



الجامعة الأزهرية الإسلامية

كلية العلوم

قسم الرياضيات

تطبيق بعض الطرق العددية على الأنظمة الخطية الناتجة من حل المعادلات الاهليجية

هناء فرج عبدالسلام أبو فردة

اشراف

أ.د. عمر علي العيان

قدمت هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات الإجازة العالية (الماجستير) في العلوم
التطبيقية بقسم الرياضيات بكلية العلوم بالجامعة الأزهرية الإسلامية

العام الجامعي (2025- 2026)



قرار لجنة مناقشة رسالة الإجازة العالية (الماجستير)

عملاً بقرار السيد/ رئيس الجامعة رقم (375) لسنة 2026م، الصادر في 24 / 6 / 2026م، القاضي بتشكيل لجنة لمناقشة رسالة علمية للحصول على درجة الإجازة العالية (الماجستير) في تخصص الرياضيات المقدمة من الطالبة: هناء فرج عبدالسلام أبوفردة، كلية العلوم وعنوانها تطبيق بعض الطرق العددية على الأنظمة الخطية الناتجة من حل المعادلات الإهليجية وتتكون اللجنة من الاساتذة:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------|
| 1. أ.د. عمر علي العيان | الجامعة: الأسمرية الإسلامية | مشرفاً ومقرراً. |
| 2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب | الجامعة: الأسمرية الإسلامية | عضواً داخلياً. |
| 3. د. رجب محمد المسروب | الجامعة: الزيتونة | عضواً خارجياً. |

عقدت اللجنة جلسة علنية علي تمام الساعة 10:00 من صباح يوم الثلاثاء الموافق 14 / 7 / 2026م بقاعة الاجتماعات في الكلية لمناقشة الرسالة وتقويم مستواها العلمي والمنهج الذي اتبعته الباحثة والمصادر التي استخدمتها في دراستها، وقررت ما يلي:

بعد اتمام الطالبة هناء فرج عبدالسلام أبوفردة لمتطلبات الدراسات العليا واجتياز امتحاناتها ومناقشة رسالتها وتقويمها تقرر: إجازتها بملاحظات وتمنح الطالبة فرصة للتعديل والأخذ بالملاحظات خلال شهر من تاريخ المناقشة. توقيعات أعضاء لجنة المناقشة:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------|
| 1. أ.د. عمر علي العيان | الجامعة: الأسمرية الإسلامية | التوقيع: |
| 2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب | الجامعة: الأسمرية الإسلامية | التوقيع: |
| 3. د. رجب محمد المسروب | الجامعة: الزيتونة | التوقيع: |

توقيعات أعضاء اللجنة بعد التعديل والأخذ بالملاحظات - بتاريخ / / 2026م.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------|
| 1. أ.د. عمر علي العيان | الجامعة: الأسمرية الإسلامية | التوقيع: |
| 2. أ.د. محمد إبراهيم الأشهب | الجامعة: الأسمرية الإسلامية | التوقيع: |
| 3. د. رجب محمد المسروب | الجامعة: الزيتونة | التوقيع: |

يعتمد:

رئيس الجامعة



بعد من عشرة (10) نسخ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

لَبَّنْ هُوَ عَايَاتُ بَيِّنَاتٍ فِي صُدُورِ الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا
الظَّالِمُونَ ﴿٤٩﴾

[سورة العنكبوت آية: 49]

الإهداء

إلى اليدين اللتين ارتفعتا إلى السماء بالدعاء لي... إلى القلب الذي نبض بالحب والصبر لأجلي...

إلى منارة حياتي وسبب وجودي... إلى من كان إصرارهما سرّ نجاحي ووصولي ...

(أمي و أبي)

إلى شريك درب ورفيق العمر زوجي العزيز الذي أنار مصباح العلم في طريقي ...

إلى قرة عيني ومهجة قلبي أبنائي (أسيل ، الحارث ، الجنيد، حذيفة اليمان)

إلى السند والعضد الذين تقاسموا معي عبء الأيام وجمال الذكريات أخواتي الغاليات وإخوتي الأعزاء...

إلى الأصدقاء الأوفياء الذين كانوا لي وطناً في رحلة العلم بصدق ودعاء...

إلى كل من قدم لي يد العون في إتمام هذا العمل ...

أهدي إليكم جميعاً ثمرة جهدي امتناناً لكل لحظة تشجيع صادقة قدمتموها لي.

الشكر والتقدير

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، والصلاة والسلام على أشرف الخلق وسيد المرسلين.
أتقدم بجزيل الشكر وعظيم الامتنان إلى الجامعة الأسمرية الإسلامية وكلية العلوم لتهيئة البيئة العلمية المناسبة .
كما أخص بالشكر لأستاذي الفاضل المشرف على هذه الرسالة الأستاذ الدكتور :

عمر على العيان

الذي لم يبخل علي بتوجيهاته السديدة وسعة صدره، فكان نعم الموجه والمعلم، والذي كانت لملاحظاته الأثر البالغ لإتمام هذه الرسالة بصورتها النهائية.
كما أتقدم بالشكر للسادة أعضاء هيئة لجنة المناقشة والحكم لتفضلهم بقبول قراءة الرسالة وتقويمها فبأرائهم وملاحظاتهم تكتمل الفائدة العلمية لهذه الرسالة.
والشكر إلى كافة الأساتذة الأفاضل في قسم الرياضيات لما قدموه لنا من علم ومعرفة طوال سنوات الدراسة.
وشكرا لكل الأصدقاء والزملاء الذين رافقوني في دروب العلم وكانوا خير معين لي .

المحتويات

فهرس الجداول	ز
فهرس الأشكال	ح
قائمة مصطلحات	ي
قائمة الاختصارات	ل
الملخص	م
مقدمة	1
الفصل الأول (مفاهيم أساسية)	
1.1 مقدمة	4
2.1 مفاهيم أساسية	4
3.1 نظرية القيمة المتوسطة	9
4.1 نظرية تايلور	9
5.1 النظرية الأساسية لتقارب	10
6.1 نظرية الوجود والوحدانية لطريقة الفروق المنتهية على مسألة ديرشليت الحدودية	10
7.1 نظرية الوحدانية لمعادلة بواسون مع شروط فان-نيومان الحدودية	10
الفصل الثاني (طريقة الفروق المنتهية)	
1.2 مقدمة	13
2.2 طريقة الفروق المنتهية	13
1.2.2 الفروق الأمامية	13
2.2.2 الفروق الخلفية	15
3.2.2 الفروق المركزية	17
4.2.2 طريقة الفروق المنتهية للحل في بعدين	18
الفصل الثالث (الطرق التكرارية)	
1.3 مقدمة	58

58.....	2.3 الطرق التكرارية
58.....	1.2.3 طريقة جاكوبي
58.....	2.2.3 طريقة جاوس سيدل
59.....	Conjugate Gradient Method 3.2.3
60.....	Preconditioned Conjugate Gradient Method 4.2.3
60.....	The Preconditioner Of Incomplete LU Factorization 5.2.3
61.....	3.3 المقارنة بين الطرق التكرارية
77.....	التوصيات
78.....	الخلاصة
79.....	المراجع
.....	Abstract

فهرس الجداول

الجدول (1.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، CGM ، GSM ، JM) في المثال (1.2).....	61
الجدول (2.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، CGM ، GSM ، JM) في المثال (2.2).....	63
الجدول (3.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، CGM ، GSM ، JM) في المثال (3.2)	65
الجدول (4.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، CGM ، GSM ، JM) في المثال (4.2).....	66
الجدول (5.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، GSM ، JM) في المثال (5.2).....	68
الجدول (6.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، GSM ، JM) في المثال (6.2).....	70
الجدول (7.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، CGM ، GSM ، JM) في المثال (7.2).....	72
الجدول (8.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، CGM ، GSM ، JM) في المثال (8.2).....	74
الجدول (9.3) مقارنة الطرق التكرارية (PCGM-ILU ، CGM ، GSM ، JM) في المثال (9.2).....	75
الجدول (10.3) مقارنة الطرق التكرارية من حيث الدقة والكفاءة الحاسوبية.....	77

فهرس الأشكال

14.....	الشكل (1.2) نطاق المسائل في بعدين
17.....	الشكل (2.2) توزيع النقاط الشبكة حول النقطة المركزية (x_i, y_j)
21.....	الشكل (3.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (1.2)
22.....	الشكل (4.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (1.2) ، $h = k = 0.25$
24.....	الشكل (5.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (1.2) ، $h = k = 0.2$
27.....	الشكل (6.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (2.2)
27.....	الشكل (7.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (2.2) ، $h = k = 0.25$
30.....	الشكل (8.2) الحل الفعلي لمعادلة بواسون في المثال (3.2)
31.....	الشكل (9.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (3.2) ، $h = k = 0.25$
33.....	الشكل (10.2) الحل الفعلي لمعادلة هلمهولتز في المثال (4.2)
34.....	الشكل (11.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (4.2) ، $h = k = 0.25$
36.....	الشكل (12.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (5.2)
37.....	الشكل (13.2) تحديد النقاط الوهمية والداخلية للمجال في المثال (5.2) ، $h = k = 0.25$
43.....	الشكل (14.2) الحل الفعلي لمعادلة بواسون في المثال (6.2)
43.....	الشكل (15.2) تحديد النقاط الوهمية والداخلية للمجال في المثال (6.2) ، $h = k = 0.25$
47.....	الشكل (16.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (7.2)
48.....	الشكل (17.2) تحديد النقاط الوهمية والداخلية للمجال في المثال (7.2) ، $h = k = 0.25$
50.....	الشكل (18.2) الحل الفعلي لمعادلة بواسون في المثال (8.2)
51.....	الشكل (19.2) تحديد النقاط الوهمية والداخلية للمجال في المثال (8.2) ، $h = k = 0.25$
53.....	الشكل (20.2) الحل الفعلي لمعادلة هلمهولتز في المثال (9.2)
54.....	الشكل (21.2) تحديد النقاط الوهمية والداخلية للمجال في المثال (9.2) ، $h = k = 0.25$
62.....	الشكل (1.3) الحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.25$
62.....	الشكل (2.3) الحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.2$
62.....	الشكل (3.3) الحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.1$
62.....	الشكل (4.3) الحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.05$
62.....	الشكل (5.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.25$
62.....	الشكل (6.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.2$
63.....	الشكل (7.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.1$
63.....	الشكل (8.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (1.2) ، $h = k = 0.05$
63.....	الشكل (9.3) الحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.25$
63.....	الشكل (10.3) الحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.2$
64.....	الشكل (11.3) الحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.1$
64.....	الشكل (12.3) الحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.05$
64.....	الشكل (13.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.25$
64.....	الشكل (14.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.2$
64.....	الشكل (15.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.1$
64.....	الشكل (16.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (2.2) ، $h = k = 0.05$
65.....	الشكل (17.3) الحل التقريبي في المثال (3.2) ، $h = k = 0.25$

[illegible]

74.....	الشكل (59.3) الحل التقريبي في المثال (8.2) ، $h = k = 0.1$
74.....	الشكل (60.3) الحل التقريبي في المثال (8.2) ، $h = k = 0.05$
75.....	الشكل (61.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (8.2) ، $h = k = 0.25$
75.....	الشكل (62.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (8.2) ، $h = k = 0.2$
75.....	الشكل (63.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (8.2) ، $h = k = 0.1$
75.....	الشكل (64.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (8.2) ، $h = k = 0.05$
76.....	الشكل (65.3) الحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.25$
76.....	الشكل (66.3) الحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.2$
76.....	الشكل (67.3) الحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.1$
76.....	الشكل (68.3) الحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.05$
76.....	الشكل (69.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.25$
76.....	الشكل (70.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.2$
77.....	الشكل (71.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.1$
77.....	الشكل (72.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي في المثال (9.2) ، $h = k = 0.05$

قائمة المصطلحات

(أ)

إنجليزي	عربي
Derivation	اشتقاق
Lift Edge	الجانب الأيسر
Bottom Edge	الجانب السفلي
Particular Solution	الحل الخاص
General Solution	الحل العام
Exact Solutions	الحلول المضبوطة
Mathematical Problems	المسائل الرياضية
Singular Solution	الحل الشاذ (المفرد)
Absolute error	الخطأ المطلق
Relative error	الخطأ النسبي

(ت)

Forward differences approximation	تقريب الفروق الأمامية
Back differences approximation	تقريب الفروق الخلفية
Central differences approximation	تقريب الفروق المركزية

(خ)

Linear	خطي
--------	-----

(ر)

Order	رتبة
-------	------

(ش)

Initial Conditions	شروط ابتدائية
Boundary Conditions	شروط حدودية
Dirichlet boundary conditions	شروط دريشليت الحدودية
Robin boundary conditions	شروط روبن الحدودية
Neumann boundary conditions	شروط نيومان الحدودية

(ط)

Conjugate Gradient Method	طريقة التدرج المقترن
Preconditioned Conjugate Gradient Method	طريقة التدرج المقترن مسبقاً
Iterative Methods	طرق تكرارية
Finite differences Method	طريقة الفروق المنتهية
Gauss-Seidel Method	طريقة جاوس سيدل
Jacobi Method	طريقة جاكوبي

(ع)

Nonzero Elements	عناصر غير صفرية
------------------	-----------------

(م)

Taylor Series	متسلسلة تايلور
Maclaurin Series	متسلسلة ماكلورين
Differential Equation	معادلات تفاضلية
Partial differential equation	معادلات تفاضلية جزئية
Ordinary differential equation	معادلات تفاضلية عادية
Laplace Equation	معادلة لابلاس
Poisson Equation	معادلة بواسون
Helmholtz Equation	معادلة هلمهولتز
Hyperbolic PDEs	معادلات تفاضلية جزئية من النوع الزائد
Parabolic PDEs	معادلات تفاضلية جزئية من النوع المكافئ
Elliptic PDEs	معادلات تفاضلية جزئية من النوع الناقص
Dense Matrices	مصفوفات كثيفة
Sparse Matrices	مصفوفات متناثرة
Symmetric Matrix	مصفوفة متماثلة
Singular Matrix	مصفوفة منفردة
Non- Singular Matrix	مصفوفة غير منفردة
Upper Triangular Matrix	مصفوفة مثلثية علوية
Lower Triangular Matrix	مصفوفة مثلثية سفلية

(ن)

Ghosts Nodes	نقاط وهمية
Mean Value Theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Fundamental Theorem Of Convergence	نظرية أساسية لتقارب
Taylor's Theorem	نظرية تايلور

قائمة الاختصارات

Abbreviation	Meaning
BC	Boundary Condition
ODE	Ordinary Differential Equation
PDE	Partial Differential Equation
FDM	Finite Difference Method
IVP	Initial Value Problem
JM	Jacobi Method
GSM	Gauss-Seidel Method
CGM	Conjugate Gradient Method
PCGM	Preconditioned Conjugate Gradient Method
ILU	Incomplete LU Factorization
EPDE	Partial Differential Equation Elliptic

المخلص

في هذه الرسالة دراسة وتطبيق بعض الطرق العددية لإيجاد حل بعض أهم المعادلات التفاضلية الجزئية الاهليجية (EPDE) مثل معادلة لابلاس Laplace Equation ومعادلة بواسون Poisson Equation ومعادلة هلمهولتز Helmholtz Equation . ومن خلال تطبيق طريقة الفروق المنتهية Finite Differences Method (FDM) على المعادلات الاهليجية، نتحصل على الأنظمة الخطية، ولحل هذه الأنظمة الخطية نستخدم بعض الطرق التكرارية ومنها طريقة جاكوبي Jacobi Method (JM) ، طريقة جاوس سيدل Gauss-Seidel Method (GSM) ، طريقة التدرج المقترن Conjugate Gradient Method (CGM) وطريقة التدرج المقارن مسبقاً Preconditioned Conjugate Gradient Method (PCGM) وكذلك مقارنة النتائج المتحصل عليها ومعرفة أي الطرق الأسرع والأدق للوصول للحل التقريبي.

تُعد دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات أهمية كبيرة جداً، لما لها من تطبيقات كثيرة في العلوم والرياضيات والهندسة و الفيزياء والعلوم الأخرى، كدراسة الأمواج والسوائل وانتقال الحرارة خلال المواد المعدنية وكذلك الإشعاع والصوت والانتشار أي أنها تمثل الظواهر الطبيعية. (ناجي، شعبان 2007).

كما أن التحليل العددي هو أداة فعالة تربط بين النظرية الرياضية والتطبيق العملي، ويُعد من الركائز الأساسية في علوم الحاسوب والهندسة الحديثة، من خلاله يمكننا التعامل مع مشكلات واقعية معقدة وتحليلها باستخدام تقنيات عددية دقيقة وفعالة، حيث يهتم بابتكار خوارزميات لإيجاد الحلول التقريبية للمشكلات الرياضية التي يصعب حلها أو ليس لها حلول، ونظراً لأن كثيراً من هذه المشكلات لا يمكن التعامل معها بالطرق التحليلية، ظهرت حاجتنا لأساليب تعتمد على التكرار التدريجي للوصول إلى نتائج دقيقة، ومن هنا تأتي أهمية الطرق التكرارية التي تُعد من أبرز أدوات التحليل العددي و أهمها، كما أنها توفر وسيلة عملية وفعالة للحصول على حلول تقريبية يمكن تحسينها خطوة بخطوة حتى تقترب من الحل الصحيح. (عبد ، 2008)

في هذه الرسالة سنختص بدراسة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية من النوع الناقص (الاهليجية)، التي توصف عمليات الحالة الثابتة ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة، ومن أهم الأمثلة على ذلك معادلة لابلاس ومعادلة بواسون اللتان تعدان حالة خاصة من معادلة هلمهولتز، التي لها دور كبير في الهندسة والفيزياء والكيمياء على سبيل المثال حساب التفاعلات الكيميائية والانتشار وغيرها من المجالات، ونظراً لصعوبة أو استحالة الحصول على حلول تحليلية (دقيقة) لمعظم هذه المعادلات، تصبح الطرق العددية أداة لا غنى عنها لتقريب الحلول .

تمت دراسات سابقة للطريقتان العدديتان (CG) و (PCG) من ضمن هذه الدراسات دراسة في 2011 تحت عنوان طريقة التدرج ثنائية الاقتران المسبقة لمجموعة المعادلات الخطية المعقدة واسعة النطاق (Preconditioned Bi-Conjugate Gradient Method of Large – Scale Sparse Complex Linear Equation Group) المجلة الصينية ، المجلد 20 العدد 1

ودراسة أخرى سنة سنة 2016 تحت عنوان تطبيقات (CG) و (PCG) على المعادلات التفاضلية الاهليجية التي تم حلها بطريقة العناصر المحدودة (THE APPLICATIONS OF CG AND PCG ON ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLVED BY FINITE ELEMENT METHOD) OA Aleyan - مجلة الجامعة الأسمرية، 2016 - journals.asmarya.edu.ly

ودراسة أخرى سنة 2018 تحت عنوان طريقة التدرج المترافق ذات الحدود الأربعة باستخدام شرط المترافق الصرف في الأمثلية غير المقيدة (Four-Term Conjugate Gradient (CG) Method Based on Pure Conjugacy Condition For Unconstrained Optimization) قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة كركوك العراق

ودراسة أخرى سنة 2020 تحت عنوان تطبيق لطريقة الفروق المنتهية لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الاهليجية باستخدام طريقة (GS) و طريقة (SOR) (AN APPLICATION OF FINITE)

DIFFERENCE METHOD TO SOLVE ELLIPTIC PDE'S WITH USE OF GS

(AND SOR ITERATIVE METHODS)، المجلد (4)، العدد (2) يوليو 2020

كما أننا سندرس في هذه الرسالة طريقة الفروق المنتهية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية (الاهليجية) الخطية من الرتبة الثانية، وذلك للحصول على أنظمة خطية ومن ثم إيجاد الحل بعدة طرق تكرارية، كما أن هذه الرسالة تهدف إلى مقارنة هذه الطرق من حيث الدقة والاستقرار و التقارب والكفاءة الحاسوبية، ومن هذا المنطلق سيتم تقسيم هذا البحث إلى ثلاثة فصول كالتالي:

الفصل الأول: سنتناول فيه العديد من التعريفات و المفاهيم الأساسية التي سنتطرق إليها أثناء دراستنا في هذه الرسالة

الفصل الثاني: سنوضح تطبيق طريقة الفروق المنتهية (FDM) Finite Differences Method على المعادلات التفاضلية الجزئية الاهليجية للحصول على منظومة خطية.

الفصل الثالث: سيتم حل النظام المتحصل عليه من الفصل الثاني بأربع طرق تكرارية وهي طريقة جاكوبي (JM) وطريقة جاوس سيدل (GSM) وطريقة التدرج المقترن (CGM) وطريقة التدرج المقترن مع الشرط المسبق (PCGM) وذلك باستخدام الماتلاب وسيتم مقارنة النتائج و أي الطرق الأسرع وصولاً للحل.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

Fundamental concepts

Introduction

1.1 مقدمة

سننظر في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بالمعادلات التفاضلية الجزئية والتحليل العددي.

Fundamental concepts

2.1 مفاهيم أساسية

1.2.1 تعريف

تعرف المعادلة التفاضلية (Differential Equation) على أنها معادلة تحتوي على مشتقة أو أكثر للدالة المجهولة بالنسبة لمتغير مستقل واحد أو عدة متغيرات مستقلة، فإذا كانت المعادلة التفاضلية في متغير مستقل واحد ومشتقاته فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية Ordinary Differential Equation وإذا كانت المعادلة التفاضلية في أكثر من متغير مستقل فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية (Partial Differential Equation) (البكور، 2019)

2.2.1 تعريف

المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equation) هي العلاقة بين الدالة المجهولة u والمشتقات الجزئية لهذه الدالة ... ، $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$. (البكور، 2019)

الصورة العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة n لأي دالة مجهولة u تعتمد على متغيرات مستقلة $x_1, x_2, \dots, x_k$ يمكن تمثيلها بالصيغة التالية

$$F\left(x_1, \dots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_k^n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

حيث F دالة غير محددة تربط بين المتغيرات المستقلة، والمتغير التابع، وجميع المشتقات الجزئية حتى الرتبة n .

3.2.1 تعريف

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (Linear Partial Differential Equation) يكون فيها المتغير التابع وكل مشتقاته الجزئية في الصورة الخطية، وذلك بأنها لا تحتوي على مشتقات مضروبة ببعضها ولا على ضرب بين الدالة ومشتقات، والأس يساوي 1.

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية لمتغير تابع u والذي يعتمد على متغيرين مستقلين x و y هي كالتالي:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + D \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + E \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + Fu(x, y) = G(x, y) \quad (2.1)$$

حيث $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ مشتقات الجزئية، والدالة المجهولة $u(x, y)$ حل للمعادلة التفاضلية

الجزئية، و A, B, C, D, E, F, G هي ثوابت أو دوال معلومة بدلالة x و y . (العويضي، زراع وعباس، 2005).

تنقسم المعادلة (2.1) حسب المميز $B^2 - 4AC$ إلى ثلاثة أنواع وهي:-

- إذا كان $B^2 - 4AC = 0$ فإن المعادلة التفاضلية الجزئية من النوع المكافئ (Parabolic PDEs).
 - إذا كان $B^2 - 4AC > 0$ فإن المعادلة التفاضلية الجزئية من النوع الزائد (Hyperbolic PDEs).
 - إذا كان $B^2 - 4AC < 0$ فإن المعادلة التفاضلية الجزئية من النوع الناقص (Elliptic PDEs).
- (شفتر، 2019).

4.2.1 تعريف

رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية (Order Partial Differential Equation) هي رتبة أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية الجزئية (العويضي وآخرون، 2005).

5.2.1 تعريف

إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة n فإن الحل الذي يحتوي على n من الدوال الاختيارية يسمى بالحل العام (General Solution)، وأي حل مستخرج من الحل العام باختيار خاص للدوال الاختيارية يسمى بالحل الخاص (Particular Solution) (البكور، 2019).

الحل التام هو الحل الذي يحتوي على العدد الصحيح من الدوال الاختيارية المناظرة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة وأي حل آخر يكون حل خاص، الحل العام هو مجموع الحل التام والحل الخاص، كما أن الحل الخاص في المعادلة التفاضلية الجزئية يجب أن يضاف للمعادلة التفاضلية شروط وهي الشروط الحدودية (Boundary Conditions) و الشروط الابتدائية (Initial Conditions).

6.2.1 تعريف

الحل الشاذ (Singular Solution) هو الحل الذي لا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار مناسب للدوال الاختيارية (البكور، 2019).

7.2.1 تعريف

لتكن f دالة معرفة على المجموعة D حيث $D: R^n \rightarrow R$ ، نقول أن f لها نهاية l عند x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

حيث $l \in R$

إذا كان لأي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{حيث } x \in D$$

و

$$0 < \|x - x_0\| < \delta$$

8.2.1 تعريف

لتكن f دالة من المجموعة $D \subset R^n$ ، الدالة f تكون متصلة (مستمرة) عند $x_0 \in D$ بشرط أن

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

تكون موجودة و

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

و f تكون متصلة على المجموعة D إذا كانت متصلة عند أي نقطة في D ويرمز لها بالرمز

$$f \in C(D)$$

9.2.1 تعريف

الدالة الحقيقية $f(x)$ مستمرة مقطوعاً في الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا كانت مستمرة عند كل نقطة في هذه الفترة ماعدا عدد منته من النقاط (سليمان، 2021).

10.2.1 تعريف

الشروط الابتدائية (Initial Conditions) هي القيمة الأولى التي نبدأ بها لحل المسألة بالطرق التكرارية (Iterative Methods) والشروط الحدودية (Boundary Conditions) للمعادلة التفاضلية الجزئية تنقسم على النحو التالي:

- شرط ديرشليت (Dirichlet condition) وهو الذي تكون الدالة u على الحدود معطاء في المسألة.
- شرط فان-نيومان (Van-Neumann boundary condition) وهو الذي تكون قيمة المشتقة في الاتجاه العمودي $\frac{\partial u}{\partial n}$ على الحدود معطاء في المسألة.
- شرط روبن (Robin boundary condition) وهو الذي عبارة عن تركيب خطي لشرطي ديرشليت وفان-نيومان (مختلطة) معطاء في المسألة. (kythe, 2011)

11.2.1 تعريف

المعادلة التفاضلية الجزئية (2.1) تسمى معادلة تفاضلية جزئية متجانسة إذا كانت $G(x, y) = 0$ و خلاف ذلك غير متجانسة. (العويضي و آخرون، 2005).

12.2.1 تعريف

معادلة هلمهولتز (Helmholtz Equation) معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية

تكون على الصورة العامة لها

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + f(x, y)u = g(x, y) \quad (3.1)$$

حيث $\forall (x, y) \in R$ ، $R = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$

والدالة المجهولة $u = u(x, y)$ حل للمعادلة، والدالتان $f(x, y)$ و $g(x, y)$ متصلتان ومعلومتان كما أن إذا كانت $f(x, y)$ ثابت فإن يسمى بالعدد الموجي ويرمز له بالرمز k^2 ويطلق عليه الرقم الموجي وإذا كانت $f(x, y)$ دالة فإن يطلق عليها معادلة هلمهولتز المعممة غير المتجانسة .

- في حالة $f(x, y) = 0$ في المعادلة (3.1) فإننا نتحصل على معادلة بواسون (Poisson Equation) والتي تكون على الصور:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = g(x, y) \quad (4.1)$$

- في حالة $g(x, y) = 0$ في المعادلة (4.1) فإننا نتحصل على معادلة لابلاس (Laplace Equation) والتي تكون على الصورة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (5.1)$$

13.2.1 تعريف

بعض المسائل الرياضية (Mathematical Problems) يصعب ايجاد حلها بالطرق التحليلية الجبرية المعتادة، ففي بعض المسائل لا يمكن ايجاد الحلول المضبوطة (Exact Solutions) بالطرق التحليلية والنظريات المعتادة، ولذلك نلجأ لما يسمى **بالتحليل العددي** (Numerical Analysis) الذي يتعلق باشتقاق (Derivation) ووصف (Description) وتحليل (Analysis) طرق (Methods) للحصول على حلول عددية (Numerical solution) لهذه المسائل الرياضية ويتم ذلك بالبحث على خوارزميات (Algorithms) وهي طرق ذات خطوات محددة للوصول من البيانات المعطاة إلى النتائج (حلول عددية) تعدّ تقريباً للحلول.

14.2.1 تعريف

الطرق التكرارية (The Iterative Methods) وهي طرق تبدأ بتقريب ابتدائي ومن ثم اتباع خوارزمية معينة تؤدي إلى تقريبات متتابة أفضل في كل خطوة للوصول إلى الحل ..

