأ صغيرة اما إذا كانت النقاط متساوية المسافة ودرجة كثيرة الحدود كبيرة والمشتقات جميعها محدودة فان الخطأ يقترب من الصفر.

3- كثيرات حدود تشبيشيف.

- تستخدم لتقيل الخطأ وذلك بتوزيعه على النطاق بالكامل لذلك مناسب للمسائل التي تتطلب دقة عالية وموزعه بالتساوي على طول النطاق.
- تقلل من الحد الاقصى للخطأ ويستخدم في تقريب الدوال المتأرجحة بكفاءة عالية هذا يجعلها مقيدة في التطبيقات الهندسية والفيزياء وتستخدم في تصميم الفلاتر وتحليل الاستجابة الترددية.
- من خلال كثيرات حدود تشبيشيف يمكن ايجاد قوى x وباستخدام خاصية الاختصار نتحصل على كثيرة الحدود التقريبية بسهولة.
- التقريب بكثيرات حدود تشبيشيف يتم على اي فترة بعد تحويلها الي الفترة $[-1,1]$ بغض النظر على طولها.
- تستخدم في تقريب الدوال المتصلة وغير القابلة للاشتقاق لأنها تأخذ في الاعتبار تغيرات الدالة في كل اتجاه.

4- كثيرات حدود ليجندر.

- تستخدم بشكل واسع في الفضاء ثلاثي الأبعاد وتعطي تقريبات دقيقة.
- من خلال كثيرات حدود ليجندر يمكن ايجاد قوى x وباستخدام خاصية الاختصار نتحصل على كثيرة الحدود التقريبية بسهولة.
- التقريب بكثيرات حدود ليجندر يتم على اي فترة بعد تحويلها الي الفترة $[-1,1]$ بغض النظر على طولها.
- تستخدم في تقريب الدوال المتصلة وغير قابلة للاشتقاق.

- تستخدم في تقريب الدوال المثلثية مثل $\sin(x)$ وفي حل المعادلات التفاضلية الجزئية وفي تقريب الدوال التكعيبية وفي دراسة الموجة الصوتية وفي تحسين الصورة الرقمية.

المـــــراجع

References

المـــــراجع

ابو الفتوح، طه.(د.ت). *الرياضيات-12 متقدم (التقريبات الخطية وطريقة نيوتن)*. المناهج الإماراتية، قطاع العمليات المدرسية الأول وزارة التربية والتعليم، دولة الأمارات العربية المتحدة.

بعاج، رشا. (2017). *الاستيفاء بكثيرات الحدود*.WWW.SYRIAMATH.NET.

حمزة، صلاح.(1999). *برمجة عددية*. ط1.دار الكتب للطباعة والنشر، بغداد.

الدكاك، رهف. (2013-2014). *التقريب المنتظم لبعض الدوال*. اطروحة دكتوراه. جامعة دمشق، كلية العلوم.

شكرالله، إيميل. (2018). *التحايل العددي التطبيقي*.

شكرالله، إيميل. (April 2019). *كثيرات الحدود لاجرانج*.

صبح، محمد والحربي، صالح. (2006). *التحليل العددي وطرق حسابه العددية*. الطبعة الاولى. الرياض، مكتبة الرشد.

العدوي، محمد. (2018). *التحليل العددي مع التطبيق على الماتلاب*. القاهرة، جامعة حلوان.

علي، عمران والعوض، نمارق ومصعب، أروى وعلي، هدى. (2015). *الاستكمال وتقريب الدوال*. بحث لنيل البكالوريوس. جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا، كلية التربية.

عيد، نصر الدين. (2011). *التحليل العددي*. منشورات جامعة حلب، كلية العلوم. حلب، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية.

ناصر، ابراهيم وعبد الهادي، عفاف. (د.ت). *بعض الدوال الخاصة وتطبيقاتها في الفيزياء*.

Aleyan ,O.(2013). Application of Lagrange Interpolation and Divided Difference To Predict The Changing Numbers of Families Groups in Zliten. *AL-Ulum AL-Insaniya Wat-Tatbiqiya.* Alasmarya Islamic University, Colleges of Science and Literature, 23,75-79.

Anselone,P.M & John Lee.(13 Augustus 2015).*The Heart of Calculus*, Mathematical Association of America.

Atkinson,K. (1988). *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition. University of Iowa, Canada. John Wiley And Sons.

Carothers, N.L. (1998). *Approximation Theory*. Bowling Green State University.

Cohen,D.W & Henle,J.M.(2005).*Calculus :The Language of Change*. Jones and Bartlett Publishers.

Cresser,J D.(31 July 2003).The Special Theory of Relativity. Macquaria University, Sydney.