15.2.1 تعريف

النظام الخطي (Linear System) هو مجموعة من المعادلات الخطية يتم التعامل معها معاً لإيجاد حل مشترك لجميع المعادلات، يمكن تمثيل النظام الخطي الذي يحتوي على m من المعادلات و n من المتغيرات بالشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث a_{ij} و b_i ثوابت، x_j متغيرات، يمكن كتابة هذا النظام الخطي $AX = B$ بالصورة الآتية:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(ناصر، 2008)

16.2.1 تعريف

المصفوفات المرتبطة بالنظم الخطية تنقسم إلى قسمين :

- مصفوفات كثيفة (Dense Matrices) وهي المصفوفات التي تحتوي على عدد قليل من العناصر الصفرية وتكون صغيرة .
- مصفوفات متناثرة (Sparse Matrices) وهي المصفوفات التي تحتوي على عدد قليل من العناصر غير الصفرية (Nonzero Elements) نتحصل على هذه المصفوفة عادةً عندما نقوم بحل المعادلات التفاضلية بطريقة الفروق المنتهية (Finite Difference Methods) وفي الأغلب تكون رتبة هذه المصفوفات كبيرة جداً، فتكون مناسبة للحل باستخدام الطرق التكرارية التي تستفيد من الطريقة المتناثرة للمصفوفة .(السيد، 2012)

17.2.1 تعريف

المصفوفة المتماثلة (Symmetric Matrix) هي مصفوفة مربعة يكون فيها عناصر المثلث العلوي مساوي لعناصر المثلث السفلي، أي أن تساوي العنصر في الموقع (i, j) مع العنصر في الموقع (j, i) لكل قيم j و i ، وعند تبديل عناصر الصفوف بعناصر الأعمدة لا تتغير المصفوفة.(ناصر، 2008).

18.2.1 تعريف

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ تكون مصفوفة متماثلة موجبة محددة

(Positive Definite Symmetric Matrix –PD) إذا تحقق الشرطين :

- أن تكون متماثلة (Symmetric).
- أن تكون موجبة محددة (Positive Definite) لجميع المتجهات غير الصفرية x أي أن $x^T A x > 0$.(السيد، 2012)

19.2.1 تعريف

المصفوفة A من نوع $n \times n$ تسمى مصفوفة سائدة قطرياً فعلياً (Strictly Diagonally Dominant) عندما

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

20.2.1 تعريف

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ تسمى A مصفوفة مثلثية إذا كانت جميع العناصر الواقعة على أحد جانبي القطر الرئيسي مساوية للصفر أي أن :

- مصفوفة مثلثية عليا (Upper Triangular Matrix) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow i > j$
- مصفوفة مثلثية سفلى (Lower Triangular Matrix) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow i < j$

21.2.1 تعريف

لتكن مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ تسمى مصفوفة منفردة (Singular Matrix) إذا كان $\det(A) = 0$ وتسمى مصفوفة غير منفردة (Non-Singular Matrix) إذا كان $\det(A) \neq 0$ (Burden et al , 1997).

21.2.1 تعريف

نفرض أن x_0 عدد مضبوط (Exact number) ، x قيمة تقريبية (Approximation) الخطأ المطلق (Absolute Error) يعرف :

$$\epsilon = |x_0 - x|$$

والخطأ النسبي (Relative Error) يعرف بالعلاقة :

$$\epsilon_r = \left| \frac{\epsilon}{x_0} \right| = \left| 1 - \frac{x}{x_0} \right|$$

(ناصر، 2008)

Mean Value Theorem

3.1 نظرية القيمة المتوسطة

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، f قابلة للتفاضل على (a, b) ، فإنه يوجد عدد c في (a, b) بحيث إن

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(السعيد، 2011)

Taylor's Theorem

4.1 نظرية تايلور

لتكن $f \in C^{n+1}[a, b]$ ، وأن x_0 عدد موجود في $[a, b]$ ، فإنه لكل $x \in [a, b]$ يوجد دالة $\xi(x)$ والتي تقع بين x_0 و x وتحقق :

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

حيث أن

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^n(x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) , \quad \xi \in (x_0, x)$$

حيث $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدرجة n للدالة $f(x)$ حول العدد x_0 ، $R_{n+1}(x)$ هو الحد المتبقي المرتبط بكثيرة الحدود $P_n(x)$ ، المتسلسلة اللانهائية والتي يتم الحصول عليها بأخذ نهاية $P_n(x)$ عندما $n \rightarrow \infty$ تسمى متسلسلة تايلر (Taylor series) لدالة $f(x)$ حول x_0 وتكون على الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

عندما $x_0 = 0$ فإن المتسلسلة تسمى متسلسلة ماكلورين (Maclaurin series) التي تأخذ الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

(السعيد، 2011)

Fundamental Theorem Of Convergence

5.1 نظرية الأساسية للتقارب

لأي $x^0 \in R^n$ ، المتسلسلة $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة كالآتي:

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \quad \text{لكل من } k \geq 1 \text{ و } c \neq 0$$

تكون متقاربة إلى الحل الوحيد $x = Tx + c$ إذا وإذا كان فقط $\rho(T) < 1$

ملاحظة: كل ما كان ρ أصغر، كان تقارب الطريقة أسرع (Burden et al , 1997)

6.1 نظرية الوجود والوحدانية لحل مسألة ديرشليت بطريقة الفروق المنتهية

Existence and Uniqueness of the Finite Difference Method for Dirichlet Problem

نفرض أن Ω منطقة محدودة و مترابطة ومنتظمة، وكانت معادلة بواسون معرفة على هذه المنطقة مع شروط ديرشليت الحدية أي أن

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & \text{on } \Omega, \quad u = u(x, y) \\ Bc : u = g(x, y), & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حيث $f(x, y)$ و $g(x, y)$ دوال اختيارية ليست مستمرة بالضرورة، بالتالي فإنه عند حل هذه المعادلة مع شروط

ديرشليت الحدية بطريقة الفروق المنتهية يكون لها حل وحيد وتعرف هذه النظرية بنظرية الوجود والوحدانية لحل مسألة ديرشليت بطريقة الفروق المنتهية (stanoyevitch, 2005)

6.1 نظرية الوجود والوحدانية لحل معادلة بواسون مع شروط فان-نيومان الحدودية

Existence and Uniqueness for the Poisson PDE with Van-Neumann Boundary Condition

نفرض أن لدينا معادلة بواسون معرفة على المنطقة الملساء والمحدودة Ω مع شروط فان-نيومان الحدية غير المتجانسة أي أن

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & \text{on } \Omega, \quad u = u(x, y) \\ Bc : \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y), & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حيث $f(x, y)$ دالة مشتقاتها الجزئية مستمرة مقطعيًا على المنطقة Ω ، و $g(x, y)$ دالة مستمرة مقطعيًا على $\partial\Omega$

فإن معادلة بواسون يكون لها حل إذا وفقط إذا كان تحقق الشرط :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} g(x, y) \, ds$$

ويسمى هذا الشرط بالشرط التوافقي Compatibility Condition ويكون هذا الحل غير وحيد ويتحدد بإضافة

ثابت جمعي (stanoyevitch, 2005)

الفصل الثاني
طريقة الفروق المنتهية
Finite Differences Method

سندرس في هذا الفصل طريقة الفروق المنتهية (FDM) التي سنطبقها على المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية من الرتبة الثانية والتي منها سنتحصل على نظام خطي وسنوضح تطبيقها على بعض الأمثلة بعدة أنواع للشروط الحدودية .

2.2 طريقة الفروق المنتهية Finite Differences Method(FDM)

المعادلات التفاضلية الجزئية ليست جميعها قابلة للحل التحليلي، فإن الطرق العددية مثل طريقة الفروق المنتهية FDM توفر وسيلة فعالة للحصول على حلول تقريبية كما أنها تعتمد فكرتها الأساسية على استبدال المشتقات في المعادلة التفاضلية بتقريبات جبرية إلى قيم الدالة عند نقاط منفصلة، المبادئ الأساسية لها هي التمثيل الشبكي وتقريب المشتقات، كما أنها تعتمد على متسلسلة تايلور في إيجاد تقريب المشتقات (Al-Rob,2016) .

لاشتقاق الطريقة علينا أولاً تقسيم الفترات $[a, b]$ و $[c, d]$ إلى m, n تقسيمات متساوية على التوالي بحيث

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad k = \frac{d - c}{m}$$

سنوضح ذلك من خلال متسلسلة تايلور يوجد أنواع رئيسية من التقريبات والتي تختلف فيما بينها في كيفية استخدام النقاط المجاورة لنقطة المراد إيجادها.

الصيغة لمتسلسلة تايلور في بعدين لدالة $u(x, y)$ حول النقطة (x_0, y_0) تكون كالتالية:

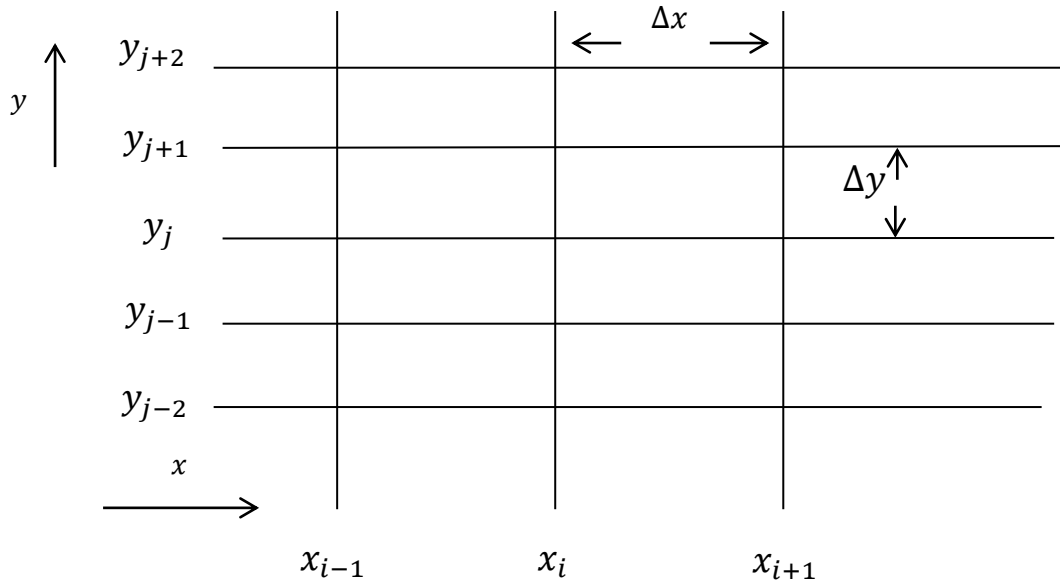
$$\begin{aligned} u(x, y) = & u(x_0, y_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) \\ & + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2.2 الفروق الامامية Forward Difference

هي تقريب لمشتقة الدالة عند نقطة معينة باستخدام قيمة الدالة عند هذه النقطة وعند النقطة التالية لها.

والآن سنعرف النطاق والذي هو عبارة عن منطقة في المستوى x, y كما موضح في الشكل (1.2)

(عوين، 2010)



الشكل (1.2) نطاق مسائل في بعدين

لو كان $\Delta x = h$ فإن من خلال مفكوك متسلسلة تايلر نجد أن :

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u(\xi_1, y)}{\partial x^4} + \dots \quad (2.2)$$

حيث $\xi_1 \in (x, x+h)$

وإذا كان $\Delta y = k$ فإن:

$$u(x, y+k) = u(x, y) + k \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x, \eta_1)}{\partial y^4} + \dots \quad (3.2)$$

حيث $\eta_1 \in (y, y+k)$

الآن نرمز لقيمة الدالة $u(x, y)$ عند النقطة (x_i, y_j) بالرمز $u_{i,j}$ وبالتالي نحصل على الفرق الأمامي في بعدين.

المشتقة الاولى التقريبية بالنسبة لـ x و y

لتقريب $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ باستخدام الفروق الأمامية نستخدم قيم الدالة عند النقاط (x_i, y_j) و $(x_i + h, y_j)$ نتحصل على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (4.2)$$

وعند النقاط $(x_i, y_j + k)$ و (x_i, y_j) نتحصل على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} \quad (5.2)$$

المشتقة الثانية التقريبية بالنسبة لـ x و y

لتقريب $\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2}$ باستخدام الفروق الأمامية نستخدم قيم الدالة عند النقاط (x_i, y_j) و $(x_i + h, y_j)$ و $(x_i + 2h, y_j)$ نتحصل على الصيغة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} \quad (6.2)$$

وعند النقاط $(x_i, y_j + k)$ و (x_i, y_j) و $(x_i, y_j + 2k)$ نتحصل على الصيغة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} + u_{i,j}}{k^2} \quad (7.2)$$

إذا تقريب المشتقة الاولى وتقريب المشتقة الثانية باستخدام الفروق الأمامية حيث h هي خطوة التقدم في اتجاه x و k هي خطوة التقدم في اتجاه y والخطأ في هذا التقريب هو $O(h)$.

Backward Difference

2.2.2 الفروق الخلفية

هي تقريب لمشتقة دالة عند نقطة معينة باستخدام قيمة الدالة عند هذه النقطة وعند النقطة السابقة لها، إذا كان $\Delta x = h$ من خلال مفكوك متسلسلة تايلر نجد أن :

$$\begin{aligned} u(x - h, y) = & u(x, y) - h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} \\ & + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u(\xi_2, y)}{\partial x^4} + \dots \end{aligned} \quad (8.2)$$

حيث $\xi_2 \in (x - h, x)$

وإذا كان $\Delta y = k$ فإن:

$$u(x, y - k) = u(x, y) - k \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x, \eta_1)}{\partial y^4} + \dots \quad (9.2)$$

حيث $\eta_1 \in (y, y - k)$

الآن نرمز لقيمة الدالة $u(x, y)$ عند النقطة (x_i, y_j) بالرمز $u_{i,j}$ وبالتالي نحصل على الفرق الخلفي في بعدين.

المشتقة الأولى التقريبية بالنسبة لـ x و y

لتقريب $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ و $\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j)$ باستخدام الفروق الخلفية نستخدم قيم الدالة عند النقاط $(x_i - h, y_j)$ و $(x_i, y_j - k)$ نحصل على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \quad (10.2)$$

وعند النقاط $(x_i, y_j - k), (x_i, y_j)$ نحصل على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} \quad (11.2)$$

المشتقة الثانية التقريبية بالنسبة لـ x و y

لتقريب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)$ باستخدام الفروق الخلفية عند النقاط

$(x_i - 2h, y_j), (x_i - h, y_j), (x_i, y_j)$ نحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} \quad (12.2)$$

وعند النقاط $(x_i, y_j - 2k), (x_i, y_j - k), (x_i, y_j)$ نحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{k^2} \quad (13.2)$$

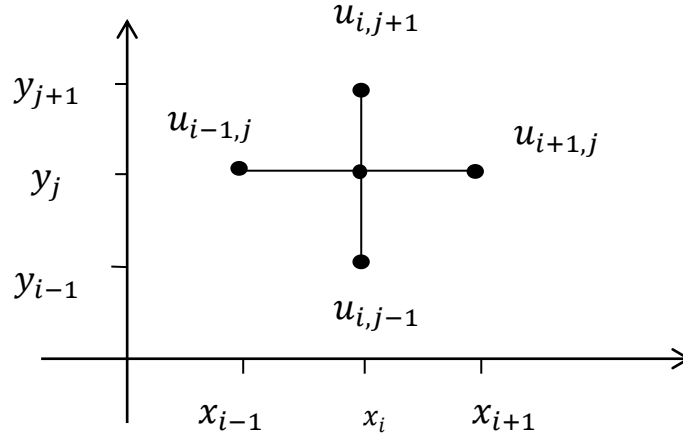
إذا عند تقريب المشتقة الأولى وتقريب المشتقة الثانية باستخدام الفروق الخلفية يكون الخطأ في هذا التقريب هو

$$O(k)$$

3.2.2 الفروق المركزية

Central Differences

هي تقريب لمشتقة الدالة عند نقطة معينة باستخدام قيمة الدالة على جانبي هذه النقطة كما موضح في الشكل (2.2).



الشكل (2.2) توزيع نقاط الشبكة حول النقطة المركزية (x_i, y_j)

إذا كانت $\Delta x = h$ و $\Delta y = k$ باستخدام متسلسلة تايلر نتحصل على

$$u(x+h, y) - u(x-h, y) = 2h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2h^3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots \quad (14.2)$$

$$u(x+h, y) - u(x-h, y) = 2h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + O(h^3)$$

$$u(x, y+k) - u(x, y-k) = 2k \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + 2k^3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \dots \quad (15.2)$$

$$u(x, y+k) - u(x, y-k) = 2k \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + O(k^3)$$

المشتقة الأولى بالنسبة لـ x و y

ونرمز لقيمة الدالة $u(x, y)$ عند النقطة (x_i, y_j) بالرمز $u_{i,j}$ وبالتالي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h} - O(h^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (16.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2k} - O(k^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} \quad (17.2)$$

المشتقة الثانية بالنسبة لـ x و y

إذا كانت $\Delta x = h$

$$u(x+h,y) + u(x-h,y) = 2u(x,y) + h^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u(\xi,y)}{\partial x^4}$$

حيث $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} - O(h^2)$$

وإذا كانت $\Delta y = k$ فإن

$$u(x,y+k) + u(x,y-k) = 2u(x,y) + k^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 u(\eta,y)}{\partial y^4}$$

حيث $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{u(x,y+k) - 2u(x,y) + u(x,y-k)}{k^2} - O(k^2)$$

نرمز لقيمة الدالة $u(x,y)$ عند النقطة (x_i, y_j) بالرمز $u_{i,j}$ وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (18.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \quad (19.2)$$

في الفروق الأمامية والفروق الخلفية الخطأ في التقريب هو $O(h)$ بينما في الفروق المركزية الخطأ في التقريب

هو $O(h^2)$ هذا يعني أن الفروق المركزية توفر دقة أعلى، حيث كلما $h \rightarrow 0$ فإن $O(h^2) \rightarrow 0$

(Burden et al , 1997)

4.2.2 طريقة الفروق المنتهية للحل في بعدين

سنوضح تطبيق طريقة الفروق المنتهية على المعادلة التفاضلية الاهليجية .

عند إيجاد الحل علينا تطبيق بعض خطوات:

- الخطوة الأولى : نقسم النطاق ونختار أعداد صحيحة n, m بحيث :

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta y = y_{j+1} - y_j$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1, i = 1, 2, \dots, m-1$$

حيث $\Delta x = h, \Delta y = k$ وهذا يعتبر انشاء شبكة في المستوى x و y

- الخطوة الثانية : إيجاد معادلة الفروق المنتهية بالتعويض بالمشتقات في المعادلة الأصلية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

معادلة لابلاس في بعدين

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (20.2)$$

بعد التعويض في المشتقة نتحصل على

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

في حالة $h \neq k$ فإن تقريب المشتقات تكون على الصيغة التالية

$$u_{i+1,j} - 2\left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j} + u_{i-1,j} + \left(\frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j+1} + \left(\frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j-1} = 0$$

في حالة $h = k$ فإن تقريب المشتقات تكون على الصيغة التالية

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0 \quad (21.2)$$

معادلة بواسون في بعدين

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (22.2)$$

بعد التعويض نتحصل على

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f_{ij}$$

في حالة $h \neq k$ نتحصل على التقريب بالصيغة

$$u_{i+1,j} - 2\left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j} + u_{i-1,j} + \left(\frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j+1} + \left(\frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j-1} = h^2 f_{ij}$$

في حالة $h = k$ نتحصل على التقريب بالصيغة

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = h^2 f_{ij} \quad (23.2)$$

معادلة هلمهولتز في بعدين

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + K^2 u = g(x, y) \quad (24.2)$$

بعد التعويض نتحصل على

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + K^2 u_{i,j} = g_{ij} \quad (25.2)$$

في حالة $h \neq k$ نتحصل على التقريب بالصيغة

$$u_{i+1,j} - 2\left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j} + u_{i-1,j} + \left(\frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j+1} + \left(\frac{h^2}{k^2}\right)u_{i,j-1} + h^2 K^2 u_{i,j} = h^2 g_{ij}$$

في حالة $h = k$ نتحصل على تقريب المشتقات بالصيغة

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 K^2 u_{i,j} = h^2 g_{ij} \quad (26.2)$$

(Burden et al , 1997) في هذه الرسالة درسنا حالة $h = k$ في جميع المعادلات التفاضلية الجزئية الاهليجية التي تم ذكرها

Dirichlet boundary condition

(i) شرط ديرشليت الحدودي

بعد شرط ديرشليت من أهم الشروط التي تستخدم في دراسة المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، هذا الشرط يكون فيه الحل على حدود النطاق الذي ندرسه معلوم، أي أن قيمة الدالة عند الحدود موجودة ونبحث على الحل داخل النطاق بحيث يحقق المعادلة ويطابق القيم المعطاة على الحدود، كما أن هذا الشرط هو الأساس الذي يربط بين المعادلة داخل المجال و القيم المفروضة على الحدود.

مثال 1.2

نفرض أن المسألة لمعادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq 2$$

الشروط الحدودية

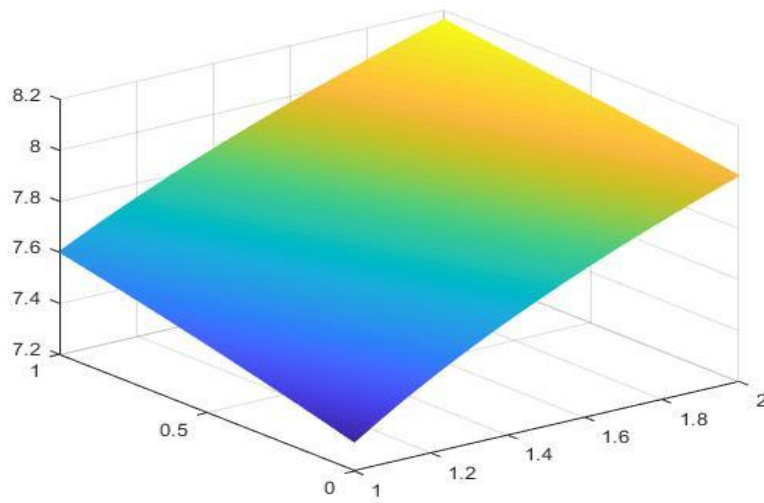
$$u(x, 1) = \ln(x^2 + 1) \quad , \quad u(x, 0) = \ln x^2 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(2, y) = \ln(y^2 + 4) \quad , \quad u(1, y) = \ln(y^2 + 1) \quad 1 \leq x \leq 2$$

علما بأن الحل الفعلي هو $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

الشكل التالي يوضح بياناً الحل الفعلي لهذا المثال



الشكل (3.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (1.2)

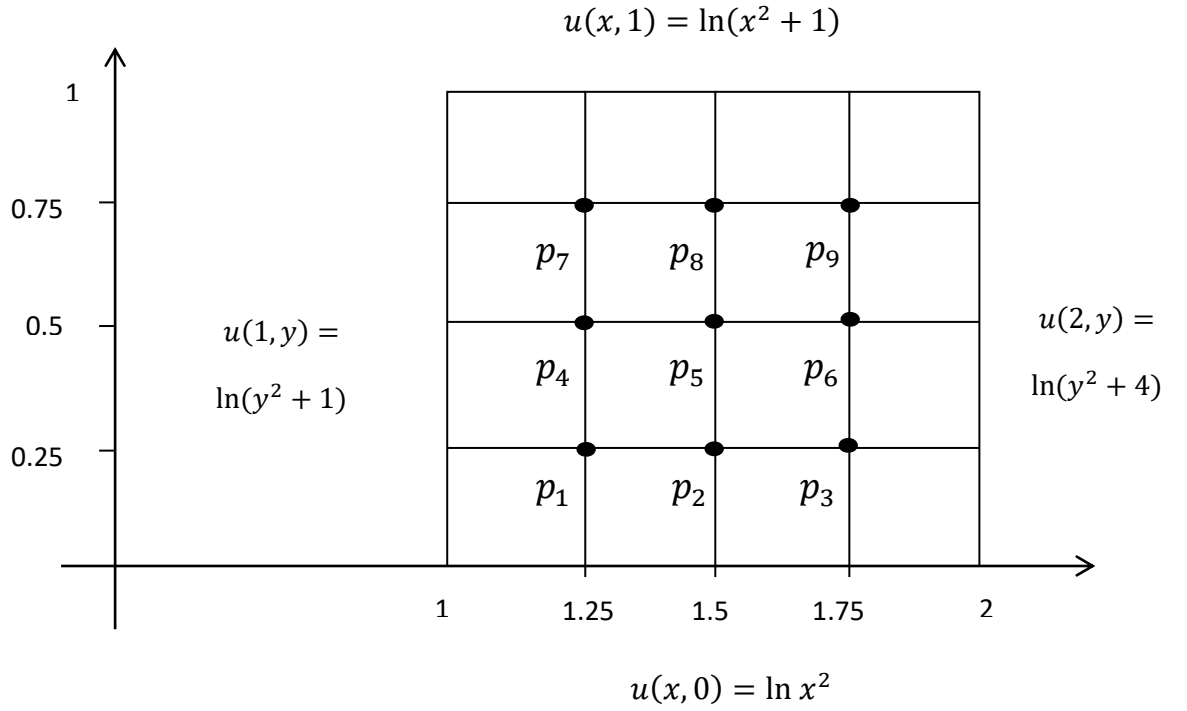
نقوم بتطبيق طريقة الفروق المنتهية للحصول على منظومة خطية ودراسة عدة حالات مختلفة لقيمة h و k .