Dikovic, L. (24-25 May 2019). *Matlab Examples For Interpolation. Paper Presented At the* 11^{th} *International scientific conference*, science and higher education in function of sustainable development, Mećavnik- Drvengrad, Užice, Serbia.

Goldstein, B.(2012). *Taylor Polynomials and Infinite Series*.

Hirst,k.(2006).*Calculus of One Variable*. Springer London.

Judy, J.(2021).*Approximation of Discontinuous Functions*. Nasaq Journal, 31.

Kira,J. (2019). *Application of Lagrange Polynomials for Interpolating Income Generation from Certain Students Fee Structure,* Humanities and Social Science, National Institute of Transport. Vol 9, No 5 .

Krasor,B.(2000).*Methods of Shape-Preserring Spline Approximation*.World Scientific.

Marsden, J.& Weinstein, A.(1985). *Calculus II*. Springer New York.

Mudde, M.H. (July 2017).*Chebyshev Approximation*. University Of Groningen.

Numerical Methods of Approximation.(2008).

Olson, L.(September 2015). *Taylor Series: Expansions, Approximation and Error*. University of Illinois at Urbana-Champaign .

Polynomial Interpolation: the fundamentals.(Spring 2020).

Poularikas A.D,(1999). The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing, *Legendre Polynomials*. CRC press LLC.

Saleri,F;Quateroni,A. & Gervasio,P.(30 May 2010).*Scientific Computing With MATLAB and Octave.* Springer Berlin Heidelberg.

Sastry, S.S. (2012). *Introductory Methods Of Numerical Analysis*, 5^{th} Edition. Delhi: PHI Learning Private Limited.

Shoemaker,D.D.(1962).*An Application of The Legendre Polynomial to Numerical Differentiation and Integration*. Texas Technological College.

Stanoyeviten,A.(14 October 2011).*Introduction to Numerical Ordinary and Differential Equations Using MATLAB.* Wiley.

Steiner,E.(2008).*The Chemistry Maths Book*. OUP Oxford.

Tyler,J.M.(1963). *Some Aspects of Chebyshev and Legendre Polynomial Approximation.* University of Tulsa.

Venkateshan,S.P.& Swaminathan,P.(2023).*Computational Methods in Engineering*. Springer International Publishing.

Vojcinak, P.;Koziore,J. & Hajovsky, R.(n. d). *Using Matlab Functions For Designing Chebyshev Filters.* Technical University Of Ostrava, The Czech Republic.

The data was from the civil registrations office in Zliten, *http://www.zliten.gov.ly*.

الملاحق

Appendices

Appendix A

Chebyshev polynomials

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

Appendix B

Legendre polynomials

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$p_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$p_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}$$

$$p_6(x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$$

$$p_7(x) = \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

Appendix C

Powers of x as a function of $T_n(x)$

$$1 = T_0$$

$$x = T_1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_2 + T_0)$$

$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3)$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4)$$

$$x^5 = \frac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5)$$

$$x^6 = \frac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)$$

$$x^7 = \frac{1}{64}(35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7)$$

$$x^8 = \frac{1}{128}(35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8)$$

المصطلحات

A

Absolute Error	الخطأ المطلق
Algebraic Polynomials	كثيرة الحدود الجبريّة
Analysis	تحليل
Appendices	الملاحق
Application	تطبيقات
Approximation Valu	القيمة التّقريبيّة

B

Basis	أساسيّات
Binomial Theorem	نظريّة ذات الحدين
Bounds	حدود

C

Characterization	دوال البيانات
Chebyshev Polynomial	كثيرة حدود تشبيشيف
Comparator	المقارن
Constant	ثابت
Continuous Functions	الدوال المتّصلة
Corollary	بديهيّة

D

Data Functions	دوال البيانات
Definition	تعريف
Differentiable	قابلة للتّفاضل

E

Economization	الاختصار
Equally spaced	متساوية البعد
Equation	المعادلة
Error	الخطأ
Estimation	تقدير أو تخمين
Even	زوجي
Example	مثال

F

For All	لكلّ
Formula	شكل

G

Generating Function	الدّالة المولّدة

I

Image Stenograph	الصّورة الاختزاليّة
Inequality	المتباينة

Inner Product	الضّرب الدّاخلي
Integrable	قابلة للتّكامل
Interpolation	الاستيفاء
Interval	فترة

L

Lagrange	العالم الفرنسيّ لاجرانج
Legendre Polynomial	كثيرة حدود ليجندر
Lemma	تمهيديّة
Linear Approximation	التّقريب الخطّيّ

M

Maclourin	العالم الاسكتلنديّ ماكلورين
Maclourin Polynomial	كثيرة الحدود ماكلورين
Max	حدّ أقصى
Method	طريقة
Monic	الوحدويّة