الحالة الأولى: نختار عدداً صحيحان $N = 4$ و $M = 4$ بحيث

$$h = \frac{l - 0}{N} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad k = \frac{l - 0}{M} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$0.25 = k = h \quad \text{إذا}$$

أولاً: انشاء شبكة في المستوى $x y$ كما هو موضح في الشكل (4.2):



الشكل (4.2) النقاط الداخلية للمجال في مثال (1.2) عندما $0.25 = k = h$

تم تقسيم الفترة إلى أربع أقسام متساوية حيث $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$

$$x_1 = 1.25, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 1.75$$

$$y_1 = 0.25, \quad y_2 = 0.5, \quad y_3 = 0.75$$

ثانياً: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

التعويض بالمشتقات $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ في المعادلة الأصلية فنحصل على (21.2)

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

$$-4 P_1 + P_2 + P_4 = -0.5069117244$$

$$P_1 - 4P_2 + P_3 + P_5 = -0.8109302162$$

$$P_2 - 4P_3 + P_6 = -2.521030124$$

$$P_1 - 4P_4 + P_5 + P_7 = -0.2231435513$$

$$P_2 + P_4 - 4P_5 + P_6 + P_8 = 0$$

$$P_3 + P_5 - 4P_6 + P_9 = -1.446918983$$

$$P_4 - 4P_7 + P_8 = -1.387270447$$

$$P_5 + P_7 - 4P_8 + P_9 = -1.178654996$$

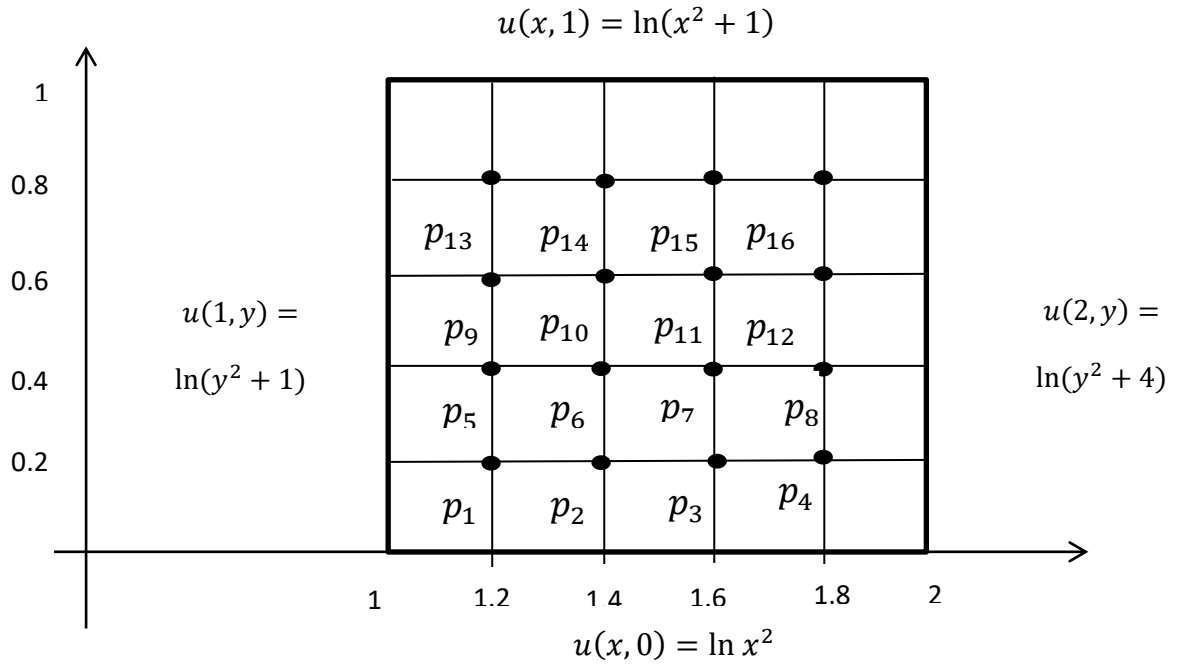
$$P_6 + P_8 - 4P_9 = -2.919669267$$

ومنها حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 9×9 ومصفوفة المجاهيل من النوع 1×9 وكذلك مصفوفة الحدود المطلقة من النوع 1×9 وتكون على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.50691 \\ -0.81093 \\ -2.52103 \\ -0.22314 \\ 0 \\ -1.44691 \\ -1.38727 \\ -1.17865 \\ -2.91966 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: نختار $N = 5$ و $M = 5$ وبالتالي $0.2 = k = h$

أولاً: انشاء الشبكة كما موضح في الشكل (5.2)



الشكل (5.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (1.2) عندما $0.2 = k = h$

ثانيا : إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية :

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

$$-4 P_1 + P_2 + P_5 = -0.4039$$

$$P_1 - 4P_2 + P_3 + P_6 = -0.6729$$

$$P_2 - 4P_3 + P_4 + P_7 = -0.9400$$

$$P_3 - 4P_4 + P_8 = -2.5718$$

$$P_1 + -4P_5 + P_6 + P_9 = -0.1484$$

$$P_2 + P_5 - 4P_6 + P_7 + P_{10} = 0$$

$$P_3 + P_6 - 4P_7 + P_8 + P_{11} = 0$$

$$P_4 + P_7 - 4P_8 + P_{12} = -1.4255$$

$$P_5 - 4P_9 + P_{10} + P_{13} = -0.3075$$

$$P_6 + P_9 - 4P_{10} + P_{11} + P_{14} = 0$$

$$P_7 + P_{10} - 4P_{11} + P_{12} + P_{15} = 0$$

$$P_8 + P_{11} - 4P_{12} + P_{12} + P_{16} = -1.4725$$

$$P_9 - 4P_{13} + P_{14} = -1.3867$$

$$P_{10} + P_{13} - 4P_{14} + P_{15} = -1.0852$$

$$P_{11} + P_{14} - 4P_{15} + P_{16} = -1.2698$$

$$P_{12} + P_{15} - 4P_{16} = -2.9793$$

ومنها حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 16×16 و مصفوفة المجاهيل من النوع 16×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من نوع 16×1 .

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ P_{16} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.4039 \\ -0.6729 \\ -0.9400 \\ -2.5718 \\ -0.1484 \\ 0 \\ 0 \\ -1.4255 \\ -0.3075 \\ 0 \\ 0 \\ -1.4725 \\ -1.3867 \\ -1.0852 \\ -1.2698 \\ -2.9793 \end{bmatrix}$$

الحالة الثالثة: نختار $M, N = 10$ وبالتالي تكون $k = h = 0.1$ وبتطبيق نفس الخطوات السابقة لإيجاد معادلة الفروق وهي إنشاء الشبكة و استخدام الفروق المركزية تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 81×81 ومصفوفة المجاهيل من النوع 81×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع .

الحالة الرابعة: نختار $M, N = 20$ وبالتالي تكون $k = h = 0.05$ بعد تطبيق نفس الخطوات لإيجاد الحل بطريقة الفروق المنتهية تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 361×361 ومصفوفة المجاهيل من النوع 361×1 .

2.2 مثال

نفرض أن المسألة لمعادلة لابلاس كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

الشروط الحدودية

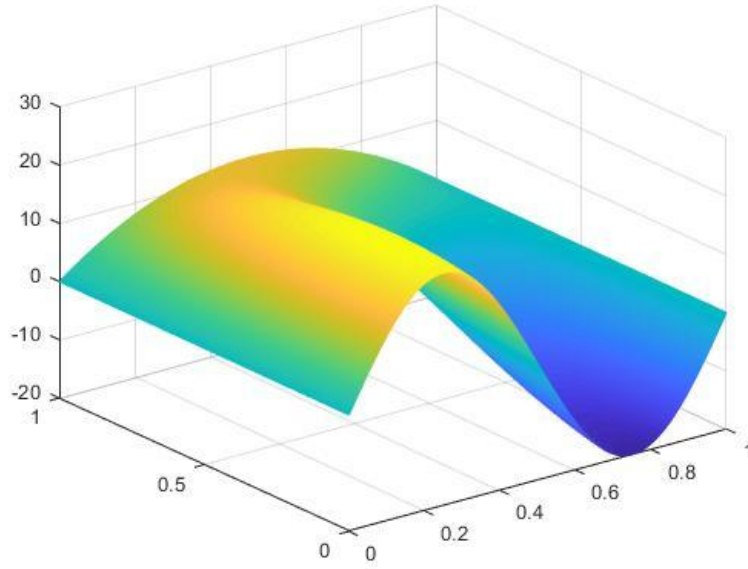
$$u(x, 1) = 50x(1 - x) \quad , \quad u(x, 0) = 20\sin(2\pi x) \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(0, y) = 0 \quad , \quad u(1, y) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, y) = 50xy(1 - x) + 20 \sin(2\pi x) \cos \frac{\pi}{2} y \quad \text{علما بأن الحل التحليلي}$$

الحل

الشكل التالي يوضح لنا بيانياً الحل الفعلي لهذا المثال

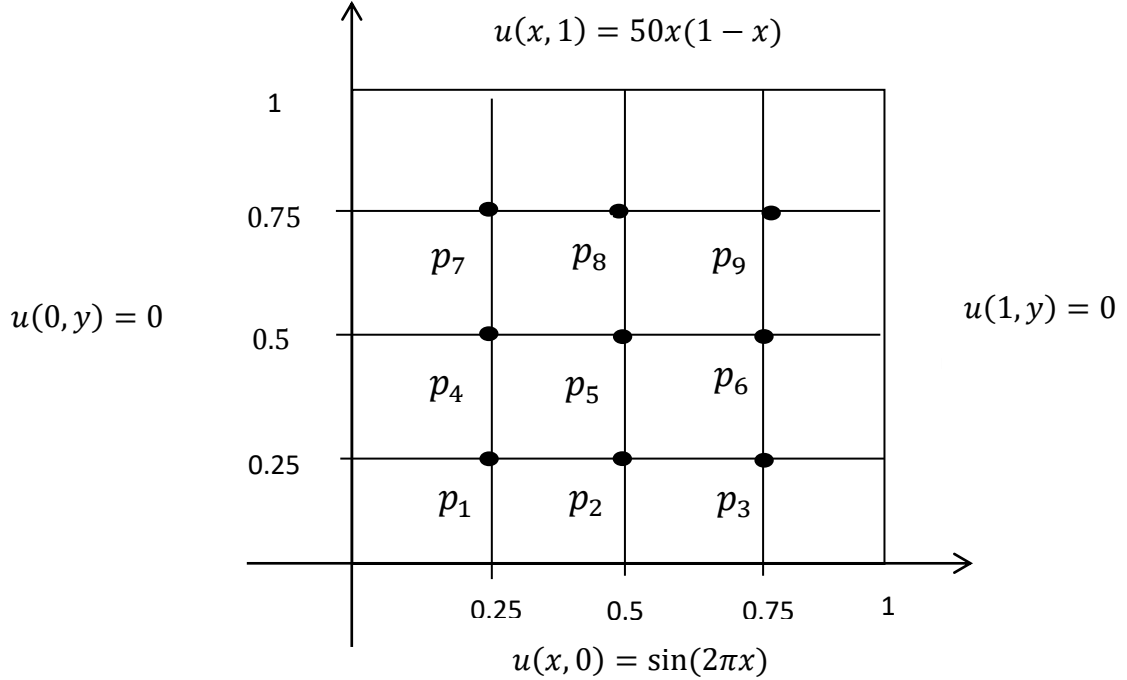


الشكل (6.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (2.2)

سنقوم بتطبيق طريقة الفروق المنتهية على هذا المثال للحصول على منظومة خطية ودراسة حالات مختلفة لقيمة h و k نتبع الاتي :

الحالة الاولى: نختار $N = 4$ و $M = 4$ هذا يعني أن $h = k = 0.25$

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما هو موضح في الشكل (7.2):



الشكل (7.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (2.2) عندما $h = k = 0.25$

ثانيا: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

التعويض بالمشتقات $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ في المعادلة الأصلية فنحصل على

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

$$-4 P_1 + P_2 + P_4 = -20.00000$$

$$P_1 - 4P_2 + P_3 + P_5 = 0$$

$$P_2 - 4P_3 + P_6 = 20.00000$$

$$P_1 - 4P_4 + P_5 + P_7 = 0$$

$$P_2 + P_4 - 4P_5 + P_6 + P_8 = 0$$

$$P_3 + P_5 - 4P_6 + P_9 = 0$$

$$P_4 - 4P_7 + P_8 = -9.375$$

$$P_5 + P_7 - 4P_8 + P_9 = -12.5$$

$$P_6 + P_8 - 4P_9 = -9.375$$

ومنها تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 9×9 ومصفوفة مجاهيل من النوع 9×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 9×1 موضحة كالتالي:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.0000 \\ 0 \\ 20.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9.375 \\ -12.5 \\ -9.375 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: نختار $M, N = 5$ أي أن $h = k = 0.2$ باستخدام نفس الخطوات السابق في إيجاد المنظومة الخطية لكن بتغيير قيمة h, k نتحصل على المنظومة الخطية التالية:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ P_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.0211 \\ -11.7557 \\ 11.7557 \\ 19.0211 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8.0000 \\ -12.0000 \\ -12.0000 \\ -8.0000 \end{bmatrix}$$

الحالة الثالثة: نختار $M, N = 10$ أي أن $h = k = 0.1$ تحصلنا على منظومة خطية باتباع نفس الخطوات للحل فكانت المنظومة تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 81×81 ومصفوفة المجاهيل من النوع 81×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 81×1 .

الحالة الرابعة: نختار $M, N = 20$ أي أن $h = k = 0.05$ باتباع نفس الخطوات تحصلنا على المنظومة الخطية التي تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 361×361 ومصفوفة المجاهيل من النوع 361×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 361×1 .

3.2 مثال

نفرض أن المسألة لمعادلة بواسون كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad 1 \leq y \leq 2, \quad 1 \leq x \leq 2$$

الشروط الحدودية

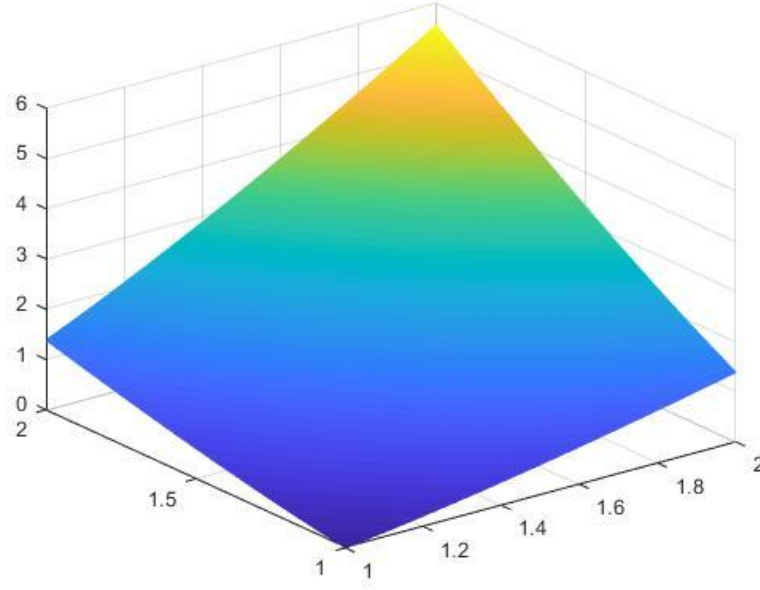
$$u(x, 2) = x \ln(4x^2) \quad , \quad u(x, 1) = x \ln x \quad 1 \leq y \leq 2$$

$$u(2, y) = y \ln(4y^2) \quad , \quad u(1, y) = y \ln y \quad 1 \leq x \leq 2$$

علما بان الحل التحليلي هو $u(x, y) = xy \ln(xy)$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

الشكل التالي يوضح بيانياً الحل الفعلي لهذا المثال .



الشكل (8.2) الحل الفعلي لمعادلة بواسون في المثال (3.2)

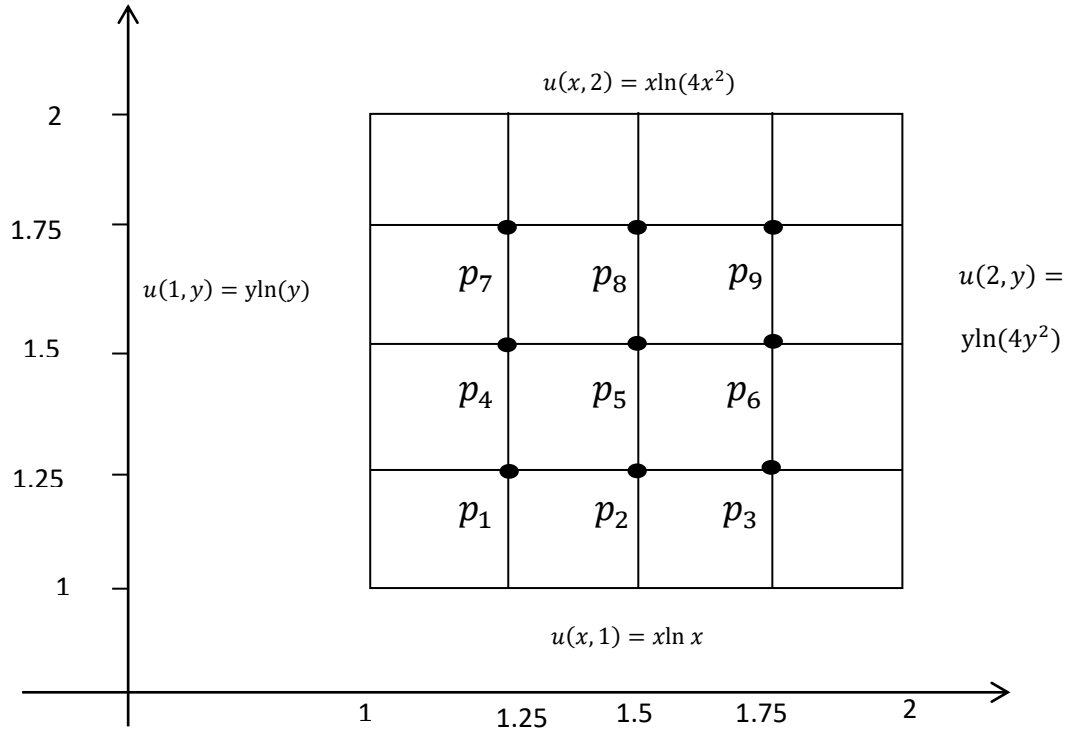
نقوم بتطبيق طريقة الفروق المنتهية للحصول على منظومة خطية والتي سنقوم بدراستها في عدة حالات مختلفة لقيمة h و k نتبع الآتي:

الحالة الأولى: نختار عدداً صحيحان $N = 4$ و $M = 4$ بحيث

$$h = \frac{l - 0}{N} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad k = \frac{l - 0}{M} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{إذا } 0.25 = k = h$$

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما هو موضح في الشكل (9.2):



الشكل (9.2) يحدد النقاط الداخلية للمجال في المثال (3.2) عندما $(h = k = 0.25)$

ثانيا: علينا إيجاد المنظومة الخطية وذلك باستخدام الفروق المركزية (22.2) فنتحصل على المعادلة (23.2)

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = h^2 f(x_i, y_j)$$

$$-4P_1 + P_2 + P_4 = -0.43285889$$

$$P_1 - 4P_2 + P_3 + P_5 = -0.48111433$$

$$P_2 - 4P_3 + P_6 = -3.13791160$$

$$P_1 - 4P_4 + P_5 + P_7 = -0.48111433$$

$$P_2 + P_4 - 4P_5 + P_6 + P_8 = 0.125$$

$$P_3 + P_5 - 4P_6 + P_9 = -3.16934878$$

$$P_4 - 4P_7 + P_8 = -3.13791159$$

$$P_5 + P_7 - 4P_8 + P_9 = -3.16934878$$

$$P_6 + P_8 - 4P_9 = -5.6443408$$

ومنها تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات ومصفوفة مجاهيل ومصفوفة الحدود المطلقة تكون على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.43285 \\ -0.48111 \\ -3.13791 \\ -0.48111 \\ 0.125 \\ -3.16934 \\ -3.13791 \\ -3.16934 \\ -5.64434 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: $h = k = 0.2$ وذلك باتباع نفس الخطوات في الحل فتحصلنا على المنظومة الخطية التالية

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ P_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3576 \\ -0.3901 \\ -0.6687 \\ -3.0725 \\ -0.3901 \\ -0.0800 \\ -0.0807 \\ -2.8004 \\ -0.6687 \\ -0.0807 \\ 0.0800 \\ -3.6415 \\ -3.0725 \\ -2.8004 \\ -3.6415 \\ -9.1427 \end{bmatrix}$$

الحالة الثالثة: درسنا المثال في حالة $h = k = 0.1$ باتباع نفس الخطوات تحصلنا على المنظومة الخطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 81×81 ومصفوفة المجاهيل من النوع 81×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 81×1 .

الحالة الرابعة: في حالة $h = k = 0.05$ تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على منظومة خطية من النوع 361×361 ومصفوفة المجاهيل من النوع 361×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 361×1 .

مثال 4.2

نفرض أن المسألة لمعادلة هلمهولتز كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = xy \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

الشروط الحدودية

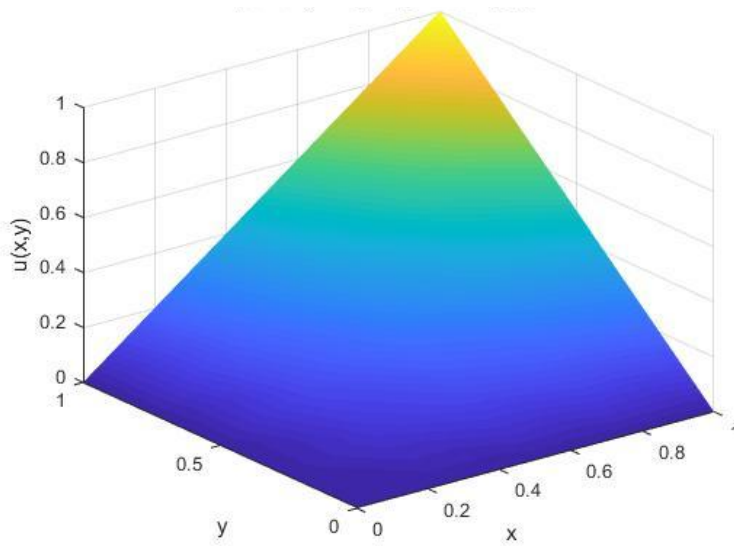
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = x \quad 0 < y < 1$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = y \quad 0 < x < 1$$

علما بأن الحل التحليلي هو $u(x,y) = xy$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

الشكل التالي يوضح بيانياً الحل الفعلي لهذا المثال .



الشكل (10.2) الحل الفعلي لمعادلة هلمهولتز في المثال (4.2)

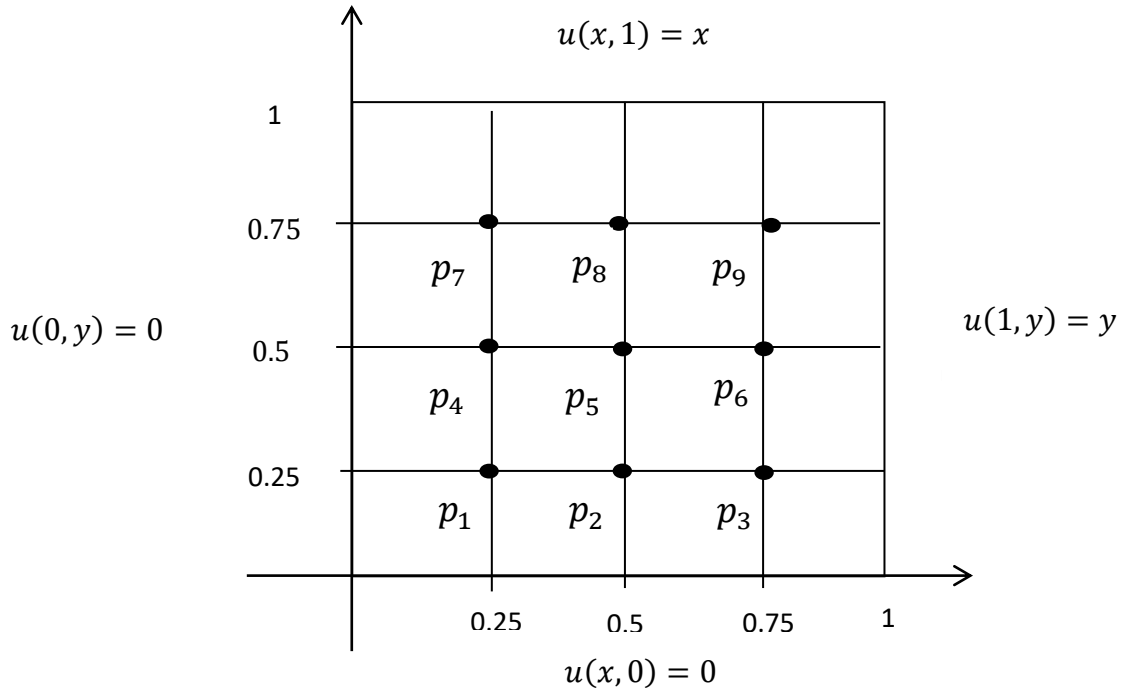
نقوم بتطبيق طريقة الفروق المنتهية للحصول على منظومة خطية ودراسة عدة حالات مختلفة لقيمة h و k .

الحالة الأولى: نختار عدداً صحيحان $N = 4$ و $M = 4$ بحيث

$$h = \frac{l-0}{N} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad k = \frac{l-0}{M} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$0.25 = k = h \quad \text{إذا}$$

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما هو موضح في الشكل (11.2):



الشكل (11.2) تحديد النقاط الداخلية للمجال في المثال (4.3) عندما $h = k = 0.25$

ثانياً: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

التعويض بالمشتقات في المعادلة الأصلية فنحصل على المعادلة (24.2)

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + u_{i,j} = f(x_i, y_j)$$

$$16(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - 63u_{i,j} = x_i y_j$$

$$-63P_1 + 16P_2 + 16P_4 = 0.0625$$

$$16P_1 - 63P_2 + 16P_3 + 16P_5 = 0.125$$

$$16P_2 - 63P_3 + 16P_6 = -3.8125$$

$$16P_1 - 63P_4 + 16P_5 + 16P_7 = 0.125$$

$$16P_2 + 16P_4 - 63P_5 + 16P_6 + 16P_8 = 0.25$$

$$16P_3 + 16P_5 - 63P_6 + 16P_9 = -7.625$$

$$16P_4 - 63P_7 + 16P_8 = -3.8125$$

$$16P_5 + 16P_7 - 63P_8 + 16P_9 = -7.625$$

$$16P_6 + 16P_8 - 63P_9 = -23.4375$$

ومنها حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات ومصفوفة مجاهيل ومصفوفة الحدود المطلقة تكون على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} -63 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -63 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -63 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & -63 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 & -63 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -63 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -63 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -63 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.1250 \\ -3.8125 \\ 0.1250 \\ 0.2500 \\ -7.6250 \\ -3.8125 \\ -7.6250 \\ -23.4375 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: $h = k = 0.2$ حصلنا على منظومة خطية على الشكل التالي

$$\begin{bmatrix} -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -99 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 0 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 25 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & -99 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 & -99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ P_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3576 \\ -0.3901 \\ -0.6687 \\ -3.0725 \\ -0.3901 \\ -0.0800 \\ -0.0807 \\ -2.8004 \\ -0.6687 \\ -0.0807 \\ 0.0800 \\ -3.6415 \\ -3.0725 \\ -2.8004 \\ -3.6415 \\ -9.1427 \end{bmatrix}$$

الحالة الثالثة: درسنا المثال عندما $h = k = 0.1$ باتباع نفس الخطوات حصلنا على المنظومة الخطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 81×81 ومصفوفة المجاهيل من النوع 81×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 81×1 .

الحالة الرابعة: عندما $h = k = 0.05$ حصلنا على منظومة خطية تحتوي على منظومة خطية من النوع 361×361 ومصفوفة المجاهيل من النوع 361×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 361×1 .

Van-Neumann Boundary Condition

(ii) شرط فان-نيومان الحدودي

شروط فان-نيومان الحدية ماهي إلا امتداد عددي لفكرة ديرشليت لذلك سنقوم باتباع نفس الخطوات التي تمت تطبيقها في شروط ديرشليت ولكن سنستثني تقريب الشروط الحدية، ولكن يقوم بتقريب جانب فقط من المنطقة المراد دراستها، والآن سنوضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية (Papanikos & Gousidou, 2015)

مثال 5.2

نفرض أن المسألة لمعادلة لابلاس كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

الشروط الحدودية

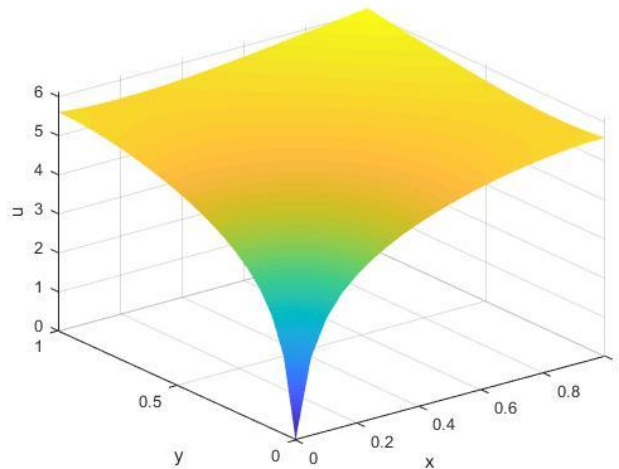
$$u_y(x, 0) = x, \quad u_y(x, 1) = x \quad 0 < x < 1$$

$$u_x(0, y) = y, \quad u_x(1, y) = y \quad 0 < y < 1$$

علما بأن الحل التحليلي هو $u(x, y) = xy$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

الشكل التالي يوضح بيانياً الحل الفعلي لهذا المثال .

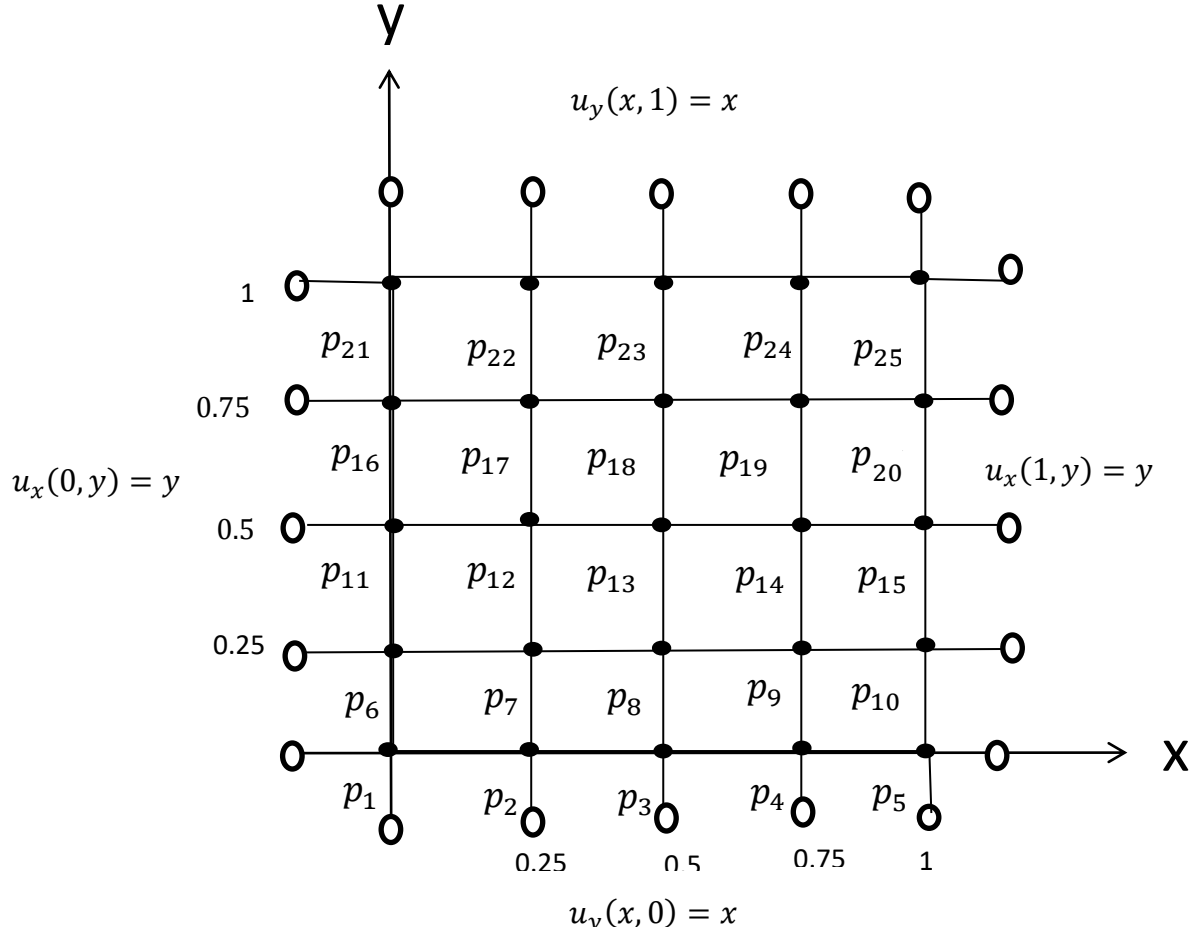


الشكل (12.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (5.2)

سنطبق على هذا المثال طريقة الفرق المنتهية وسيتم دراسته في عدة حالات مختلفة لـ h, k

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما هو موضح في الشكل (13.2)

الحالة الأولى: باختيار $h = k = 0.25$



الشكل (13.2) تحديد العقد الوهمية والداخلية في المثال 5.2 عندما $k = h = 0.25$

تقسيم الفترة $(1,0)$ و تقسيم الفترة $(0,1)$ وذلك باختيار $k = h = 0.25$ ، حيث
 $i = 0,1,2,3,4$, $j = 0,1,2,3,4$

$$y_0 = 0 , \quad y_1 = 0.25 , \quad y_2 = 0.5 , \quad y_3 = 0.75, \quad y_4 = 1$$

$$x_0 = 0 , \quad x_1 = 0.25 , \quad x_2 = 0.5 , \quad x_3 = 0.75 , \quad x_4 = 1$$

ثانياً: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2) والتعويض في المعادلة الأصلية

للمثال فنتحصل على (21.2)

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

$$u_{1,0} - 4u_{0,0} + u_{-1,0} + u_{0,1} + u_{0,-1} = 0 \quad i = 0, j = 0 \quad (27.2)$$

عند إيجاد النقاط حول p_1 سيكون لدينا نقاط وهمية (Ghosts Nodes) في الحد أو الجانب الأيسر (Left Edge) والحد أو الجانب السفلي (Bottom Edge) $u_{-1,0}, u_{0,-1}$ ، ولتخلص منها سنستخدم المشتقة الأولى للفروق المركزية (16.2) و (17.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

بما أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = f_4(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = f_2(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, d) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, c) = f_3(x)$$

فإن

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = f_4(y)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \frac{u_{1,0} - u_{-1,0}}{2(0.25)} = f_4(y_0)$$

$$u_{1,0} - u_{-1,0} = 2(0.25)(0) \Rightarrow u_{1,0} = u_{-1,0}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = f_3(x_i)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \frac{u_{0,1} - u_{0,-1}}{2(0.25)} = f_3(x_0)$$

$$u_{0,1} - u_{0,-1} = 2(0.25)(0) \Rightarrow u_{0,1} = u_{0,-1}$$

بالتعويض في المعادلة (27.2)

$$2u_{1,0} - 4u_{0,0} + 2u_{0,1} = 0$$

بعد إعادة الترميز نتحصل على

$$-4p_1 + 2p_2 + 2p_6 = 0$$

$$u_{2,0} - 4u_{1,0} + u_{0,0} + u_{1,1} + u_{1,-1} = 0 \quad i = 1, j = 0 \quad (28.2)$$

عند ايجاد النقاط حول p_2 سيكون لدينا نقطة وهمية الحد أو الجانب السفلي حيث

$$k = 0.25, f_3(x_1) = 0.25 \text{ وبالتالي}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,0)} = u_{1,1} - u_{1,-1} = 2(0.25)(0.25) \Rightarrow u_{1,-1} = u_{1,1} - 0.125$$

بالتعويض في المعادلة (28.2)

$$u_{2,0} - 4u_{1,0} + u_{0,0} + 2u_{1,1} = 0.125$$

$$p_1 - 4p_2 + p_3 + 2p_7 = 0.125$$

$$u_{3,0} - 4u_{2,0} + u_{1,0} + u_{2,1} + u_{2,-1} = 0 \quad i = 2, j = 0 \quad (29.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(2,0)} = u_{2,1} - u_{2,-1} = 2(0.25)(0.5) \Rightarrow u_{2,-1} = u_{2,1} - 0.25$$

بالتعويض في المعادلة (29.2)

$$u_{3,0} - 4u_{2,0} + u_{1,0} + 2u_{2,1} = 0.25$$

$$p_2 - 4p_3 + p_4 + 2p_8 = 0.25$$

$$u_{4,0} - 4u_{3,0} + u_{2,0} + u_{3,1} + u_{3,-1} = 0 \quad i = 3, j = 0 \quad (30.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(3,0)} = u_{3,1} - u_{3,-1} = 2(0.25)(0.75) \Rightarrow u_{3,-1} = u_{3,1} - 0.375$$

بالتعويض في المعادلة (30.2)

$$u_{4,0} - 4u_{3,0} + u_{2,0} + 2u_{3,1} = 0.375$$

$$p_3 - 4p_4 + p_5 + 2p_9 = 0.375$$

$$u_{5,0} - 4u_{4,0} + u_{3,0} + u_{4,1} + u_{4,-1} = 0 \quad i = 4, j = 0 \quad (31.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(4,0)} = u_{4,1} - u_{4,-1} = 2(0.25)(1) \Rightarrow u_{4,-1} = u_{4,1} - 0.5$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(4,0)} = u_{5,0} - u_{3,0} = 2(0.25)(0) \Rightarrow u_{5,0} = u_{3,0}$$

بالتعويض في المعادلة (31.2)

$$-4u_{4,0} + 2u_{3,0} + 2u_{4,1} = 0.5$$

$$2p_4 - 4p_5 + 2p_{10} = 0.5$$

$$u_{1,1} - 4u_{0,1} + u_{-1,1} + u_{0,2} + u_{0,0} = 0 \quad i = 0, j = 1 \quad (32.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(0,1)} = -u_{-1,1} = 2(0.25)(0.25) \Rightarrow u_{-1,1} = u_{1,1} - 0.125$$

بالتعويض في المعادلة (32.2) وبإعادة الترميز نتحصل على

$$p_1 - 4p_6 + 2p_7 + p_{11} = 0.125$$

ونستمر بنفس الخطوات في التخلص بالنقط الوهمية فتحصل على

$$p_2 + p_6 - 4p_7 + p_8 + p_{12} = 0 \quad i = 1, j = 1$$

$$p_3 + p_7 - 4p_8 + p_9 + p_{13} = 0 \quad i = 2, j = 1$$

$$p_4 + p_8 - 4p_9 + p_{10} + p_{14} = 0 \quad i = 3, j = 1$$

$$p_5 + 2p_9 - 4p_{10} + p_{15} = -0.125 \quad i = 4, j = 1$$

$$p_6 - 4p_{11} + 2p_{12} + p_{16} = 0.25 \quad i = 0, j = 2$$

$$p_7 + p_{11} - 4p_{12} + p_{13} + p_{17} = 0 \quad i = 1, j = 2$$

$$p_8 + p_{12} - 4p_{13} + p_{14} + p_{18} = 0 \quad i = 2, j = 2$$

$$p_9 + p_{13} - 4p_{14} + p_{15} + p_{19} = 0 \quad i = 3, j = 2$$

$$p_{10} + 2p_{14} - 4p_{15} + p_{20} = -0.25 \quad i = 4, j = 2$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ P_{16} \\ P_{17} \\ P_{18} \\ P_{19} \\ P_{20} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \\ P_{24} \\ P_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1250 \\ 0.2500 \\ 0.3750 \\ 0.5 \\ 0.125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.125 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.25 \\ 0.375 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.375 \\ 0.5 \\ -0.125 \\ -0.25 \\ -0.375 \\ -1 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: عندما $h = k = 0.2$ باتباع نفس الخطوات للحل تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 36×36 ومصفوفة مجاهيل من النوع 36×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 36×1 .

الحالة الثالثة: عندما $h = k = 0.2$ تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 121×121 ومصفوفة مجاهيل من النوع 121×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 121×1 .

الحالة الرابعة: عندما $h = k = 0.2$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 484×484 ومصفوفة مجاهيل من النوع 484×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 484×1 .

مثال 6.2

نفرض أن المسألة لمعادلة بواسون كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

الشروط الحدودية

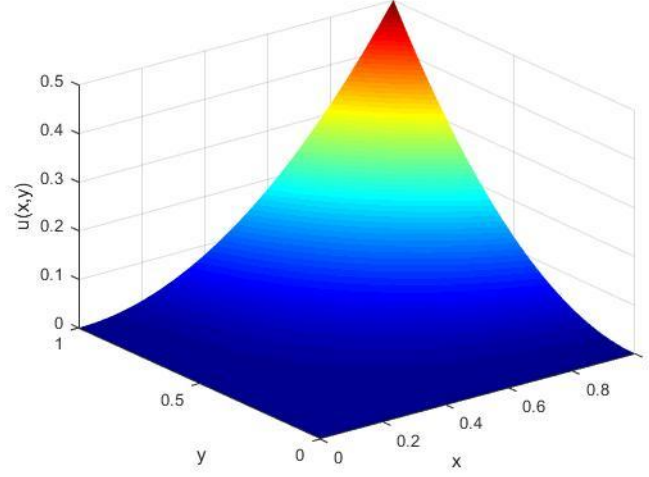
$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 1) = x^2 \quad 0 < y < 1$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = y^2 \quad 0 < x < 1$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(xy)^2 \quad \text{علما بأن الحل التحليلي هو}$$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

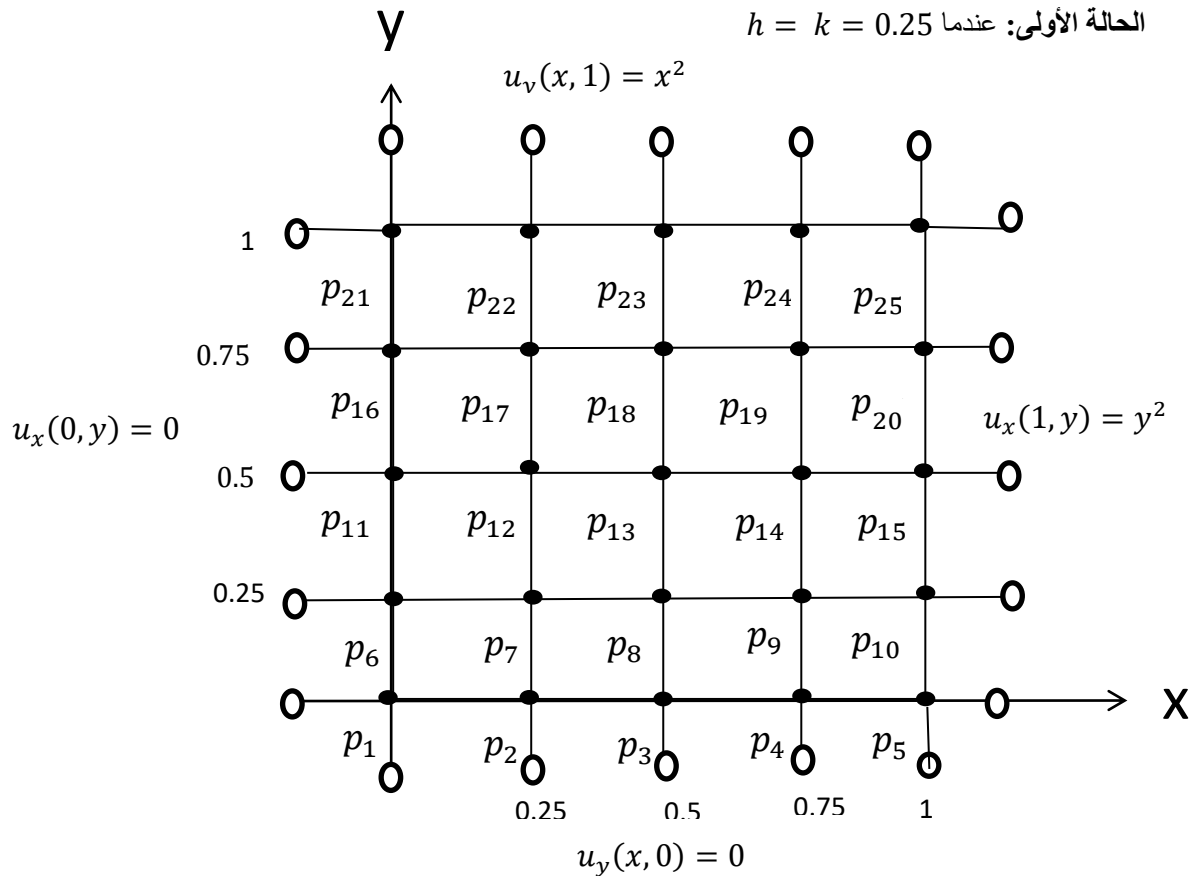
الشكل التالي يوضح الحل الفعلي للمثال



الشكل (14.2) الحل الفعلي لمعادلة بواسون في المثال (6.2)

سنطبق على هذا المثال طريقة الفرق المنتهية وسيتم دراسته في عدة حالات مختلفة لـ h, k

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما هو موضح في الشكل (15.2)



الشكل (15.2) النقاط الوهمية والنقاط الداخلية في مثال (6.2) عندما $k = h = 0.25$

تم تقسيم الفترة (1,0) و تقسيم الفترة (0,1) وذلك باختيار $k = h = 0.25$ ، حيث
 $i = 0,1,2,3,4$, $j = 0,1,2,3,4$

$$y_0 = 0 , \quad y_1 = 0.25 , \quad y_2 = 0.5 , \quad y_3 = 0.75, \quad y_4 = 1$$

$$x_0 = 0 , \quad x_1 = 0.25 , \quad x_2 = 0.5 , \quad x_3 = 0.75 , \quad x_4 = 1$$

ثانيا: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2) والتعويض في المعادلة الأصلية
 للمثال فنتحصل على (23.2)

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = h^2 f_{ij}$$

سيكون لدينا نقاط وهمية (Ghosts Nodes) هي

$$u_{-1,0}, u_{0,-1}, u_{1,-1}, u_{2,-1}, u_{3,-1}, u_{4,-1}, u_{5,0}, u_{-1,1}, u_{5,1}, u_{-1,2}, u_{5,2}$$

$$u_{-1,3}, u_{5,3}, u_{-1,4}, u_{0,5}, u_{1,5}, u_{2,5}, u_{3,5}, u_{5,4}, u_{4,5}$$

ولتخلص منها سنستخدم تقريب المشتقة الأولى للفروق المركزية (16.2) و (17.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

بما أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = f_4(y) , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = f_2(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, d) = f_1(x) , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, c) = f_3(x)$$

وباقى القيم داخل المجل سيتم ايجادها كما في شروط ديرشليت

$$2p_2 - 4p_1 + 2p_6 = 0 \quad i = 0 , j = 0$$

$$p_1 - 4p_2 + p_3 + 2p_7 = 0.00391 \quad i = 1 , j = 0$$

$$p_2 - 4p_3 + p_4 + 2p_8 = 0.015625 \quad i = 2 , j = 0$$

$$p_3 - 4p_4 + p_5 + 2p_9 = 0.035156 \quad i = 3 , j = 0$$

$$\begin{aligned}
2p_4 - 4p_5 + 2p_{10} &= 0.0625 & i = 4, j = 0 \\
p_1 - 4p_6 + 2p_7 + p_{11} &= 0.00391 & i = 0, j = 1 \\
p_2 + p_6 - 4p_7 + p_8 + p_{12} &= 0.00781 & i = 1, j = 1 \\
p_3 + p_7 - 4p_8 + p_9 + p_{13} &= 0.019531 & i = 2, j = 1 \\
p_4 + p_8 - 4p_9 + p_{10} + p_{14} &= 0.03906 & i = 3, j = 1 \\
p_5 + 2p_9 - 4p_{10} + p_{15} &= 0.035156 & i = 4, j = 1 \\
p_6 - 4p_{11} + 2p_{12} + p_{16} &= 0.015625 & i = 0, j = 2 \\
p_7 + p_{11} - 4p_{12} + p_{13} + p_{17} &= 0.01953125 & i = 1, j = 2 \\
p_8 + p_{12} - 4p_{13} + p_{14} + p_{18} &= 0.03125 & i = 2, j = 2 \\
p_9 + p_{13} - 4p_{14} + p_{15} + p_{19} &= 0.05078125 & i = 3, j = 2 \\
p_{10} + 2p_{14} - 4p_{15} + p_{20} &= -0.046875 & i = 4, j = 2 \\
p_{11} - 4p_{16} + 2p_{17} + p_{21} &= 0.03515625 & i = 0, j = 3 \\
p_{12} + p_{16} - 4p_{17} + p_{18} + p_{22} &= 0.0390625 & i = 1, j = 3 \\
p_{13} + p_{17} - 4p_{18} + p_{19} + p_{23} &= 0.5078125 & i = 2, j = 3 \\
p_{14} + p_{18} - 4p_{19} + p_{20} + p_{24} &= 0.0703125 & i = 3, j = 3 \\
p_{15} + 2p_{19} - 4p_{20} + p_{25} &= -0.18359375 & i = 4, j = 3 \\
2p_{16} - 4p_{21} + 2p_{22} &= 0.0625 & i = 0, j = 4 \\
2p_{17} + p_{21} - 4p_{22} + p_{23} &= 0.03515625 & i = 1, j = 4 \\
2p_{18} + p_{22} - 4p_{23} + p_{24} &= -0.046875 & i = 2, j = 4 \\
2p_{19} + p_{23} - 4p_{24} + p_{25} &= -0.02734375 & i = 3, j = 4 \\
2p_{20} + 2p_{24} - 4p_{25} &= -0.875 & i = 4, j = 4
\end{aligned}$$

ومنها تحصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات ومصفوفة مجاهيل ومصفوفة الحدود المطلقة تكون على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix}
-4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ P_{16} \\ P_{17} \\ P_{18} \\ P_{19} \\ P_{20} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \\ P_{24} \\ P_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.00391 \\ 0.015625 \\ 0.035156 \\ 0.0625 \\ 0.00391 \\ 0.00781 \\ 0.019531 \\ 0.03906 \\ 0.035156 \\ 0.015625 \\ 0.0195313 \\ 0.03125 \\ 0.0507813 \\ -0.046875 \\ 0.0351563 \\ 0.0390625 \\ 0.5078125 \\ 0.0703125 \\ -0.1835938 \\ 0.0625 \\ 0.0351563 \\ -0.046875 \\ -0.0273438 \\ -0.875 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: عندما $h = k = 0.2$ حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة المعاملات من النوع 36×36 ومصفوفة مجاهيل من النوع 36×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 36×1 .

الحالة الثالثة: عندما $h = k = 0.2$ حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 121×121 ومصفوفة مجاهيل من النوع 121×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 121×1 .

الحالة الرابعة: عندما $h = k = 0.2$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 484×484 ومصفوفة مجاهيل من النوع 1×484 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 1×484 .

(iii) شرط روبن الحدودي (المختلطة) Robin boundary condition (Mixed)

شرط روبن يربط بين قيمة الدالة نفسها على الحدود كما في ديرشليت و مشتقتها العمودية على الحدود كما في نيومان والامثلة التالية توضح كيف تكون طريقة الحل مختلط بين ديرشليت وفان نيومان.

مثال 7.2

نفرض أن المسألة لمعادلة لابلاس كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

الشروط الحدودية

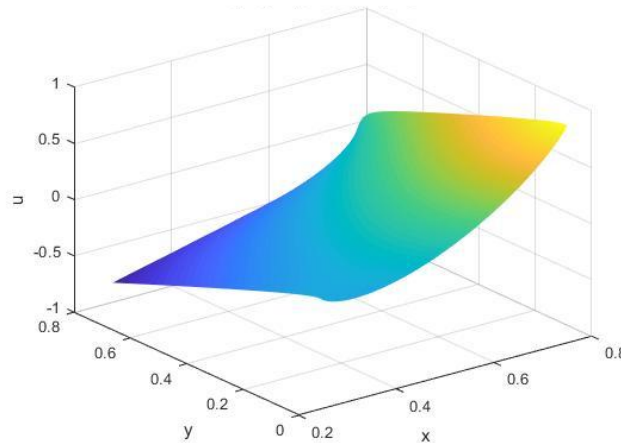
$$u_y(x, 0) = -1, \quad u(x, 1) = x - 1 \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = -y, \quad u(1, y) = 1 - y \quad 0 < x < 1$$

علما بأن الحل التحليلي هو $u(x, y) = x - y$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

الشكل التالي يوضح بيانياً الحل الفعلي لهذا المثال

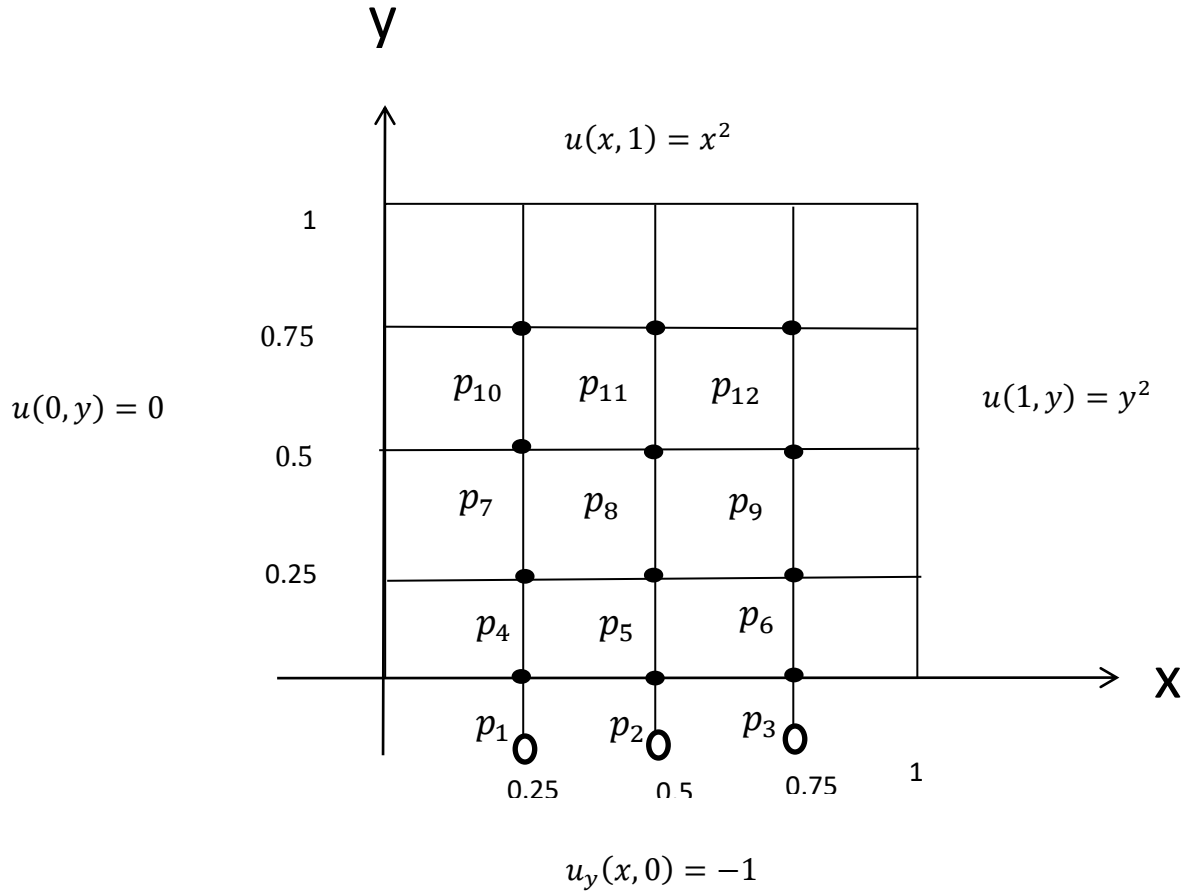


الشكل (16.2) الحل الفعلي لمعادلة لابلاس في المثال (7.2)

سيتم بتطبيق الفروق المنتهية للحصول على منظومة خطية ودراسة عدة حالات مختلفة لقيمة h , k

الحالة الأولى: عندما $k = h = 0.25$

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما موضح في الشكل (17.2):



الشكل (17.2) تحديد النقاط الوهمية والداخلية للمجال في المثال (6.2) عندما $k = h = 0.25$

تم تقسيم الفترة (0,1) و تقسيم الفترة (0,1) وذلك باختيار $k = h = 0.25$ ، حيث

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad , \quad j = 0, 1, 2, 3$$

$$y_0 = 0 \quad , \quad y_1 = 0.25 \quad , \quad y_2 = 0.5 \quad , \quad y_3 = 0.75,$$

$$x_1 = 0.25 \quad , \quad x_2 = 0.5 \quad , \quad x_3 = 0.75$$

ثانياً: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2) والتعويض في المعادلة الأصلية

للمثال فنتحصل على (21.2)

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

سيكون لدينا نقاط وهمية $u_{1,-1}, u_{2,-1}, u_{3,-1}$ في الحد السفلي من المجال وباقي الحدود قيمة الدالة موجودة عند الحد ، كما أنا سنتخلص من النقاط الوهمية عن طريق تقريب المشتقة الأولى (17.2) ، من خلال الفروق المركزية نتحصل على

$$-4p_1 + p_2 + 2p_4 = -0.5 \quad i = 1, j = 0$$

$$p_1 - 4p_2 + p_3 + 2p_5 = -0.5 \quad i = 2, j = 0$$

$$p_2 - 4p_3 + 2p_6 = -1.5 \quad i = 3, j = 0$$

$$p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 = 0.25 \quad i = 1, j = 1$$

$$p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 = 0 \quad i = 2, j = 1$$

$$p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 = -0.75 \quad i = 3, j = 1$$

$$p_4 - 4p_7 + p_8 + p_{10} = 0.5 \quad i = 1, j = 2$$

$$p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 + p_{11} = 0 \quad i = 2, j = 2$$

$$p_6 + p_8 - 4p_9 + p_{12} = -0.5 \quad i = 3, j = 2$$

$$p_7 - 4p_{10} + p_{11} = 1.5 \quad i = 1, j = 3$$

$$p_8 + p_{10} - 4p_{11} + p_{12} = 0.5 \quad i = 2, j = 3$$

$$p_9 + p_{11} - 4p_{12} = 0 \quad i = 3, j = 3$$

ومنها قد تحصلنا على منظومة خطية تكون على الشكل التالي

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.25 \\ 0 \\ -0.75 \\ 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: عندما $k = h = 0.2$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 20×20 ومصفوفة مجاهيل من النوع 20×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 20×1 .

الحالة الثالثة: عندما $k = h = 0.1$ حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 90×90 ومصفوفة مجاهيل من النوع 90×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 90×1 .

الحالة الرابعة: عندما $k = h = 0.05$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 420×420 ومصفوفة مجاهيل من النوع 420×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 420×1 .