N

Nodes	عقد

O

Odd	فرديّ

Orthogonal Polynomial	كثيرة الحدود المتعامدة

P

Parabola	قطع مكافئ
Properties	خواصّ أو خصائص

Q

Quadratic Approximation	التّقريب التّربيعيّ

R

Relative Error	الخطأ النّسبيّ
Remainder	الباقي
Represent	تمثيل
Rodrigues	العالم الفرنسيّ رودريج

S

Series	سلاسل
Solution	الحـــلّ
Sup	معيار أو جزئيّ
Supremum	أصغر حدّ علويّ

T

Tabulated Function	الدوال المجدولة
Taylor Expansion	مفكوك تايلور

Taylor Forms	أشكال تايلور
Taylor Polynomials	كثيرة حدود تايلور
Taylor Series	متسلسلة تايلور
Theorem	نظريّة
Transform	تحويل
Types	أنواع

U

Uniqueness	الوحدانيّة

W

Weierstrass	العالم الألمانيّ وايرشتراس
Weight Function	دالّة الوزن

Abstract

This research studies the process of approximating mathematical functions using polynomials due to their distinctive properties and characteristics. This study includes Taylor polynomials and Lagrange polynomials. For orthogonal functions, Chebyshev polynomials and Legendre polynomials were studied. The study clarifies the method of approximation using polynomials, with the help of some examples and the implementation of some of them using MATLAB. The research is also supported by some theorems and properties that clarify the approximation process. The study concludes with a comparison of the four polynomials mentioned above, through an applied example and discussion of some practical applications of polynomials and the benefits of the approximation process.

Alasmarya Islamic University
Faculty of Science
Department of Mathematics

Approximating Function by Polynomials

By
Maryam Faraj Al-shuweerif

Supervised by Prof. Al-Hashemi Ali Edarah

Thesis Was Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements for The Degree of Master in mathematics

17/6/2025

الجامعة الأسمرية الإسلامية
الإدارة العامة
إدارة الدراسات العليا والتدريب

نموذج د. ع. (31)
التاريخ: / /
الموافق: / /

قرار لجنة مناقشة رسالة الإجازة العالية (الماجستير)

عملا بقرار السيد/ رئيس الجامعة رقم (202) لسنة 2025م, الصادر في 19 / 03 / 2025 م , القاضي بتشكيل لجنة لمناقشة رسالة علمية للحصول على درجة الإجازة العالية (الماجستير) في تخصص الرياضيات المقدمة من الطالبة : **مريم فرج أحمد الشويرف** كلية: العلوم وعنوانها:

تقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود

وتتكون اللجنة من الاساتذة:

1. أ.د. الهاشمي علي ادراه	الجامعة: الاسمرية	مشرفا و مقررا.
2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب	الجامعة: الاسمرية	عضوا داخليا.
3. أ.د. الفيتوري محمد عمر	الجامعة: طرابلس	عضوا خارجيا.

عقدت اللجنة جلسة علنية علي تمام الساعة الحادية عشر صباحا يوم الثلاثاء الموافق 17 / 06 / 2025م بقاعة الاجتماعات في الكلية لمناقشة الرسالة و تقويم مستواها العلمي و المنهج الذي اتبعه الباحث و المصادر التي استخدمها في دراسته، وقررت ما يلي:

بعد اتمام الطالبة **مريم فرج أحمد الشويرف** لمتطلبات الدراسات العليا و اجتياز امتحاناتها و مناقشة رسالتها و تقويمها تقرر:

إجازتها بملاحظات وتمنح الطالبة فرصة للتعديل و الأخذ بالملاحظات خلال شهر من تاريخ المناقشة.

توقيعات أعضاء لجنة المناقشة:

1. أ.د. الهاشمي علي ادراه	الجامعة: الاسمرية	التوقيع:.....
2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب	الجامعة: الاسمرية	التوقيع:.....
3. أ.د. الفيتوري محمد عمر	الجامعة: طرابلس	التوقيع:.....

توقيعات أعضاء اللجنة بعد التعديل والأخذ بالملاحظات – بتاريخ 01 / 07 / 2025 م.

1. أ.د. الهاشمي علي ادراه	الجامعة: الاسمرية	التوقيع:.....
2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب	الجامعة: الاسمرية	التوقيع:.....
3. أ.د. الفيتوري محمد عمر	الجامعة: طرابلس	التوقيع:.....

يعتمد:

د. مختار المبروك أبورزيزة
عميد الكلية

أ.د. محمد سليمان بن عبدالحفيظ
رئيس الجامعة

بعد من عشرة (10) نسخ