مثال 8.2

نفرض أن المسألة لمعادلة بواسون كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

الشروط الحدودية

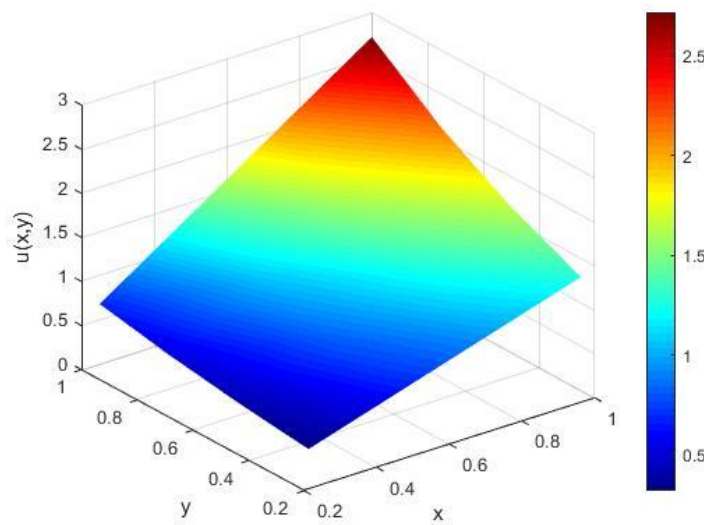
$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = xe \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = e^y \quad 0 < x < 1$$

علما بأن الحل التحليلي هو $u(x, y) = xe^y$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

الشكل التالي يوضح بيانياً الحل الفعلي لهذا المثال

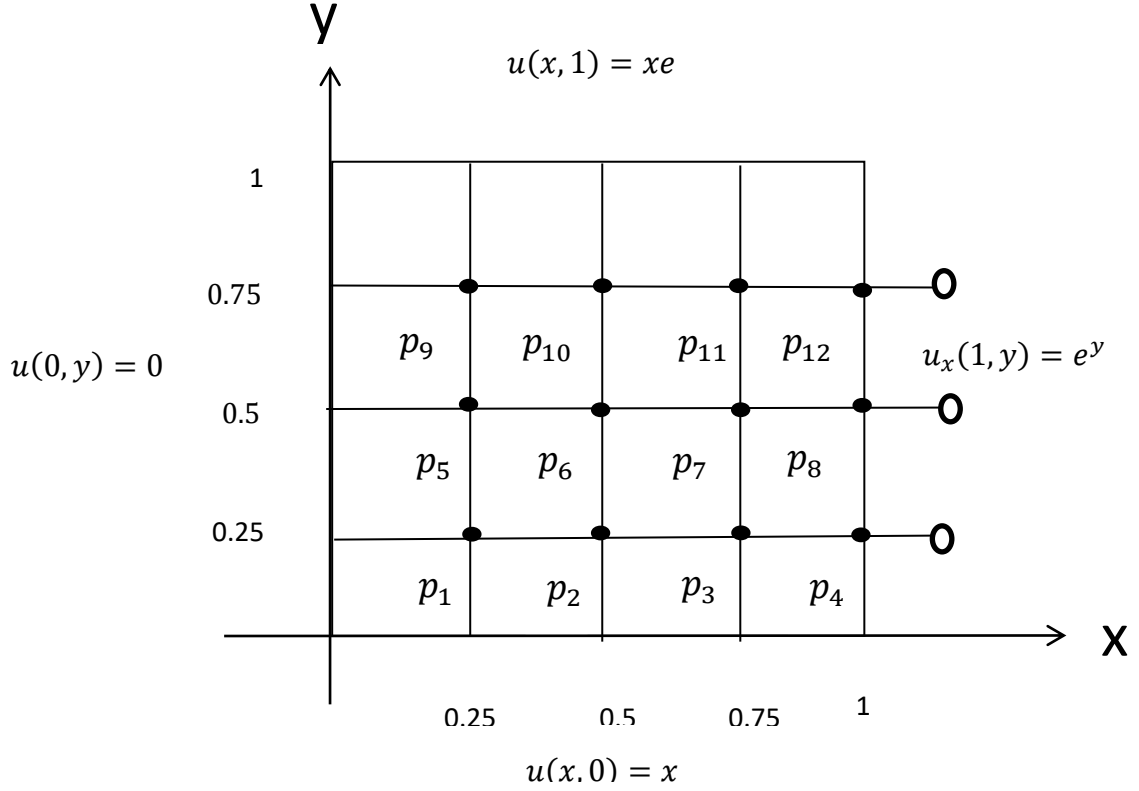


الشكل (18.2) الحل الفعلي لمعادلة بواسون في مثال (8.2)

سيتم بتطبيق الفروق المنتهية للحصول على منظومة خطية ودراسة عدة حالات مختلفة لقيمة h , k

الحالة الأولى: عندما $k = h = 0.25$

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما موضح في الشكل (19.2):



الشكل (19.2) تحديد العقد الوهمية من جهة اليمين والنقاط الداخلية في المثال (8.2)

تم تقسيم الفترات وذلك باختيار $k = h = 0.25$ ، حيث $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3$

$$y_1 = 0.25 , \quad y_2 = 0.5 , \quad y_3 = 0.75,$$

$$x_1 = 0.25 , \quad x_2 = 0.5 , \quad x_3 = 0.75 , \quad x_4 = 1$$

ثانياً: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2) والتعويض في المعادلة الأصلية

للمثال فنتحصل على (23.2)

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = h^2 f_{i,j}$$

سيكون لدينا نقاط وهمية $u_{5,1}, u_{5,2}, u_{5,3}$ في الحد أو الجانب الأيمن من المجال وباقي الحدود قيمة الدالة موجودة عند الحد ، كما أنا سنتخلص من النقاط الوهمية عن طريق تقريب المشتقة الأولى (16.2) ، من خلال الفروق المركزية نتحصل على

$$-4p_1 + p_2 + p_5 = -0.229937 \quad i = 1, j = 1$$

$$p_1 - 4p_2 + p_3 + p_6 = -0.459874 \quad i = 2, j = 1$$

$$p_2 - 4p_3 + p_4 + p_7 = -0.689811 \quad i = 3, j = 1$$

$$2p_3 - 4p_4 + p_8 = -0.56176 \quad i = 4, j = 1$$

$$p_1 - 4p_5 + p_6 + p_9 = 0.025761 \quad i = 1, j = 2$$

$$p_2 + p_5 - 4p_6 + p_7 + p_{10} = 0.051523 \quad i = 2, j = 2$$

$$p_3 + p_6 - 4p_7 + p_8 + p_{11} = 0.077284 \quad i = 3, j = 2$$

$$p_4 + 2p_7 - 4p_8 + p_{12} = -0.721316 \quad i = 4, j = 2$$

$$p_5 - 4p_9 + p_{10} = -0.646491 \quad i = 1, j = 3$$

$$p_6 + p_9 - 4p_{10} + p_{11} = -1.292985 \quad i = 2, j = 3$$

$$p_7 + p_{10} - 4p_{11} + p_{12} = -1.939477 \quad i = 3, j = 3$$

$$p_8 + 2p_{11} - 4p_{12} = -0.926187 \quad i = 4, j = 3$$

وعليها تحصلنا على منظومة خطية موضحة كالتالي

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.229937 \\ -0.459874 \\ -0.689811 \\ -1.56176 \\ 0.025761 \\ 0.051523 \\ 0.077284 \\ -0.721316 \\ -0.646491 \\ -1.292985 \\ -1.939477 \\ -3.64447 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: عندما $k = h = 0.2$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 20×20 ومصفوفة مجاهيل من النوع 20×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 20×1 .

الحالة الثالثة: عندما $k = h = 0.1$ حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 90×90 ومصفوفة مجاهيل من النوع 90×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 90×1 .

الحالة الرابعة: عندما $k = h = 0.05$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 420×420 ومصفوفة مجاهيل من النوع 420×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 420×1 .

مثال 9.2

نفرض أن المسألة لمعادلة هلمهولتز كالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = -(x + y) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

الشروط الحدودية

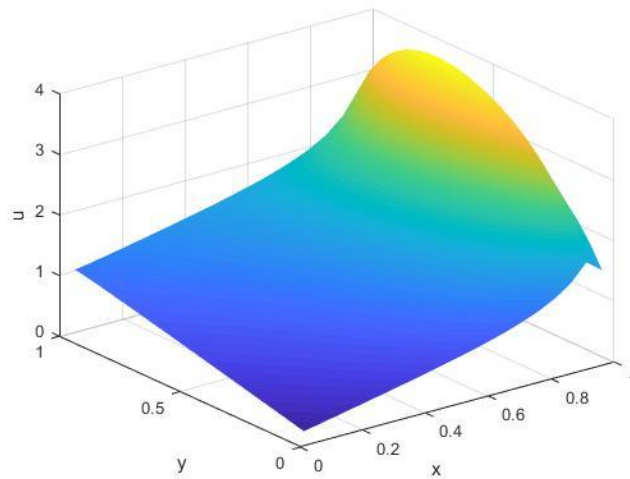
$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = x + 1 \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = y, \quad u_x(1, y) = 1 \quad 0 < x < 1$$

علما بأن الحل التحليلي هو $u(x, y) = x + y$

سنطبق طريقة الفروق المنتهية

الشكل التالي يوضح بيانياً الحل الفعلي لهذا المثال

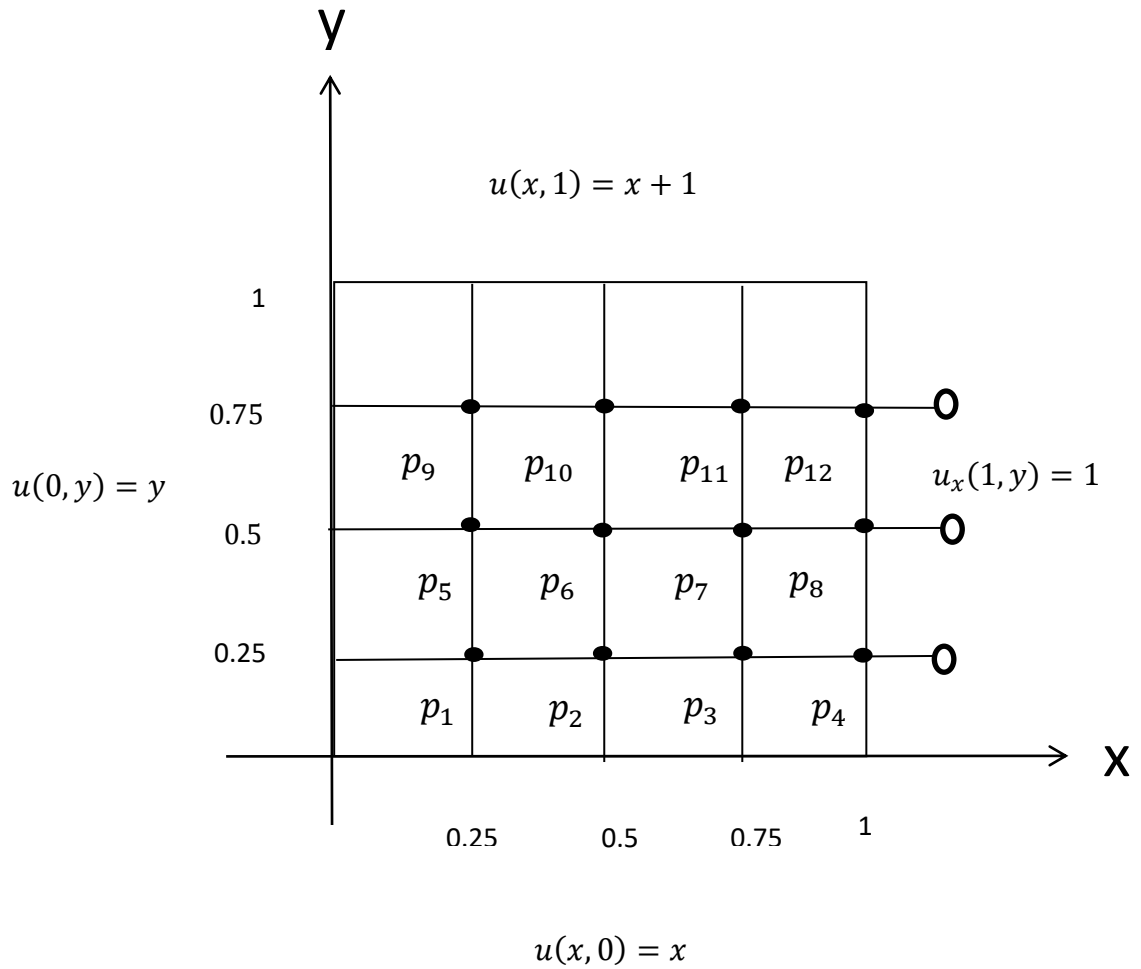


الشكل (20.2) الحل الفعلي لمعادلة هلمهولتز في المثال (9.2)

باتباع نفس خطوات الأمثلة السابقة للحصول على منظومة خطية بتطبيق الفروق المنتهية ودراسة عدة حالات h و k .

الحالة الأولى: عندما $k = h = 0.25$

أولاً: انشاء شبكة في المستوى x, y كما موضح في الشكل (19.2):



الشكل (19.2) تحديد العقد الوهمية من جهة اليمين والنقاط الداخلية في مثال (9.2) عندما $k = h = 0.25$

تم تقسيم الفترات وذلك باختيار $k = h = 0.25$ ، حيث $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$

$$y_1 = 0.25 , \quad y_2 = 0.5 , \quad y_3 = 0.75,$$

$$x_1 = 0.25 , \quad x_2 = 0.5 , \quad x_3 = 0.75 , \quad x_4 = 1$$

ثانياً: إيجاد المنظومة الخطية باستخدام الفروق المركزية (18.2) و (19.2) والتعويض في المعادلة الأصلية للمثال فنتحصل على (25.2)

$$16(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - 65u_{i,j} = f_{i,j}$$

سيكون لدينا نقاط وهمية $u_{5,1}, u_{5,2}, u_{5,3}$ في الحد أو الجانب الأيمن من المجال وباقي الحدود قيمة الدالة موجودة عند الحد ، كما أنا سنتخلص من النقاط الوهمية عن طريق تقريب المشتقة الأولى (16.2) ، من خلال الفروق المركزية نتحصل على

$$\begin{aligned} -65p_1 + 16p_2 + 16p_5 &= -8.5 & i = 1, j = 1 \\ 16p_1 - 65p_2 + 16p_3 + 16p_6 &= -8.75 & i = 2, j = 1 \\ 16p_2 - 65p_3 + 16p_4 + 16p_7 &= -13 & i = 3, j = 1 \\ 32p_3 - 65p_4 + 16p_8 &= -9.25 & i = 4, j = 1 \\ 16p_1 - 65p_5 + 16p_6 + 16p_9 &= -8.75 & i = 1, j = 2 \\ 16p_2 + 16p_5 - 65p_6 + 16p_7 + 16p_{10} &= -1 & i = 2, j = 2 \\ 16p_3 + 16p_6 - 65p_7 + 16p_8 + 16p_{11} &= -1.25 & i = 3, j = 2 \\ 16p_4 + 32p_7 - 65p_8 + 16p_{12} &= -9.5 & i = 4, j = 2 \\ 16p_5 - 65p_9 + 16p_{10} &= -33 & i = 1, j = 3 \\ 16p_6 + 16p_9 - 65p_{10} + 16p_{11} &= -25.25 & i = 2, j = 3 \\ 16p_7 + 16p_{10} - 65p_{11} + 16p_{12} &= -29.5 & i = 3, j = 3 \\ 16p_8 + 32p_{11} - 65p_{12} &= -9.75 & i = 4, j = 3 \end{aligned}$$

وعليها تحصلنا على منظومة خطية موضحة كالتالي

$$\begin{bmatrix} -65 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -65 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -65 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & -65 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & -65 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & -65 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & -65 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 32 & -65 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & -65 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & -65 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & -65 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 32 & -65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.5 \\ -8.75 \\ -13 \\ -25.25 \\ -8.75 \\ -1 \\ -1.25 \\ -9.5 \\ -33 \\ -25.25 \\ -29.5 \\ -41.75 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: عندما $k = h = 0.2$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 20×20 ومصفوفة مجاهيل من النوع 20×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 20×1 .

الحالة الثالثة: عندما $k = h = 0.1$ حصلنا على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 90×90 ومصفوفة مجاهيل من النوع 90×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 90×1 .

الحالة الرابعة: عندما $k = h = 0.05$ تم الحصول على منظومة خطية تحتوي على مصفوفة معاملات من النوع 420×420 ومصفوفة مجاهيل من النوع 420×1 ومصفوفة الحدود المطلقة من النوع 420×1 .

الفصل الثالث

الطرق التكرارية

Iterative Methods

Introduction

1.3 مقدمة

في هذا الفصل سندرس بعض الطرق التكرارية التي سنستخدمها لحل الأنظمة الخطية التي تحصلنا عليها من أمثلة الفصل الثاني وتم ذلك باستخدام الماتلاب والمقارنة فيما بينها.

Iterative Methods

2.3 الطرق التكرارية

للطرق التكرارية دور كبير في إيجاد الحلول التقريبية للمسائل الرياضية المعقدة، الآن سنعرض بعض هذه الطرق بشكل تفصيلي، إذ أن لكل طريقة من هذه الطرق التكرارية لها آلياتها الخاصة التي تحدد سرعة التقارب نحو الحل ودقته، ومن خلال عرض هذه الطرق سنتمكن من معرفة كيفية تطبيقها عملياً، ومقارنة مزاياها وقيودها مما يتيح لنا اختيار الطرق الأنسب والأسرع للوصول إلى الحل.

Jacobi Method(JM)

1.2.3 طريقة جاكوبي

هي طريقة تكرارية تستخدم لحل الأنظمة الجبرية الخطية، وخصوصاً تلك التي تكون المصفوفة القطرية المهيمنة، الفكرة الأساسية لهذه الطريقة بأنها تعتمد على قيم التكرار السابق للقيم المجاورة لقيمة النقطة المراد حسابها.

الصيغة التكرارية العامة لطريقة جاكوبي لنظام n معادلة خطية بالصيغة $Ax = b$ كالتالي :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

حيث :

- $x_i^{(k+1)}$ هي القيمة الجديدة للمتغير x_i في التكرار $(k + 1)$.
- $x_j^{(k)}$ هي قيمة المتغير x_j من التكرار السابق (k) .
- a_{ii} هو العنصر القطري في المصفوفة A .
- a_{ij} هو العنصر غير القطري في المصفوفة A .
- b_i هو العنصر i من متجه الثوابت b (Burden et al , 1997).

Gauss-Seidel Method(GSM)

2.2.3 طريقة جاوس سيدل

هي طريقة تكرارية تستخدم لحل الأنظمة الجبرية الخطية، كما أن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة تعمل عن طريق تحديث قيم المتغيرات بشكل متسلسل، باستخدام أحدث القيم المتاحة فور حسابها.

الصيغة التكرارية لطريقة جاوس سيدل في بعدين :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

حيث:

- $x_i^{(k+1)}$ هي القيمة الجديدة للمتغير x_i من التكرار $(k + 1)$.
 - $x_j^{(k)}$ القيمة القديمة للمجهول x_j من التكرار السابق k .
 - a_{ii} هو العنصر القطري في المصفوفة A .
 - a_{ij} هو العنصر الغير قطري في المصفوفة A .
 - b_i هو العنصر i من متجه الثوابت b .
 - $\sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}$ مجموع يمثل جميع الحدود الغير قطرية.
 - $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}$ مجموع الحدود التي تقع قبل x_i في نفس الصف باستخدام قيم التكرار السابق k .
- (فيرس، 2001)

3.2.3 طريقة التدرج المقترن Conjugate Gradient Method (CGM)

هي خوارزمية تكرارية فعالة تستخدم لحل الأنظمة الجبرية الخطية من الشكل $Ax = b$ ، حيث A مصفوفة متماثلة (Symmetric) وموجبة محددة (Positive Definite) هذه الطريقة تعد مثالية للمشكلات التي تنشأ في العديد من المجالات مثل التحليل العددي، تحسين الأداء (Optimization)، وفيزياء الحوسبة (Computational Physics).

الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي البحث عن حل نظام جبري من خلال التنقل في اتجاهات مترافقة (Conjugate) أي أن إذا كان لدينا مجموعة من المتجهات $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ التي تكون A مترافقة أي أن $p_i^T A p_j = 0$ لكل $i \neq j$ ، هذه الخاصية تضمن أن كل خطوة تتخذها الخوارزمية لا تفسد التقدم الذي تم إحرازه في الخطوة السابقة، مما يؤدي إلى تقارب أسرع. -

خوارزمية الطريقة تكون على الصورة:

$$Hx = b$$

$$r_0 = b - Hx_0 \quad , \quad p_0 = r_0$$

$$a_j = \frac{r_j^T r_j}{p_j^T H p_j}$$

$$x_{j+1} = x_j + a_j p_j$$

$$r_{j+1} = r_j - a_j H p_j$$

$$b_j = \frac{r_{j+1}^T r_{j+1}}{r_j^T r_j}$$

$$p_{j+1} = r_{j+1} + b_j p_j$$

(Aleyan, 2016)

4.2.3 طريقة التدرج المتقارن مسبقاً

Preconditioned Conjugate Gradient Method(PCGM)

هي خوارزمية عددية وأداة فعالة في حل الأنظمة الخطية الكبيرة والمعقدة من النوع $Ax = b$ ، كما أنها تعتبر تحسين للطريقة التدرج المقترن عبر إدخال مهيب يقلل من عدد التكرارات ويزيد من الكفاءة الحاسوبية، حيث تكون المصفوفة A مصفوفة متماثلة (Symmetric) وموجبة محددة Positive Definite فكرتها الأساسية باختبار المصفوفة B بحيث يكون إيجاد معكوسها أسهل من إيجاد معكوس المصفوفة الأصلية مما يجعل النظام أسهل في الحل ، وذلك بدلاً من حل $Ax = b$ يتم حل النظام المكافئ

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b$$

خوارزمية الطريقة تكون على الصورة

اختر نقطة ابتدائية x_0

$$r_0 = b - Hx_0, \quad p_0 = B^{-1}r_0,$$

$$a_j = \frac{r_j^T B^{-1}r_j}{p_j^T H p_j},$$

$$x_{j+1} = x_j + a_j p_j,$$

$$r_{j+1} = r_j - a_j H p_j,$$

$$b_j = \frac{r_{j+1}^T B^{-1}r_{j+1}}{r_j^T B^{-1}r_j},$$

$$p_{j+1} = B^{-1}r_{j+1} + b_j p_j.$$

(Aleyan, 2016)

5.2.3 المهية الناتج عن التحليل غير المكتمل LU للمصفوفة A

The preconditioner of incomplete LU factorization of the matrix A

تُهيأ المصفوفة A باستخدام مصفوفة المُهيأ، حيث يتم تقريبها على شكل حاصل ضرب مصفوفتين:

• L: مصفوفة مثلثية سفلية.

• U: مصفوفة مثلثية علوية.

وبذلك تكون المصفوفة المُهيأة (Preconditioned Matrix) هي:

$$B = L.U$$

حيث B يُستخدم كُمهيء لتحسين خصائص المصفوفة A وتسريع تقارب الطرق التكرارية لحل الأنظمة الخطية.

(Aleyan, 2016)

3.3 المقارنة بين الطرق التكرارية Comparison between iterative methods

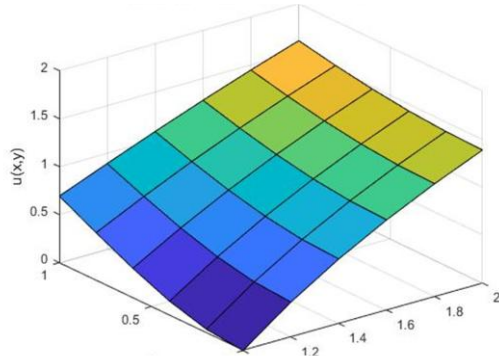
بعد تطبيق طريقة الفروق المنتهية (FDM) على بعض المعادلات التفاضلية الجزئية الاهليجية التي تم ذكرها في الفصل الثاني في عدة أمثلة تحت شروط حدودية مختلفة، وتم دراستها في عدة حالات لـ h , k التي نتجت منها منظومة خطية، ولحل هذا النظام استخدمنا أربع طرق تكرارية التي تم ذكرها في هذا الفصل حيث توصلنا للحل وكانت النتائج ممتازة مستعينين ببرنامج MATLAB ، تعرض الجداول التالية مقارنة بين هذه الطرق وإمكانية الوصول للحل من حيث عدد التكرارات وسرعة التقارب والكفاءة الحاسوبية، كما أننا سنوضح الحل بيانياً في عدة حالات .

أولاً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (JM ، GSM ، CGM ، PCGM) في مثال (1.2) لمعادلة لابلاس عند شروط ديرشليت الحدودية في عدة حالات لـ h , k بدقة 10^{-6}

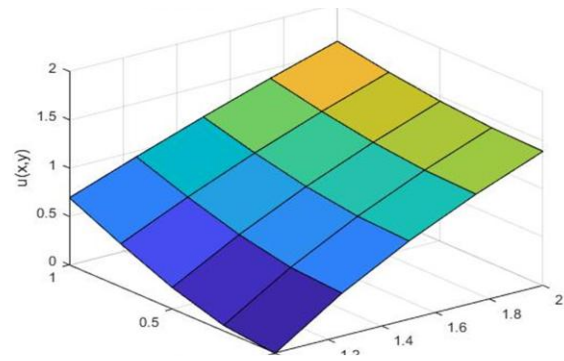
الجدول (1.3) مقارنة الطرق التكرارية في المثال (1.2)

PCGM	CGM	GSM	JM	h, k
1	5	21	38	0.25
1	9	33	60	0.2
3	26	121	224	0.1
5	52	428	794	0.05

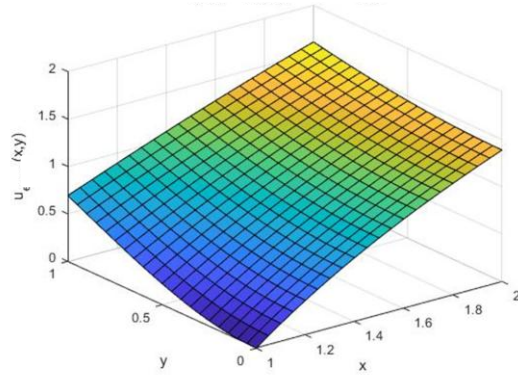
الحل البياني التقريبي في كل حالات h , k التي قمنا بتطبيقها في المثال (1.2):-



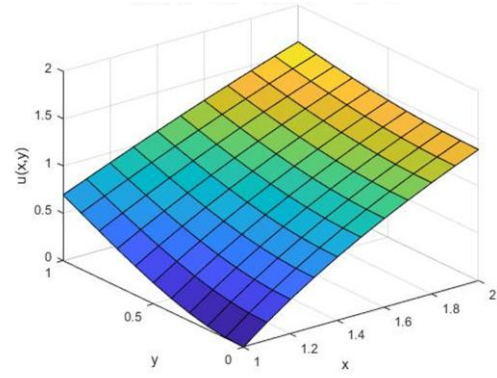
شكل (2.3) الحل التقريبي في المثال (1.2)
عندما $h = k = 0.2$



شكل (1.3) الحل التقريبي في المثال (1.2)
عندما $h = k = 0.25$

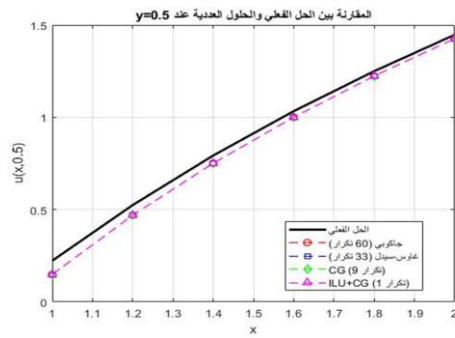


الشكل (4.3) الحل التقريبي في مثال (1.2)
عندما $h = k = 0.05$

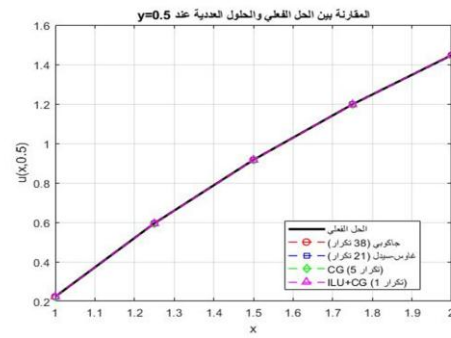


الشكل (3.3) الحل التقريبي في مثال (1.2)
عندما $h = k = 0.1$

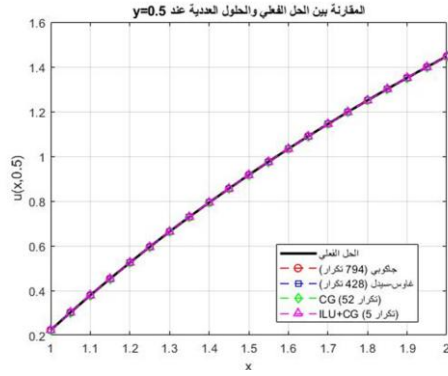
باختيار طول الفترة للمتغير x من 1 إلى 2 ونختار قيمة المتغير $y = 0.5$ ومنها حصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



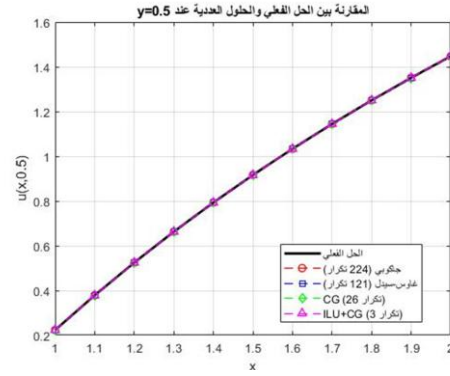
الشكل (6.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
للمثال (1.2) عندما $h = k = 0.2$



الشكل (5.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
للمثال (1.2) عندما $h = k = 0.25$



الشكل (8.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي للمثال (1.2) عندما $h = k = 0.05$



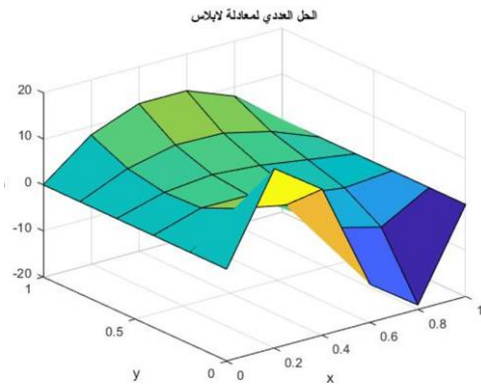
الشكل (7.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي للمثال (1.2) عندما $h = k = 0.1$

ثانياً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM, CGM, GSM, JM) في المثال (2.2) لمعادلة لابلاس عند شروط ديرشليت الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة $(1e - 6)$

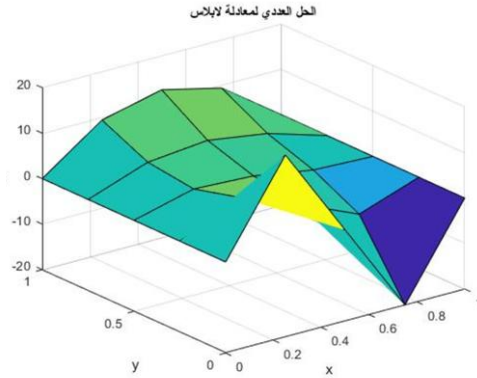
الجدول (2.3) مقارنة الطرق التكرارية في مثال (2.2)

PCGM	CGM	GSM	JM	h, k
1	5	23	42	0.25
1	8	36	65	0.2
4	26	131	245	0.1
5	52	469	876	0.05

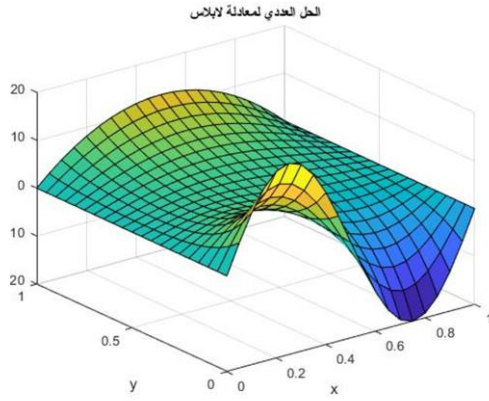
الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (2.2):



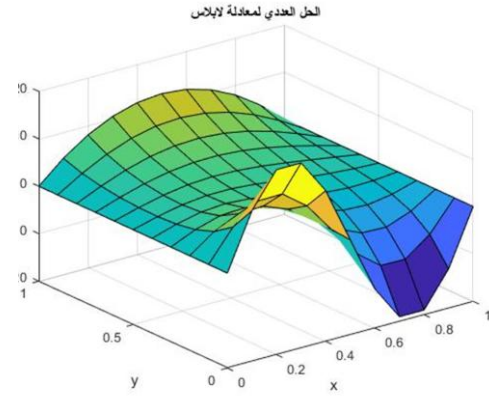
الشكل (10.3) الحل التقريبي لمثال (2.2) عندما $0.2 = k = h$



الشكل (9.3) الحل التقريبي لمثال (2.2) عندما $0.25 = k = h$

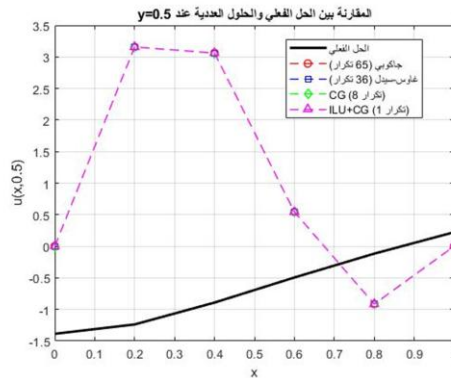


الشكل (12.3) الحل التقريبي لمثال (2.2)
عندما $0.05 = h = k$

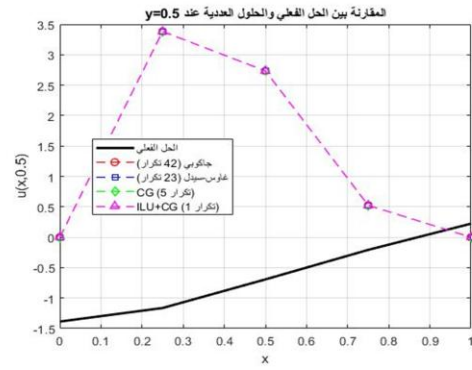


الشكل (11.3) الحل التقريبي لمثال (2.2)
عندما $0.1 = h = k$

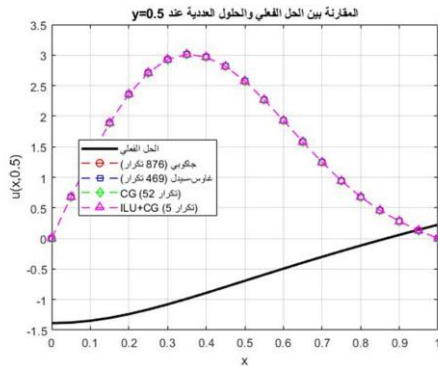
باختيار طول الفترة للمتغير x من 1 إلى 2 ونختار قيمة المتغير $y = 0.5$ ومنها تحصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



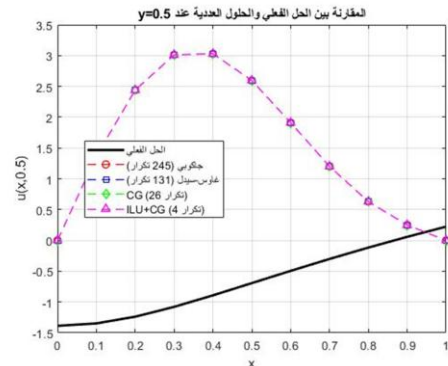
الشكل (14.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (2.2) عندما $0.2 = h = k$



الشكل (13.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (2.2) عندما $0.25 = h = k$



الشكل (16.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (2.2) عندما $0.05 = h = k$



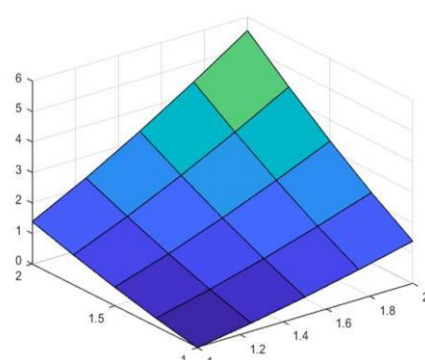
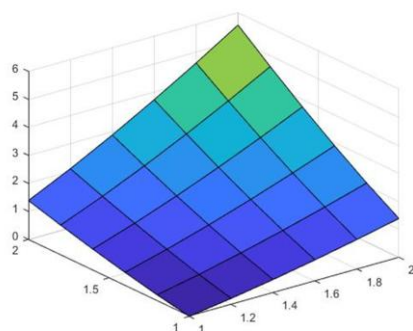
الشكل (15.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (2.2) عندما $0.1 = h = k$

ثالثاً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM، CGM ، GSM ، JM) في مثال (3.2) لمعادلة بواسون عند شروط ديرشليت الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة $(1e - 6)$

الجدول (3.3) مقارنة الطرق التكرارية في مثال (3.2)

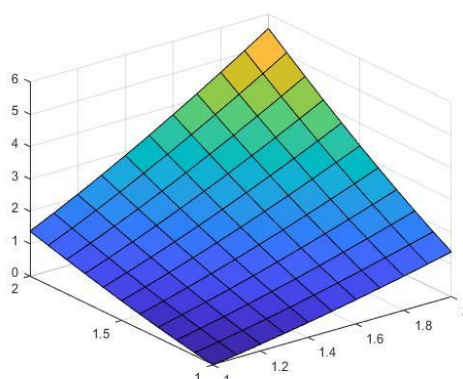
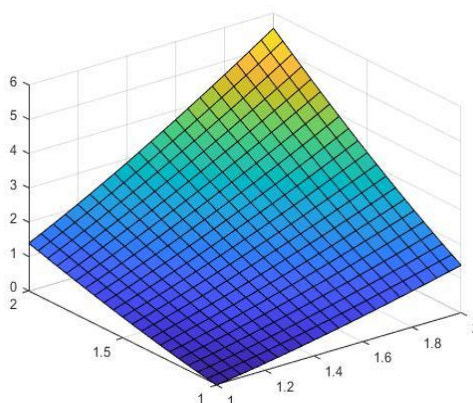
PCGM-ILU	CGM	GSM	JM	$h = k$
1	5	23	40	0.25
1	9	35	63	0.2
4	27	129	238	0.1
5	55	458	852	0.05

الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (3.2):



شكل (18.3) الحل التقريبي في المثال (3.2) عندما $0.2 = h = k$

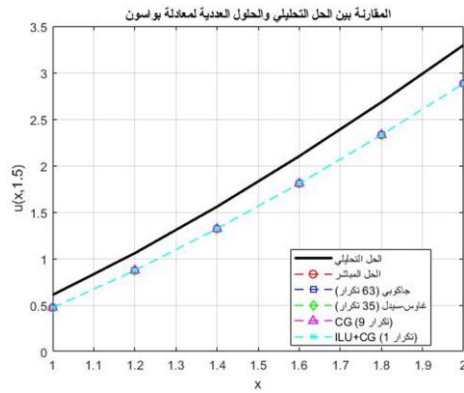
شكل (17.3) الحل التقريبي في المثال (3.2) عندما $0.25 = h = k$



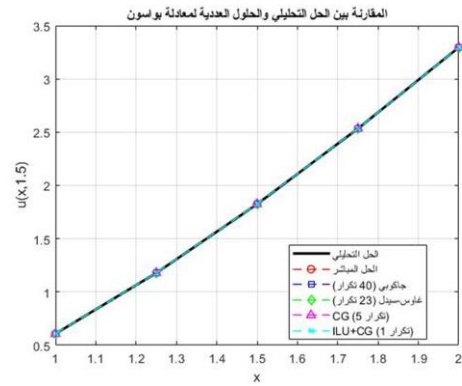
شكل (20.3) الحل التقريبي في المثال (3.2) عندما $0.05 = h = k$

شكل (19.3) الحل التقريبي في مثال (3.2) عندما $0.1 = h = k$

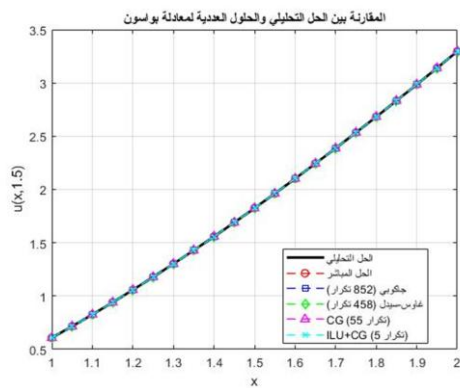
باختيار طول الفترة للمتغير x من 1 إلى 2 ونختار قيمة المتغير $y = 1.5$ ومنها تحصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



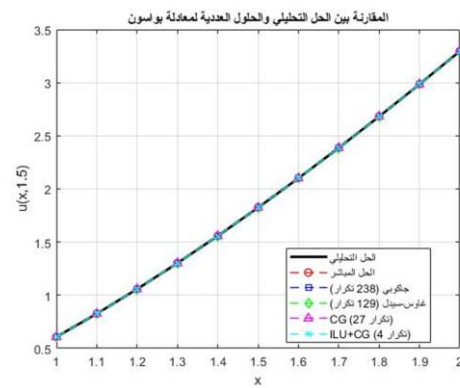
الشكل (21.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (3.2) عندما $h = k = 0.25$



الشكل (22.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (3.2) عندما $h = k = 0.2$



الشكل (23.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (3.2) عندما $h = k = 0.1$



الشكل (24.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (3.2) عندما $h = k = 0.05$

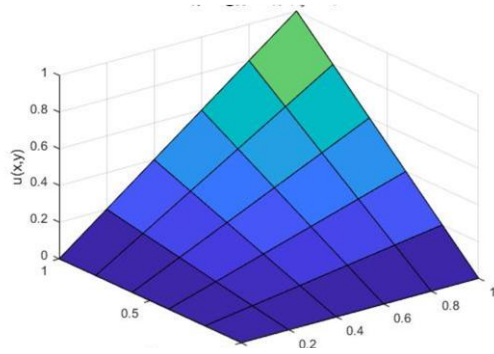
رابعاً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM ، CGM ، GSM ، JM) لمعادلة هلمهولتز في مثال (4.2) عند شروط ديرشليت الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة 10^{-6}

الجدول (4.3) مقارنة الطرق التكرارية في المثال (4.2)

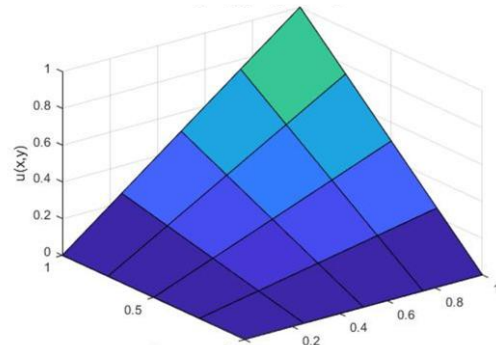
PCGM	CGM	GSM	JM	$h = k$
1	5	21	36	0.25
1	9	32	57	0.2

4	29	114	208	0.1
7	63	396	700	0.05

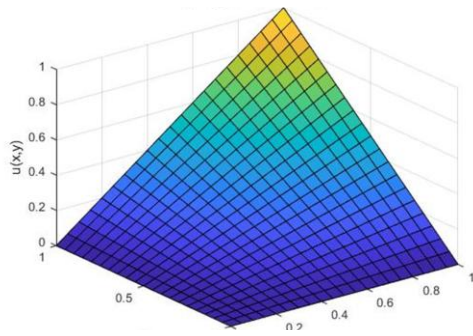
الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (4.2) :



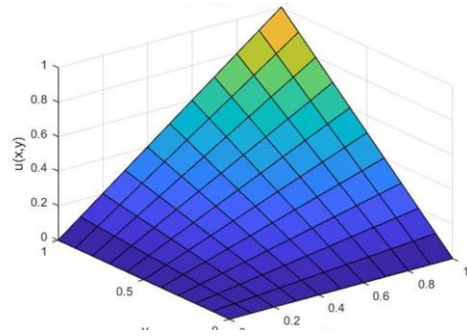
شكل (26.3) الحل التقريبي في مثال (4.2)
عندما $0.2 = h = k$



شكل (25.3) الحل التقريبي في مثال (4.2)
عندما $0.25 = h = k$

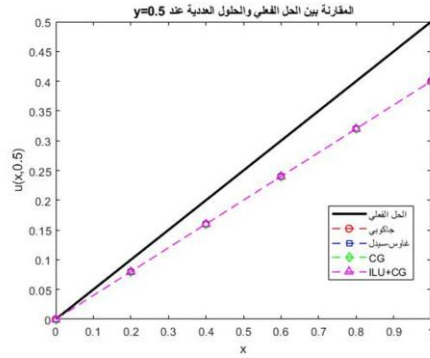


شكل (28.3) الحل التقريبي في مثال (4.2)
عندما $0.05 = h = k$

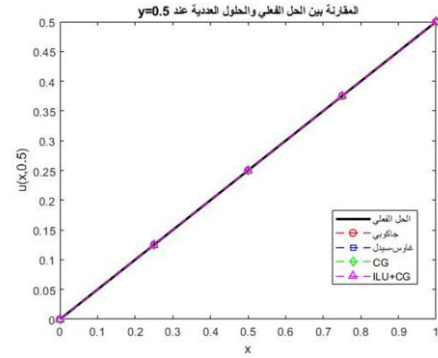


شكل (27.3) الحل التقريبي في مثال (4.2)
عندما $0.1 = h = k$

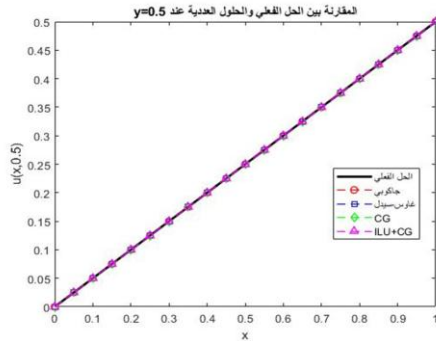
باختيار طول الفترة للمتغير x من 0 إلى 1 ونختار قيمة المتغير $y = 0.5$ ومنها حصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



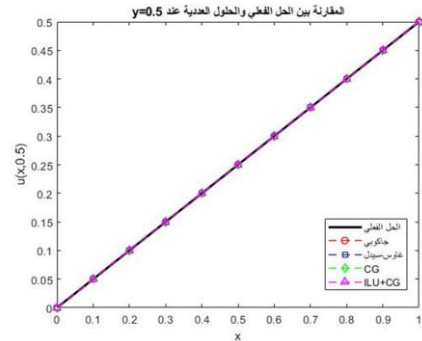
الشكل (30.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (4.2) عندما $0.2 = h = k$



الشكل (29.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (4.2) عندما $0.25 = h = k$



الشكل (32.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (4.2) عندما $0.05 = h = k$



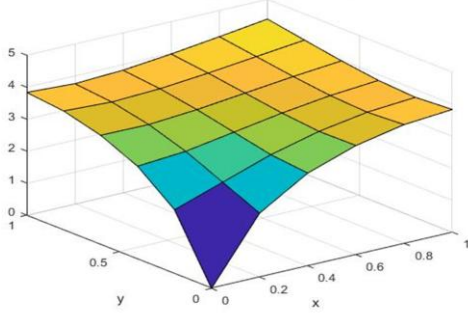
الشكل (31.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (4.2) عندما $0.1 = h = k$

خامساً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM ، GSM ، JM) لمعادلة لابلاس في مثال (5.2) عند شروط فان-نيومان الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة 10^{-6}

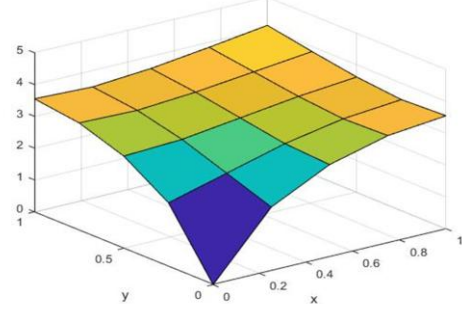
الجدول (5.3) مقارنة الطرق التكرارية في مثال (5.2)

PCGM	CGM	GSM	JM	$h = k$
1	16	559	1052	0.25
1	25	912	1710	0.2
2	87	3977	7370	0.1
3	304	16280	29728	0.05

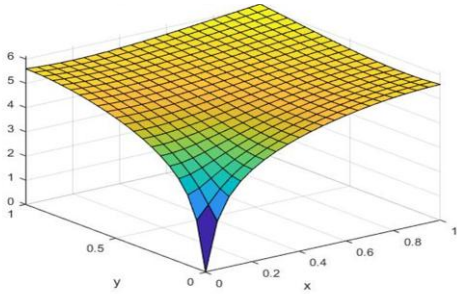
الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (5.2):



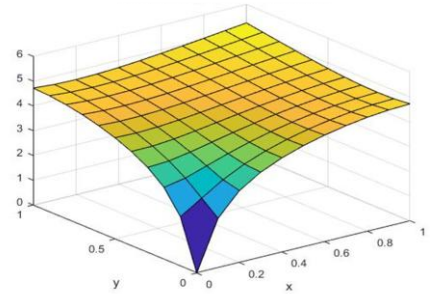
شكل (34.3) الحل التقريبي في مثال (5.2)
عندما $0.2 = h = k$



شكل (33.3) الحل التقريبي في مثال (5.2)
عندما $0.25 = h = k$

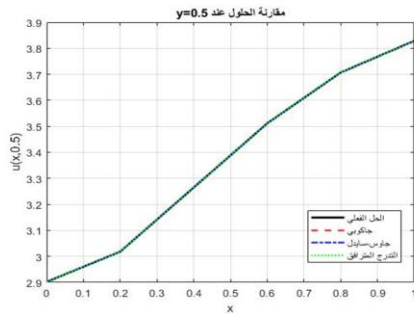


شكل (36.3) الحل التقريبي في مثال (5.2)
عندما $0.05 = h = k$

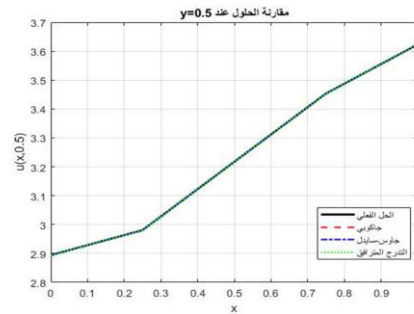


شكل (35.3) الحل التقريبي في مثال (5.2)
عندما $0.1 = h = k$

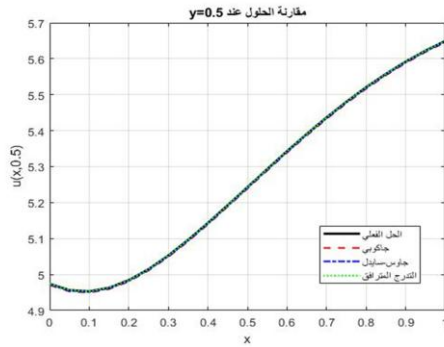
باختيار طول الفترة للمتغير x من 0 إلى 1 ونختار قيمة المتغير $y = 0.5$ ومنها تحصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



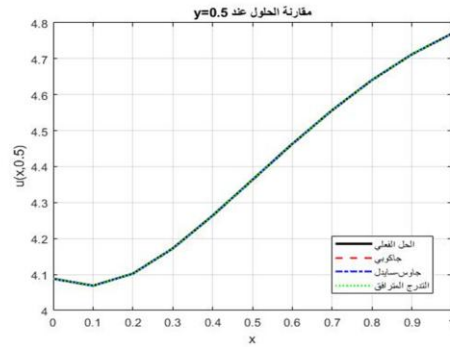
الشكل (38.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (5.2) عندما $0.2 = h = k$



الشكل (37.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (5.2) عندما $0.25 = h = k$



الشكل (40.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (5.2) عندما $0.05 = h = k$



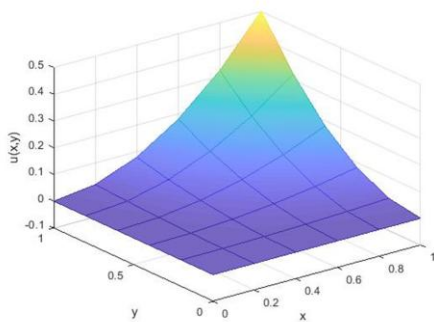
الشكل (39.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (5.2) عندما $0.1 = h = k$

سابعاً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM، CGM، GSM، JM) لمعادلة بواسون في مثال (6.2) عند شروط فان-نيومان الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة 10^{-6}

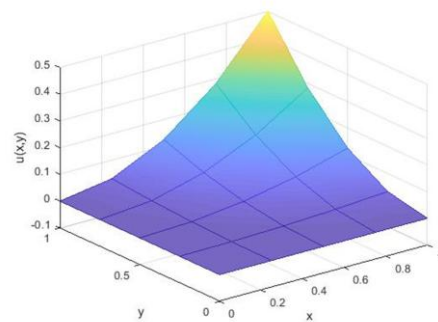
الجدول (6.3) مقارنة الطرق التكرارية في مثال (6.2)

PCGM	CGM	GSM	JM	h, k
1	16	380	760	0.25
1	24	593	1162	0.2
1	87	2211	3998	0.1
3	305	7218	11762	0.05

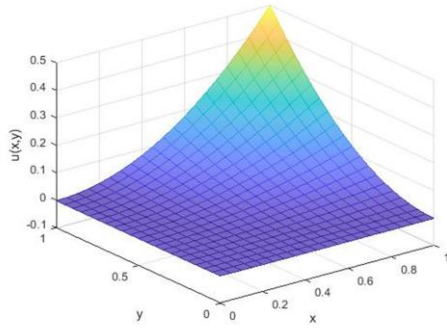
الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (6.2):



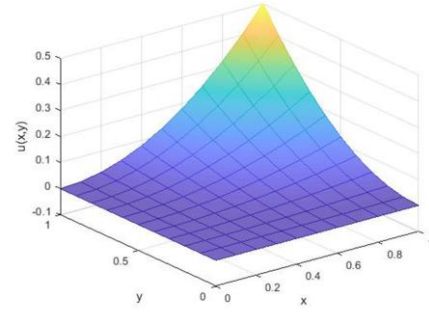
شكل (42.3) الحل التقريبي في مثال (6.2)
عندما $0.2 = h = k$



شكل (41.3) الحل التقريبي في مثال (6.2)
عندما $0.25 = h = k$

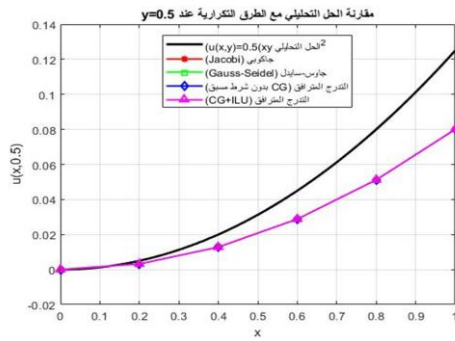


شكل (44.3) الحل التقريبي في مثال (6.2)
عندما $0.05 = h = k$

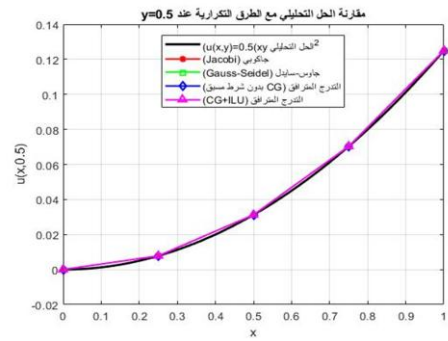


شكل (43.3) الحل التقريبي في مثال (6.2)
عندما $0.1 = h = k$

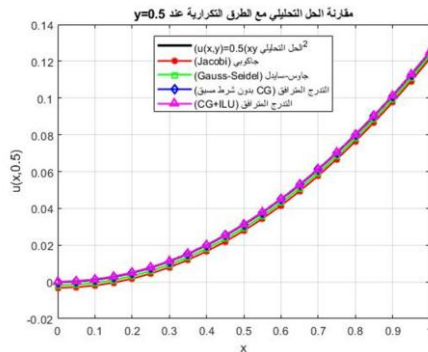
باختيار طول الفترة للمتغير x من 0 إلى 1 ونختار قيمة المتغير $y = 0.5$ ومنها تحصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



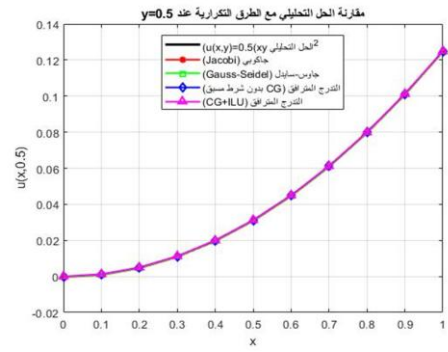
الشكل (46.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (6.2) عندما $0.2 = h = k$



الشكل (45.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (6.2) عندما $0.25 = h = k$



الشكل (48.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (6.2) عندما $0.05 = h = k$



الشكل (47.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (6.2) عندما $0.1 = h = k$

ملاحظة:

أثناء حل معادلة لابلاس وبواسون مع شروط نيومان بطريقة الفروق المنتهية فإن مصفوفة المعاملات A في النظام الخطي الناتج تكون شبه شادة أو شادة؛ وذلك لأن الحل في هذه الحالة لي وحيداً ويتحدد بإضافة ثابت جمعي ولحل هذه المشكلة فائدة يتم إضافة شرط حدي ويكون :

1. بجعل قيمة u تساوي صفراً عند نقطة معينة .
2. بفرض أن $\int u dx = 0$ وهذا يكافئ $\sum_{i=1}^N u_i = 0$

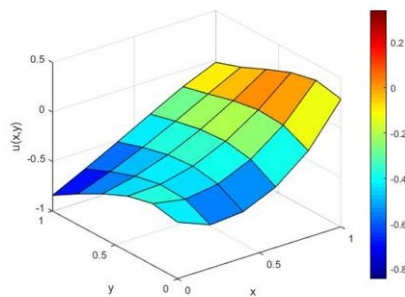
وبالتالي فإن النظام يصبح قابل للحل ونحصل على حل وحيد. (Yoon,M., Yoon,G.,& Min,C 2016)

ثامناً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM، CGM ، GSM ، JM) لمعادلة لابلاس في مثال (7.2) عند شروط روبن الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة 10^{-6}

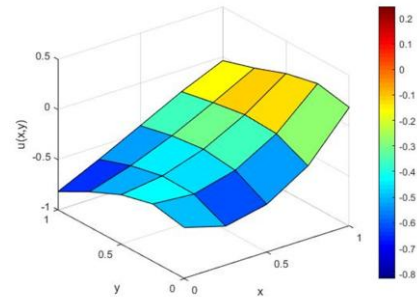
الجدول (7.3) مقارنة الطرق التكرارية في مثال (7.2)

PCGM	CGM	GSM	JM	h, k
1	12	28	54	0.25
1	12	14	50	0.2
1	48	79	125	0.1
2	174	223	386	0.05

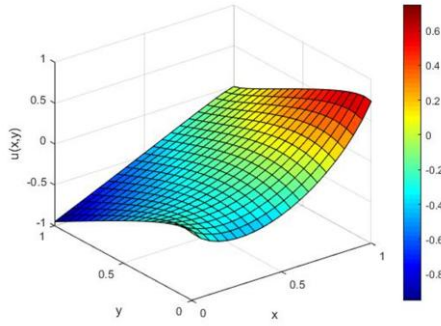
الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (7.2):



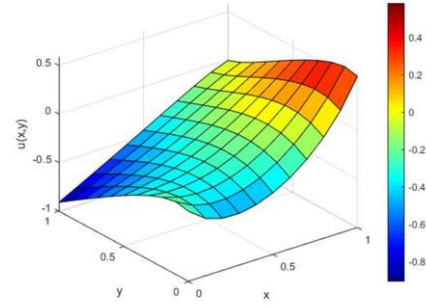
شكل (50.3) الحل التقريبي في مثال (7.2) عندما $0.2 = h = k$



شكل (49.3) الحل التقريبي في مثال (7.2) عندما $0.25 = h = k$

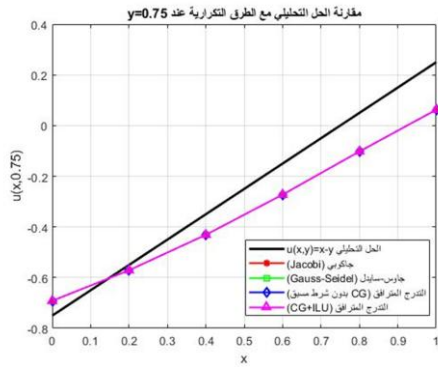


شكل (52.3) الحل التقريبي في مثال (7.2)
عندما $0.05 = h = k$

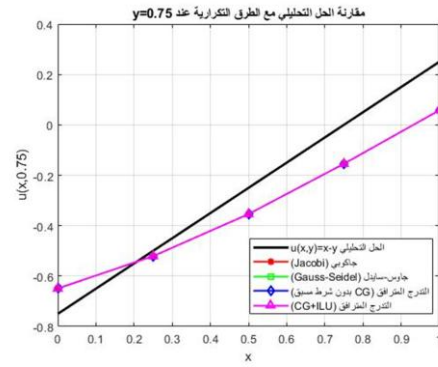


شكل (51.3) الحل التقريبي في مثال (7.2)
عندما $0.1 = h = k$

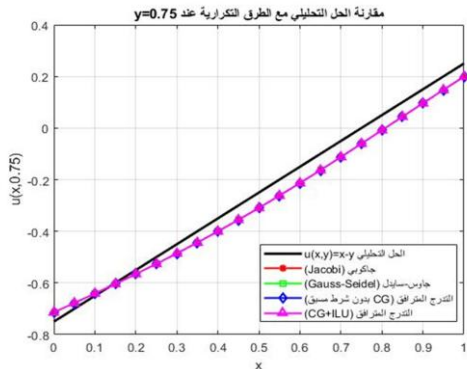
باختيار طول الفترة للمتغير x من 0 إلى 1 ونختار قيمة المتغير $y = 0.75$ ومنها حصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



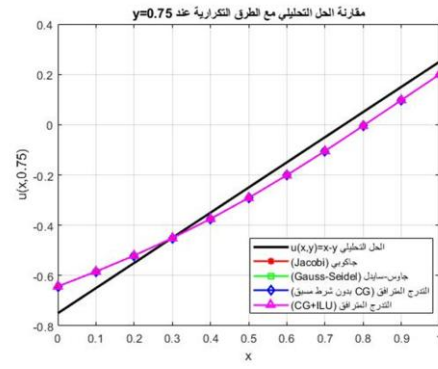
الشكل (54.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (7.2) عندما $0.2 = h = k$



الشكل (53.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (7.2) عندما $0.25 = h = k$



الشكل (56.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (7.2) عندما $0.05 = h = k$



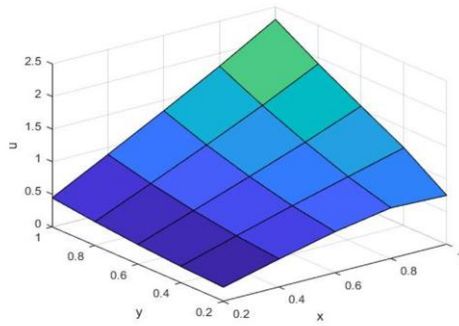
الشكل (55.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (7.2) عندما $0.1 = h = k$

تاسعاً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM، CGM ، GSM ، JM) لمعادلة بواسون في مثال (8.2) عند شروط روبن الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة 10^{-6}

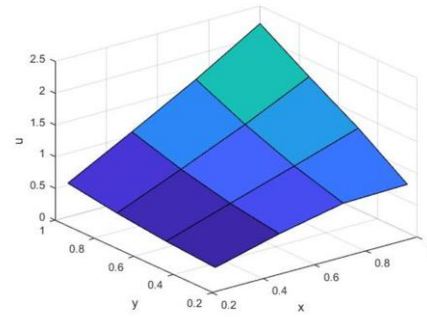
الجدول (8.3) مقارنة الطرق التكرارية في مثال (8.2)

PCGM	CGM	GSM	JM	h, k
6	12	31	56	0.25
6	15	34	62	0.2
13	70	129	242	0.1
50	279	469	875	0.05

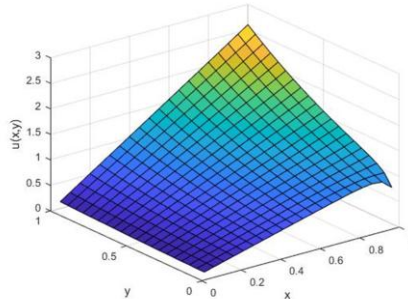
الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (8.2):



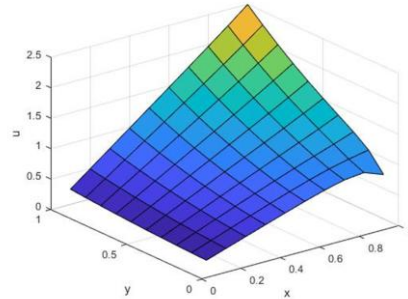
شكل (58.3) الحل التقريبي في مثال (8.2)
عندما $0.2 = h = k$



شكل (57.3) الحل التقريبي في مثال (8.2)
عندما $0.25 = h = k$

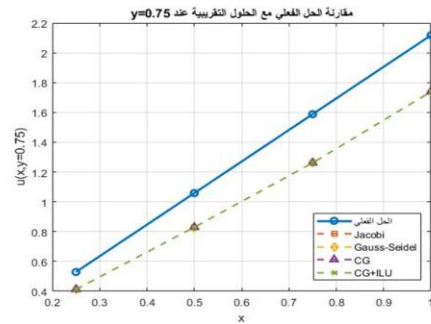
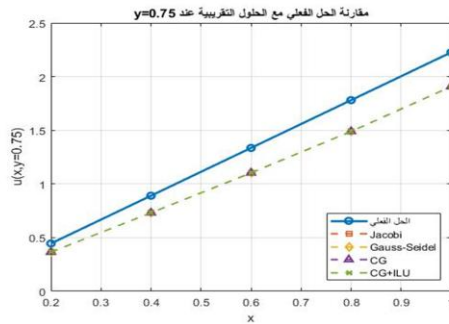


شكل (60.3) الحل التقريبي في مثال (8.2)
عندما $0.05 = h = k$



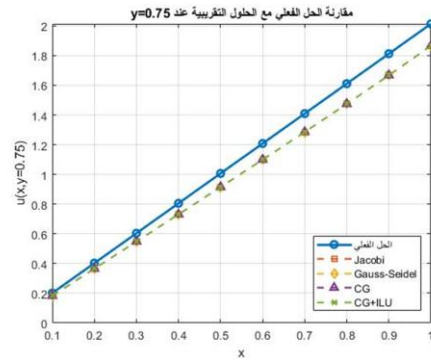
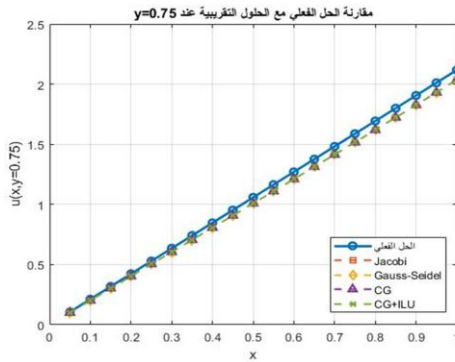
شكل (59.3) الحل التقريبي في مثال (8.2)
عندما $0.1 = h = k$

باختيار طول الفترة للمتغير x من 0 إلى 1 ونختار قيمة المتغير $y = 0.75$ ومنها تحصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



الشكل (62.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (8.2) عندما $0.2 = h = k$

الشكل (61.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (8.2) عندما $0.25 = h = k$



الشكل (64.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (8.2) عندما $0.05 = h = k$

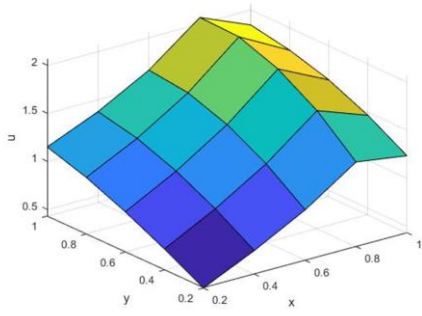
الشكل (63.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لمثال (8.2) عندما $0.1 = h = k$

عاشراً: مقارنة نتائج حل المنظومة الخطية بالطرق التكرارية (PCGM، CGM، GSM، JM) لمعادلة هلمهولتز في مثال (9.2) عند شروط روبن الحدودية في عدة حالات ل h, k بدقة 10^{-6}

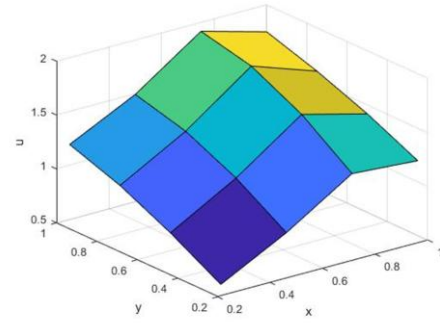
الجدول (9.3) مقارنة الطرق التكرارية في مثال (9.2)

PCGM	CGM	GSM	JM	h, k
7	11	41	76	0.25
7	14	43	82	0.2
11	31	140	266	0.1
18	57	324	616	0.05

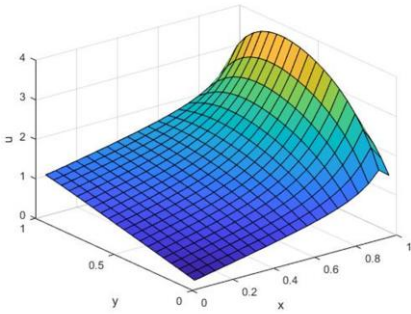
الحل البياني التقريبي في كل حالات h, k التي قمنا بتطبيقها في المثال (9.2):



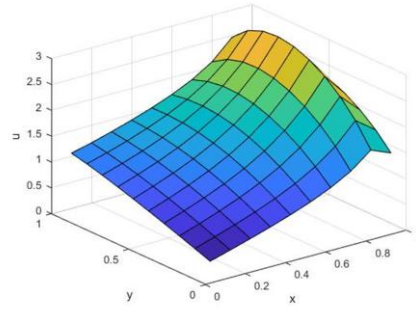
شكل (66.3) الحل التقريبي في مثال (9.2)
عندما $0.2 = h = k$



شكل (65.3) الحل التقريبي في مثال (9.2)
عندما $0.25 = h = k$

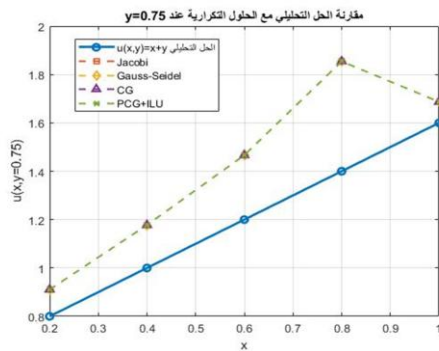


شكل (68.3) الحل التقريبي في مثال (9.2)
عندما $0.05 = h = k$

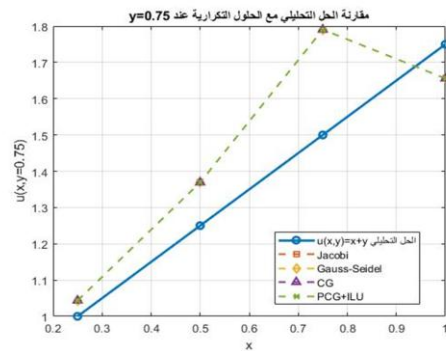


شكل (67.3) الحل التقريبي في مثال (9.2)
عندما $0.1 = h = k$

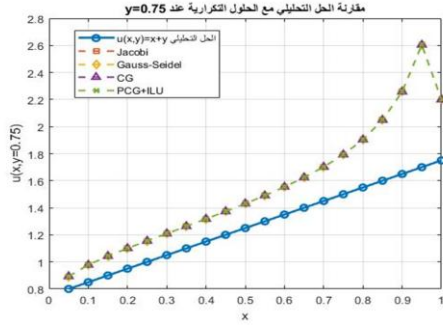
اختيار طول الفترة للمتغير x من 0 إلى 1 ونختار قيمة المتغير $y = 0.75$ ومنها تحصلنا على الشكل الذي يوضح المقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي لكل حالة من حالات h, k



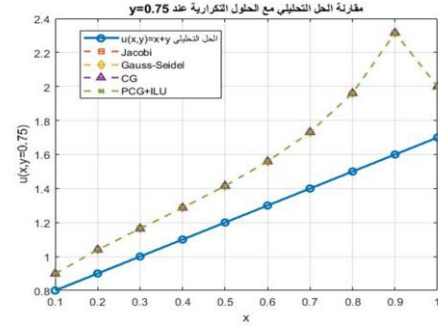
الشكل (70.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (9.2) عندما $0.2 = h = k$



الشكل (69.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (9.2) عندما $0.25 = h = k$



الشكل (72.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (9.2) عندما $0.05 = h = k$



الشكل (71.3) مقارنة بين الحل الفعلي والحل التقريبي
لمثال (9.2) عندما $0.1 = h = k$

النتائج :

- طريقة الفروق المنتهية (FDM) أثبتت فعاليتها في تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) إلى منظومات خطية قابلة للحل .
- جدول مقارنة الطرق التكرارية من حيث الدقة الكفاءة الحاسوبية :

العيوب	المزايا	الدقة العددية	عدد التكرارات المطلوبة	سرعة التقارب	الطريقة
غير عملية للمشكلات الكبيرة	بسيطة وسهلة التطبيق	متوسطة	عالية	بطيئة	جاكوبي (JM)
قد يظل بطيئاً في الشبكات الضخمة	يستفيد من القيم الحديثة فوراً	جيدة	أقل من جاكوبي	أسرع من جاكوبي	جاوس سيدل (GSM)
يتطلب معرفة خصائص المصفوفة	مناسب للمصفوفات المتماثلة موجبة التعريف	عالية	قليلة نسبياً	سريعة جداً	التدرج المقترن (CG)
يحتاج اختيار شرط مسبق مناسب	يقلل عدد التكرارات بشكل كبير	عالية جداً	الأقل على الإطلاق	الأسرع	الشرط المسبق (PCGM)

التوصيات :

- دراسة طرق أخرى مثل GMRES و BiCGSTAB، خاصة لمعالجة الأنظمة غير موجبة التعريف مثل معادلة هلمهولتز بشروط نيومان .
- توسيع نطاق البحث ليشمل دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية اللاهليجية في المجالات غير المنتظمة، لما تطرحه من تحديات نظرية وعددية تتعلق بانتظام الحلول واستقرارها، مع التركيز على تطوير أدوات تحليلية وخوارزميات عددية متكيفة قادرة على التعامل مع التعقيد الهندسي لهذه المجالات.
- إدماج الطرق متعددة الشبكات Multigrid methods لما لها من قدرة على تسريع الحلول العددية للأنظمة واسعة النطاق.
- تطبيق الطرق المدروسة على مسائل فيزيائية وهندسية واقعية (مثل انتقال الحرارة، انتشار الموجات، أو مسائل المرونة)، لتقييم الأداء في سياقات عملية.

الخلاصة

- تمت دراسة تطبيق طريقة الفروق المنتهية (FDM) لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الاهليجية ثنائية البعد وهي معادلة لابلاس ومعادلة بواسون ومعادلة هلمهولتز بشروط حدودية مختلفة (ديرشليت و فان- نيومان و روبن)
- تم تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلى منظومات خطية .
- تم حل هذه المنظومات باستخدام طرق تكرارية بدلاً من الطرق المباشرة، نظراً لكبر حجم المصفوفات .
- الطرق التكرارية التي تم استخدامها طريقة جاكوبي (JM) وطريقة جاوس سيدل (GSM) وطريقة التدرج المقترن (CGM) وطريقة التدرج المقترن مسبقاً (PCGM).
- أظهرت نتائج المقارنة أن طريقة جاوس-سيدل أسرع من طريقة جاكوبي في الوصول إلى الحل، بينما تفوقت طريقة التدرج المقترن على جاوس-سيدل من حيث الكفاءة، كما أثبتت طريقة التدرج المقترن مع الشرط المسبق أنها الأكثر فعالية والأسرع في تحقيق التقارب نحو الحل بين جميع الطرق المدروسة.

المصادر والمراجع

المراجع العربية :

1. السعيد، ع. ب. ع. (2011). التحليل العددي (الطبعة الأولى). جامعة الملك سعود، النشر العلمي والمطابع .
2. السيد، أ. أ. (2012). الطرق العددية والتحليل العددي (الطبعة الأولى). مكتبة الفلاح.
3. عوين، ع. م. (2010). طرق عددية والتحليل العددي (الطبعة الأولى) دار الكتب الوطنية، بنغازي، ليبيا
4. ناصر، ص. ع. (2008). الرياضيات والتحليل العددي عمان، الأردن: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.
5. البكور، ماجدة. (2019). المعادلات التفاضلية. [وثيقة pdf]. تم الاسترجاع من العنوان <http://www.alepniv.edu.sy>
6. سليمان، سميرة (2021). الدوال الخاصة. طرابلس: مركز العلوم والتقنية للبحوث والدراسات .
7. شفتنر، حميدة. (2019). الحلول الشبكية للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية . المجلة العلمية لكلية التربية مصراته، 1(12)، 156-175 تم استرجاع العنوان <http://www.mdr.misuratau.edu.ly>
8. عبد ، جلال . (2008). المعادلة التفاضلية العادية والجزئية . تم الاسترجاع من العنوان <http://www.alfreed-library.com>
9. العويضي، ح.، وزراع، س.، وعباس، ع. و. (2005). المعادلات التفاضلية (الجزء الثاني). الرياض، السعودية: مكتبة الرشيد.
10. فيرس، ج.، وباردن، ر. (2001). التحليل العددي (الطبعة الثانية؛ ترجمة رمضان جهيمة وكمال أبودية). فاليتا، مالطا: منشورات ELGA.
11. العدوى، محمد. (2018). التحليل العددي مع التطبيق على الماتلاب. تم الاسترجاع من <http://www.alfreed.com>
12. عيد، ن. (2011). التحليل العددي. حلب، سوريا: منشورات جامعة حلب.
13. ناجي، شعبان. (2007). المعادلات التفاضلية الجزئية (الطبعة الأولى).
14. عيد، ع.، كرم، أمين، أ. م.، & عيد. (2013). الحل العددي لمعادلة Burger-Fisher في بعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية. المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، 13(3)، 48-61.

المراجع الانجليزية :

1. Godunov, S. K., & Bohachevsky, I. (1959). Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematicheskij sbornik*, 47(3), 271-306.
2. Lipnikov, K., Manzini, G., & Shashkov, M. (2014). Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*, 257, 1163-1227.
3. Al-Rob, M. F. A. A. (2016). *Finite Difference and Finite Element Methods for Solving Elliptic Partial Differential Equations*
4. Aleyan, O. A. (2016). THE APPLICATIONS OF CG AND PCG ON ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLVED BY FINITE ELEMENT METHOD. 122-134، (1)1، مجلة الجامعة الأسمرية.
5. Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.
6. Burden, R. L., Faires, J. D., & Toomey, H. A. (1997). Numerical Analysis Algorithms in C. Brooks Cole: Pacific Grove, CA, USA.
7. Ciarlet, P. G., & Lions, J.-L. (1990). *Handbook of numerical analysis* (Vol. 11). Gulf Professional Publishing.
8. Drábek, P., & Holubová, G. (2014). *Elements of partial differential equations*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

9. Godunov, S. K., & Bohachevsky, I. (1959). Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematicheskij sbornik*, 47(3), 271-306.
10. Herman, R. L. (2015). Introduction to partial differential equations. *North Carolina, NC, USA: RL Herman*.
11. Jaber, A. S., RASHEED, M., & Saidani, T. (2024). The conjugate gradient approach to solve two dimensions linear elliptic boundary value equations as a prototype of the reaction diffusion system. *Al-Salam journal for engineering and technology*, 3(1), 157-168.
12. Lipnikov, K., Manzini, G., & Shashkov, M. (2014). Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*, 257, 1163-1227.
13. Papanikos, G., & Gousidou-Koutita, M. C. (2015). A computational study with finite element method and finite difference method for 2D elliptic partial differential equations. *Applied Mathematics*, 6(12), 2104.
14. Saad, Y. (2003). *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM.
15. Scott, J., & Tũma, M. (2025). Developing robust incomplete Cholesky factorizations in half precision arithmetic. *Numerical Algorithms*, 1-22.
16. Shaban, H. R. M., & Husain, A. M. (2014). Edge Detection for Objects in the Upper Triangle Gray Scale Image by Cholesky Decomposition and Unsharp Masking (USM). *International Journal of Computer Applications*, 85(6).
17. Stanoyevitch, A. (2011). *Introduction to numerical ordinary and partial differential equations using MATLAB* (Vol. 72). John Wiley & Sons.
18. Min.C., Yoon, G.,& Yoon, M. (2016). On solving the singular system arisen form Poisson equation with Neumann boundary condition. *Journal of Scientific Computing*. 69, 391-405. doi: 10.1007/s10915-016-0200-2

الملحق
الأكواد البرمجية
MATLAB CODES

1/ كود حل المثال (1.2) بالطرق التكرارية (PCGM , CGM , GSM , JM)

```
clc; clear all;

% إعداد المجال والخطوة
a = 1; b = 2; c = 0; d = 1;
h = 0.25; k = 0.25;
Nx = (b - a)/h - 1; % عدد النقاط الداخلية في x
Ny = (d - c)/k - 1; % عدد النقاط الداخلية في y
x = a:h:b;
y = c:k:d;

% مصفوفة الحل
u = zeros(Nx + 2, Ny + 2);

% تطبيق الشروط الحدية
for i = 1:Nx + 2
    u(i,1) = log(x(i)^2); % u(x,0)
    u(i,Ny + 2) = log(x(i)^2 + 1); % u(x,1)
end

for j = 1:Ny + 2
    u(1,j) = log(y(j)^2 + 1); % u(1,y)
    u(Nx + 2,j) = log(y(j)^2 + 4); % u(2,y)
end

% إعداد النظام الخطي
N = Nx * Ny;
A = zeros(N, N);
b_vec = zeros(N, 1);

for j = 1:Ny
    for i = 1:Nx
        row = (j - 1) * Nx + i;
        A(row, row) = -4;

        if i > 1
            A(row, row - 1) = 1;
        else
            b_vec(row) = b_vec(row) - u(1, j + 1);
        end

        if i < Nx
            A(row, row + 1) = 1;
        else
            b_vec(row) = b_vec(row) - u(Nx + 2, j + 1);
        end

        if j > 1
            A(row, row - Nx) = 1;
        else
            b_vec(row) = b_vec(row) - u(1, j + 1);
        end
    end
end
```

```

        b_vec(row) = b_vec(row) - u(i + 1, 1);
    end

    if j < Ny
        A(row, row + Nx) = 1;
    else
        b_vec(row) = b_vec(row) - u(i + 1, Ny + 2);
    end
end
end

% -----
% جاكوبي طريقة
% -----
max_iter = 1000;
tol = 1e-6;
u_jacobi = zeros(N, 1);
D = diag(diag(A));
R = A - D;
jacobi_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (b_vec - R * u_jacobi);
    jacobi_iter = iter;
    if norm(u_new - u_jacobi, inf) < tol
        break;
    end
    u_jacobi = u_new;
end

u_jacobi_matrix = u;
u_jacobi_matrix(2:Nx + 1, 2:Ny + 1) = reshape(u_jacobi,
Nx, Ny);

% -----
% طريقة غاوس-سيدل
% -----
u_gs = zeros(N,1);
gs_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_old = u_gs;
    for i = 1:N
        sigma = A(i,1:i-1)*u_gs(1:i-1) +
A(i,i+1:end)*u_gs(i+1:end);
        u_gs(i) = (b_vec(i) - sigma)/A(i,i);
    end

    gs_iter = iter;
    if norm(u_gs - u_old, inf) < tol
        break;
    end
end

```

```

    end
end

u_gs_matrix = u;
u_gs_matrix(2:Nx+1, 2:Ny+1) = reshape(u_gs, Nx, Ny);

% -----
% طريقة Conjugate Gradient (CG)
% -----
u_cg = zeros(N,1);
r = b_vec - A*u_cg;
p = r;
cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    Ap = A*p;
    alpha = (r'*r) / (p'*Ap);
    u_cg = u_cg + alpha*p;
    r_new = r - alpha*Ap;

    cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end

    beta = (r_new'*r_new) / (r'*r);
    p = r_new + beta*p;
    r = r_new;
end

u_cg_matrix = u;
u_cg_matrix(2:Nx+1, 2:Ny+1) = reshape(u_cg, Nx, Ny);

% -----
% طريقة ILU + Conjugate Gradient
% -----
A_sparse = sparse(A);
setup.type = 'ilutp';
setup.droptol = 1e-3;
[L,U] = ilu(A_sparse, setup);

u_pcg = zeros(N,1);
r = b_vec - A*u_pcg;
z = U \ (L \ r);
p = z;
ilu_cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    Ap = A*p;
    alpha = (r'*z) / (p'*Ap);
    u_pcg = u_pcg + alpha*p;

```

```

    r_new = r - alpha*Ap;
    z_new = U \ (L \ r_new);

    ilu_cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end

    beta = (r_new'*z_new) / (r'*z);
    p = z_new + beta*p;
    r = r_new;
    z = z_new;
end

u_pcg_matrix = u;
u_pcg_matrix(2:Nx+1, 2:Ny+1) = reshape(u_pcg, Nx, Ny);

% -----
% مقارنة الحل الفعلي مع الحلول العددية عند y=0.5
% -----
y_fixed = 0.5;
x_line = x; % الفترة من 1 إلى 2

% الحل الفعلي
u_exact_line = log(x_line.^2 + y_fixed^2);

% استخراج الحل العددي من الشبكة عند y=0.5
[~, j_index] = min(abs(y - y_fixed));

u_jacobi_line = u_jacobi_matrix(:, j_index);
u_gs_line     = u_gs_matrix(:, j_index);
u_cg_line     = u_cg_matrix(:, j_index);
u_pcg_line    = u_pcg_matrix(:, j_index);

% مقارنة الرسم
figure
plot(x_line, u_exact_line, 'k-', 'LineWidth', 2); hold
on;
plot(x_line, u_jacobi_line, 'r--o', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_gs_line, 'b--s', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_cg_line, 'g--d', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_pcg_line, 'm--^', 'LineWidth', 1);

xlabel('x')
ylabel('u(x,0.5)')
title('المقارنة بين الحل الفعلي والحلول العددية عند y=0.5')
legend('الحل الفعلي', ...
    ['(تكرار ', num2str(jacobi_iter), ' جاكوبي)'], ...
    ['(تكرار ', num2str(gs_iter), ' غاوس-سيدل)'], ...
    ['(تكرار ', num2str(cg_iter), ' CG)'], ...)

```

```

        ['ILU+CG (', num2str(ilu_cg_iter), ' (تكرار)'], ...
        'Location','Best')
grid on

% -----
% عرض عدد التكرارات
% -----
disp(['عدد التكرارات في طريقة جاكوبي: ',
num2str(jacobi_iter)])
disp(['سيدل-عدد التكرارات في طريقة غاوس: ',
num2str(gs_iter)])
disp(['CG: ', num2str(cg_iter)])
disp(['ILU+CG: ',
num2str(ilu_cg_iter)])

```

2. كود حل المثال (2.2) بالطرق التكرارية (PCGM , CGM , GSM , JM)

```

clc; clear all

% المجال
a=0; b=1; c=0; d=1;

% عدد النقاط الداخلية
Nx=19; Ny=19;

% خطوة الشبكة
h=(b-a)/(Nx+1); k=(d-c)/(Ny+1);

% إنشاء الشبكة
x=a:h:b;
y=c:k:d;

% مصفوفة الحل
u=zeros(Nx+2,Ny+2);

% الشروط الحدودية
for i=1:Nx+2
    u(i,Ny+2)=50*x(i)*(1-x(i)); % u(x,1)
end
for i=1:Nx+2
    u(i,1)=20*sin(2*pi*x(i)); % u(x,0)
end

for j=1:Ny+2
    u(1,j)=0; % u(0,y)
end
for j=1:Ny+2
    u(Nx+2,j)=0; % u(1,y)
end

% b و المتجه A بناء مصفوفة

```

```

num_interior_points = Nx * Ny;
A = zeros(num_interior_points, num_interior_points);
b = zeros(num_interior_points, 1);

for j=1:Ny
    for i=1:Nx
        row_idx = (j-1)*Nx + i;
        A(row_idx, row_idx) = -2*(1 + (h/k)^2);

        % الجيران في x
        if i > 1
            A(row_idx, row_idx - 1) = 1;
        end
        if i < Nx
            A(row_idx, row_idx + 1) = 1;
        end

        % الجيران في y
        if j > 1
            A(row_idx, row_idx - Nx) = (h/k)^2;
        end
        if j < Ny
            A(row_idx, row_idx + Nx) = (h/k)^2;
        end

        % حسب الحدود b تعديل المتجه
        if i == 1
            b(row_idx) = b(row_idx) - (h/k)^2 * u(1, j+1);
        end
        if i == Nx
            b(row_idx) = b(row_idx) - (h/k)^2 *
u(Nx+2, j+1);
        end
        if j == 1
            b(row_idx) = b(row_idx) - u(i+1, 1);
        end
        if j == Ny
            b(row_idx) = b(row_idx) - u(i+1, Ny+2);
        end
    end
end

% -----
% الحل المباشر
% -----
u_interior_vec = A\b;
u_interior = reshape(u_interior_vec, Nx, Ny);
u(2:Nx+1, 2:Ny+1) = u_interior;

% -----
% طريقة جاكوبي

```

```

% -----
max_iter = 1000;
tol = 1e-6;
u_jacobi = zeros(num_interior_points,1);
D = diag(diag(A));
R = A - D;
jacobi_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (b - R*u_jacobi);
    jacobi_iter = iter;
    if norm(u_new - u_jacobi, inf) < tol
        break;
    end
    u_jacobi = u_new;
end

u_jacobi_matrix = u;
u_jacobi_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_jacobi,Nx,Ny);

% -----
% طريقة غاوس-سيدل
% -----
u_gs = zeros(num_interior_points,1);
gs_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_old = u_gs;
    for i = 1:num_interior_points
        sigma = A(i,1:i-1)*u_gs(1:i-1) +
A(i,i+1:end)*u_gs(i+1:end);
        u_gs(i) = (b(i) - sigma)/A(i,i);
    end
    gs_iter = iter;
    if norm(u_gs - u_old, inf) < tol
        break;
    end
end

u_gs_matrix = u;
u_gs_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_gs,Nx,Ny);

% -----
% طريقة Conjugate Gradient (CG)
% -----
u_cg = zeros(num_interior_points,1);
r = b - A*u_cg;
p = r;
cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter

```

```

    Ap = A*p;
    alpha = (r'*r)/(p'*Ap);
    u_cg = u_cg + alpha*p;
    r_new = r - alpha*Ap;
    cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end
    beta = (r_new'*r_new)/(r'*r);
    p = r_new + beta*p;
    r = r_new;
end

u_cg_matrix = u;
u_cg_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_cg,Nx,Ny);

% -----
% طريقة ILU + Conjugate Gradient
% -----
A_sparse = sparse(A);
setup.type = 'ilutp';
setup.droptol = 1e-3;
[L,U] = ilu(A_sparse, setup);

u_pcg = zeros(num_interior_points,1);
r = b - A*u_pcg;
z = U \ (L \ r);
p = z;
ilu_cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    Ap = A*p;
    alpha = (r'*z)/(p'*Ap);
    u_pcg = u_pcg + alpha*p;
    r_new = r - alpha*Ap;
    z_new = U \ (L \ r_new);
    ilu_cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end
    beta = (r_new'*z_new)/(r'*z);
    p = z_new + beta*p;
    r = r_new;
    z = z_new;
end

u_pcg_matrix = u;
u_pcg_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_pcg,Nx,Ny);

% -----
% مقارنة الحل الفعلي مع الحلول العددية عند y=0.5

```

```

% -----
y_fixed = 0.5;
x_line = x; % الفترة من 0 إلى 1

% الحل الفعلي
u_exact_line = log(x_line.^2 + y_fixed^2);

% استخراج الحل العددي من الشبكة عند y=0.5
[~, j_index] = min(abs(y - y_fixed));

u_jacobi_line = u_jacobi_matrix(:, j_index);
u_gs_line      = u_gs_matrix(:, j_index);
u_cg_line      = u_cg_matrix(:, j_index);
u_pcg_line     = u_pcg_matrix(:, j_index);

% رسم المقارنة
figure
plot(x_line, u_exact_line, 'k-', 'LineWidth', 2); hold
on;
plot(x_line, u_jacobi_line, 'r--o', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_gs_line, 'b--s', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_cg_line, 'g--d', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_pcg_line, 'm--^', 'LineWidth', 1);

xlabel('x')
ylabel('u(x,0.5)')
title('المقارنة بين الحل الفعلي والحلول العددية عند y=0.5')
legend('الحل الفعلي', ...
       ['(تكرار ', num2str(jacobi_iter), ' جاكوبي)'], ...
       ['(تكرار ', num2str(gs_iter), ' غاوس-سيدل)'], ...
       ['(تكرار ', num2str(cg_iter), ' CG)'], ...
       ['(تكرار ', num2str(ilu_cg_iter), ' ILU+CG)'], ...
       'Location','Best')
grid on

% -----
% عرض عدد التكرارات
% -----
disp(['عدد التكرارات في طريقة جاكوبي: ',
num2str(jacobi_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة غاوس-سيدل: ',
num2str(gs_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة CG: ', num2str(cg_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة ILU+CG: ',
num2str(ilu_cg_iter)])

```

3. كود حل المثال (3.2) بالطرق التكرارية (PCGM , CGM , GSM , JM)

```
clc; clear all;

% المجال
a=1; b=2; c=1; d=2;

% عدد النقاط الداخلية
Nx=3; Ny=3;

% خطوة الشبكة
h=(b-a)/(Nx+1); k=(d-c)/(Ny+1);

% إنشاء الشبكة
x=a:h:b;
y=c:k:d;

% مصفوفة الحل
u=zeros(Nx+2,Ny+2);

% الشروط الحدودية
for i=1:Nx+2
    u(i,Ny+2)=x(i)*log(4*x(i)^2); % u(x,2)
    u(i,1)=x(i)*log(x(i)); % u(x,1)
end

for j=1:Ny+2
    u(Nx+2,j)=y(j)*log(4*y(j)^2); % u(2,y)
    u(1,j)=y(j)*log(y(j)); % u(1,y)
end

% b والمتجه A بناء مصفوفة
num_interior_points = Nx * Ny;
A = zeros(num_interior_points, num_interior_points);
b = zeros(num_interior_points,1);

for j=1:Ny
    for i=1:Nx
        row_idx = (j-1)*Nx + i;
        A(row_idx,row_idx) = -2*(1 + (h/k)^2);

        % الجيران في x
        if i > 1
            A(row_idx,row_idx - 1) = 1;
        end
        if i < Nx
            A(row_idx,row_idx + 1) = 1;
        end

        % الجيران في y
        if j > 1
```

```

        A(row_idx,row_idx - Nx) = (h/k)^2;
    end
    if j < Ny
        A(row_idx,row_idx + Nx) = (h/k)^2;
    end

    % حسب الحدود b تعديل المتجه
    if i == 1
        b(row_idx) = b(row_idx) - (h/k)^2 * u(1,j+1);
    end
    if i == Nx
        b(row_idx) = b(row_idx) - (h/k)^2 *
u(Nx+2,j+1);
    end
    if j == 1
        b(row_idx) = b(row_idx) - u(i+1,1);
    end
    if j == Ny
        b(row_idx) = b(row_idx) - u(i+1,Ny+2);
    end

    % إضافة الحد الأيمن (x/y + y/x)
    b(row_idx) = b(row_idx) + h^2 * (x(i+1)/y(j+1) +
y(j+1)/x(i+1));
    end
end

% -----
% الحل المباشر
% -----
u_interior_vec = A\b;
u_interior = reshape(u_interior_vec,Nx,Ny);
u(2:Nx+1,2:Ny+1) = u_interior;

% -----
% طريقة جاكوبي
% -----
max_iter = 1000;
tol = 1e-6;
u_jacobi = zeros(num_interior_points,1);
D = diag(diag(A));
R = A - D;
jacobi_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (b - R*u_jacobi);
    jacobi_iter = iter;
    if norm(u_new - u_jacobi, inf) < tol
        break;
    end
    u_jacobi = u_new;
end

```

```

end

u_jacobi_matrix = u;
u_jacobi_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_jacobi,Nx,Ny);

% -----
% طريقة غاوس-سيدل
% -----
u_gs = zeros(num_interior_points,1);
gs_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_old = u_gs;
    for i = 1:num_interior_points
        sigma = A(i,1:i-1)*u_gs(1:i-1) +
A(i,i+1:end)*u_gs(i+1:end);
        u_gs(i) = (b(i) - sigma)/A(i,i);
    end
    gs_iter = iter;
    if norm(u_gs - u_old, inf) < tol
        break;
    end
end

u_gs_matrix = u;
u_gs_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_gs,Nx,Ny);

% -----
% طريقة Conjugate Gradient (CG)
% -----
u_cg = zeros(num_interior_points,1);
r = b - A*u_cg;
p = r;
cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    Ap = A*p;
    alpha = (r'*r)/(p'*Ap);
    u_cg = u_cg + alpha*p;
    r_new = r - alpha*Ap;
    cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end
    beta = (r_new'*r_new)/(r'*r);
    p = r_new + beta*p;
    r = r_new;
end

u_cg_matrix = u;
u_cg_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_cg,Nx,Ny);

```

```

% -----
% طريقة ILU + Conjugate Gradient
% -----
A_sparse = sparse(A);
setup.type = 'ilutp';
setup.droptol = 1e-3;
[L,U] = ilu(A_sparse, setup);

u_pcg = zeros(num_interior_points,1);
r = b - A*u_pcg;
z = U \ (L \ r);
p = z;
ilu_cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    Ap = A*p;
    alpha = (r'*z)/(p'*Ap);
    u_pcg = u_pcg + alpha*p;
    r_new = r - alpha*Ap;
    z_new = U \ (L \ r_new);
    ilu_cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end
    beta = (r_new'*z_new)/(r'*z);
    p = z_new + beta*p;
    r = r_new;
    z = z_new;
end

u_pcg_matrix = u;
u_pcg_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_pcg,Nx,Ny);

% -----
% مقارنة الحل التحليلي مع الحلول العددية عند y=1.5
% -----
y_fixed = 1.5;
x_line = x;

% الحل التحليلي
u_exact_line = x_line .* y_fixed .* log(x_line .*
y_fixed);

% استخراج الحلول العددية من الشبكة عند y=1.5
[~, j_index] = min(abs(y - y_fixed));
u_direct_line = u(:, j_index);
u_jacobi_line = u_jacobi_matrix(:, j_index);
u_gs_line = u_gs_matrix(:, j_index);
u_cg_line = u_cg_matrix(:, j_index);
u_pcg_line = u_pcg_matrix(:, j_index);

```

```

% رسم المقارنة
figure
plot(x_line, u_exact_line, 'k-', 'LineWidth', 2); hold
on;
plot(x_line, u_direct_line, 'r--o', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_jacobi_line, 'b--s', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_gs_line, 'g--d', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_cg_line, 'm--^', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_pcg_line, 'c--x', 'LineWidth', 1);

xlabel('x')
ylabel(['u(x,', num2str(y_fixed), ')'])
title('المقارنة بين الحل التحليلي والحلول العددية لمعادلة '
'بواسون')
legend('الحل المباشر', 'الحل التحليلي', ...
['(تكرار ', num2str(jacobi_iter), ' جاكوبي')'], ...
['(تكرار ', num2str(gs_iter), ' غاوس-سيدل')'], ...
['(تكرار ', num2str(cg_iter), ' CG')'], ...
['(تكرار ', num2str(ilu_cg_iter), ' ILU+CG')'], ...
'Location', 'Best')
grid on

% -----
% عرض عدد التكرارات
% -----
disp(['عدد التكرارات في طريقة جاكوبي: ',
num2str(jacobi_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة غاوس-سيدل: ',
num2str(gs_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة CG: ', num2str(cg_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة ILU+CG: ',
num2str(ilu_cg_iter)])

```

4. كود حل المثال (4.2) بالطرق التكرارية (PCGM , CGM , GSM , JM)

```

clc; clear all; close all;

% المجال
a = 0; b = 1; % اتجاه x
c = 0; d = 1; % اتجاه y

% عدد النقاط الداخلية
Nx = 4; Ny = 4; % يمكن تغييره

% خطوة الشبكة
hx = (b-a)/(Nx+1);
hy = (d-c)/(Ny+1);

```

```

% الشبكة
x = a:hx:b;
y = c:hy:d;

% العدد الموجي
k_wave = 1; % يمكن تغييره

% مصفوفة الحل
u = zeros(Nx+2, Ny+2);

% الشروط الحدودية
for i = 1:Nx+2
    u(i,1) = 0; % u(x,0)=0
    u(i,Ny+2) = x(i); % u(x,1)=x
end
for j = 1:Ny+2
    u(1,j) = 0; % u(0,y)=0
    u(Nx+2,j) = y(j); % u(1,y)=y
end

% والمتجه A بناء مصفوفة b
num_interior_points = Nx*Ny;
A = zeros(num_interior_points,num_interior_points);
b = zeros(num_interior_points,1);

for j = 1:Ny
    for i = 1:Nx
        row = (j-1)*Nx + i;

        % Laplacian +
        k^2 u)
        A(row,row) = -2*(1/hx^2 + 1/hy^2) + k_wave^2;

        % الجيران في x
        if i > 1
            A(row,row-1) = 1/hx^2;
        end
        if i < Nx
            A(row,row+1) = 1/hx^2;
        end

        % الجيران في y
        if j > 1
            A(row,row-Nx) = 1/hy^2;
        end
        if j < Ny
            A(row,row+Nx) = 1/hy^2;
        end

        % الحد الأيمن (المصدر) f(x,y) = xy
        xi = x(i+1); yi = y(j+1);
    end
end

```

```

        b(row) = xi*yi;

        % حسب الحدود b تعديل
        if i == 1
            b(row) = b(row) - (1/hx^2)*u(1,j+1);
        end
        if i == Nx
            b(row) = b(row) - (1/hx^2)*u(Nx+2,j+1);
        end
        if j == 1
            b(row) = b(row) - (1/hy^2)*u(i+1,1);
        end
        if j == Ny
            b(row) = b(row) - (1/hy^2)*u(i+1,Ny+2);
        end
    end
end

% -----
% الحل المباشر
% -----
u_interior_vec = A\b;
u_interior = reshape(u_interior_vec,Nx,Ny);
u(2:Nx+1,2:Ny+1) = u_interior;

% -----
% طريقة جاكوبي
% -----
max_iter = 1000;
tol = 1e-6;
u_jacobi = zeros(num_interior_points,1);
D = diag(diag(A));
R = A - D;
jacobi_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (b - R*u_jacobi);
    jacobi_iter = iter;
    if norm(u_new - u_jacobi, inf) < tol
        break;
    end
    u_jacobi = u_new;
end

u_jacobi_matrix = u;
u_jacobi_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_jacobi,Nx,Ny);

% -----
% غاوس-سيدل طريقة
% -----
u_gs = zeros(num_interior_points,1);

```

```

gs_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    u_old = u_gs;
    for i = 1:num_interior_points
        sigma = A(i,1:i-1)*u_gs(1:i-1) +
A(i,i+1:end)*u_gs(i+1:end);
        u_gs(i) = (b(i) - sigma)/A(i,i);
    end
    gs_iter = iter;
    if norm(u_gs - u_old, inf) < tol
        break;
    end
end

u_gs_matrix = u;
u_gs_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_gs,Nx,Ny);

% -----
% طريقة Conjugate Gradient (CG)
% -----
u_cg = zeros(num_interior_points,1);
r = b - A*u_cg;
p = r;
cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    Ap = A*p;
    alpha = (r'*r)/(p'*Ap);
    u_cg = u_cg + alpha*p;
    r_new = r - alpha*Ap;
    cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end
    beta = (r_new'*r_new)/(r'*r);
    p = r_new + beta*p;
    r = r_new;
end

u_cg_matrix = u;
u_cg_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_cg,Nx,Ny);

% -----
% طريقة ILU + Conjugate Gradient
% -----
A_sparse = sparse(A);
setup.type = 'ilutp';
setup.droptol = 1e-3;
[L,U] = ilu(A_sparse, setup);

```

```

u_pcg = zeros(num_interior_points,1);
r = b - A*u_pcg;
z = U \ (L \ r);
p = z;
ilu_cg_iter = 0;

for iter = 1:max_iter
    Ap = A*p;
    alpha = (r'*z)/(p'*Ap);
    u_pcg = u_pcg + alpha*p;
    r_new = r - alpha*Ap;
    z_new = U \ (L \ r_new);
    ilu_cg_iter = iter;
    if norm(r_new, inf) < tol
        break;
    end
    beta = (r_new'*z_new)/(r'*z);
    p = z_new + beta*p;
    r = r_new;
    z = z_new;
end

u_pcg_matrix = u;
u_pcg_matrix(2:Nx+1,2:Ny+1) = reshape(u_pcg,Nx,Ny);

% -----
% الحل التحليلي
% -----
[X,Y] = meshgrid(x,y);
u_exact = X.*Y;

% -----
% عرض عدد التكرارات
% -----
disp(['عدد التكرارات في طريقة جاكوبي: ',
num2str(jacobi_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة غاوس-سيدل: ',
num2str(gs_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة CG: ', num2str(cg_iter)])
disp(['عدد التكرارات في طريقة ILU+CG: ',
num2str(ilu_cg_iter)])

% -----
% y=0.5 الفعلي مع الحلول العددية عند مقارنة الحل
% -----
y_fixed = 0.5;
x_line = x; % الفترة من 0 إلى 1

% الحل الفعلي
u_exact_line = x_line .* y_fixed;

```

```

% استخراج الحل العددي من الشبكة عند y=0.5
[~, j_index] = min(abs(y - y_fixed));

u_jacobi_line = u_jacobi_matrix(:, j_index);
u_gs_line     = u_gs_matrix(:, j_index);
u_cg_line     = u_cg_matrix(:, j_index);
u_pcg_line    = u_pcg_matrix(:, j_index);

% رسم المقارنة
figure
plot(x_line, u_exact_line, 'k-', 'LineWidth', 2); hold
on;
plot(x_line, u_jacobi_line, 'r--o', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_gs_line, 'b--s', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_cg_line, 'g--d', 'LineWidth', 1);
plot(x_line, u_pcg_line, 'm--^', 'LineWidth', 1);

xlabel('x')
ylabel('u(x,0.5)')
title('والحلول العددية عند المقارنة بين الحل الفعلي  
y=0.5')
legend('الحل الفعلي', 'جاكوبي', 'غاوس-سيدل', 'CG',  
'ILU+CG')

```

5. كود حل المثال (5.2) بالطرق التكرارية (PCGM, CGM, GSM, JM)

```

%% مقارنة طرق الحل: جاكوبي، جاوس-سايدل، والتدرج المترافق مع ILU
clear; clc;

% --- بالفروق المركزية B والمتجه A بناء المصفوفة 1. ---
h = 0.05; L = 1; x = 0:h:L; n = length(x); N = n*n;
A = zeros(N, N); B = zeros(N, 1);

for j = 1:n
    for i = 1:n
        k = (j-1)*n + i;
        A(k, k) = -4;
        % (نيومان مركزي) اتجاه X
        if i == 1
            A(k, k+1)=2; B(k)=B(k)-2*h*x(j);
        elseif i == n
            A(k, k-1)=2; B(k)=B(k)-2*h*x(j);
        else
            A(k, k-1)=1; A(k, k+1)=1;
        end
        % (نيومان مركزي) اتجاه Y
        if j == 1
            A(k, k+n)=2; B(k)=B(k)-2*h*x(i);
        elseif j == n

```

```

        A(k,k-n)=2; B(k)=B(k)-2*h*x(i);
    else
        A(k,k-n)=1; A(k,k+n)=1;
    end
end
end
% تثبيت المرجعية
A(1,:) = 0; A(1,1) = 1; B(1) = 0;

% --- إعدادات المقارنة ---
tol = 1e-6;
max_iter = 200000;
u_init = zeros(N, 1);

%% 1. طريقة جاكوبي (Jacobi)
u_jac = u_init; iter_jac = 0;
D = diag(diag(A));
R = A - D;
for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (B - R * u_jac);
    if norm(u_new - u_jac, inf) < tol
        iter_jac = iter; break;
    end
    u_jac = u_new;
end

%% 2. طريقة جاوس-سايدل (Gauss-Seidel)
u_gs = u_init; iter_gs = 0;
L_mat = tril(A); % الجزء السفلي متضمناً القطر
U_mat = A - L_mat;
for iter = 1:max_iter
    u_new = L_mat \ (B - U_mat * u_gs);
    if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
        iter_gs = iter; break;
    end
    u_gs = u_new;
end

%% 3. طريقة التدرج المترافق (Conjugate Gradient) مع ILU
setup.type = 'ilutp'; % نوع التحليل
setup.droptol = 1e-6; % عتبة الإسقاط
[L,U] = ilu(sparse(-A), setup); % التحليل ILU

[u_cg, ~, ~, iter_cg] = pcg(-A, -B, tol, max_iter, L, U);

% --- الحل الفعلي (Direct Solve) ---
u_exact = A\B;

% --- عرض النتائج والمقارنة ---
fprintf('النهائية: 2.% B(25) قيمة f\n', B(25));

```

```

fprintf('-----\n');
fprintf('%-25s | %-15s\n', 'الطريقة المستخدمة', 'عدد التكرارات');
fprintf('-----\n');
fprintf('%-25s | %-15d\n', 'جاكوبي (Jacobi)', iter_jac);
fprintf('%-25s | %-15d\n', 'جاوس-سايدل (Gauss-Seidel)', iter_gs);
fprintf('%-25s | %-15d\n', 'التدرج المترافق (CG+ILU)', iter_cg);
fprintf('-----\n');

%% --- الحلول النهائية ---
U_jac = reshape(u_jac, n, n); % حل جاكوبي
U_gs = reshape(u_gs, n, n); % حل جاوس-سايدل
U_cg = reshape(u_cg, n, n); % حل التدرج
% ILU المترافق مع
U_exact = reshape(u_exact, n, n); % الحل الفعلي
% (مباشر)

%% --- الرسم الثلاثي الأبعاد للحلول ---
[X,Y] = meshgrid(x, x);

figure;
subplot(2,2,1);
surf(X, Y, U_exact);
title('الحل الفعلي (Direct Solve)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');
grid on; shading interp; colormap jet;

subplot(2,2,2);
surf(X, Y, U_jac);
title('الحل التقريبي (Jacobi)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');
grid on; shading interp; colormap jet;

subplot(2,2,3);
surf(X, Y, U_gs);
title('الحل التقريبي (Gauss-Seidel)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');
grid on; shading interp; colormap jet;

subplot(2,2,4);
surf(X, Y, U_cg);
title('الحل التقريبي (CG+ILU)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');
grid on; shading interp; colormap jet;

%% --- مقارنة الحلول عند y = 0.5 ---

```

```

[~, idx_y] = min(abs(x - 0.5));

line_exact = U_exact(idx_y, :);
line_jac    = U_jac(idx_y, :);
line_gs     = U_gs(idx_y, :);
line_cg     = U_cg(idx_y, :);

figure;
plot(x, line_exact, 'k-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, line_jac, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
plot(x, line_gs, 'b-.', 'LineWidth', 1.5);
plot(x, line_cg, 'g:', 'LineWidth', 1.5);
legend('التدرج', 'جاوس-سايدل', 'جاكوبي', 'الحل الفعلي', 'المترافق');
xlabel('x'); ylabel('u(x,0.5)');
title('مقارنة الحلول عند y=0.5');
grid on;

%% --- مقارنة عدد التكرارات بالرسم البياني ---
methods = categorical({'Jacobi', 'Gauss-Seidel', 'CG+ILU'});
iters    = [iter_jac, iter_gs, iter_cg];

figure;
bar(methods, iters);
ylabel('عدد التكرارات');
title('التكرارات بين طرق الحل مقارنة عددا');
grid on;

%% --- مقارنة الفرق عن الحل الفعلي ---
err_jac = norm(u_jac - u_exact, inf);
err_gs  = norm(u_gs - u_exact, inf);
err_cg  = norm(u_cg - u_exact, inf);

fprintf('\nالفرق عن الحل الفعلي (Norm-Inf):\n');
fprintf('جاكوبي (Jacobi): %.6f\n', err_jac);
fprintf('جاوس-سايدل (Gauss-Seidel): %.6f\n', err_gs);
fprintf('التدرج المترافق (CG+ILU): %.6f\n', err_cg);

```

كود آخر

```

clear; clc;

% --- إعداد الشبكة ---
h = 0.25; L = 1; x = 0:h:L; n = length(x); N = n*n;
A = zeros(N, N); B = zeros(N, 1);

% --- B والمتجه A بناء مصفوفة النظام ---
for j = 1:n
    for i = 1:n

```

```

k = (j-1)*n + i;
A(k,k) = -4;

% شروط نيومان X اتجاه
if i == 1
    A(k,k+1) = 2;
    B(k) = B(k) - 2*h*(x(j)); % u_x(0,y)=y
elseif i == n
    A(k,k-1) = 2;
    B(k) = B(k) - 2*h*(x(j)); % u_x(1,y)=y
else
    A(k,k-1) = 1; A(k,k+1) = 1;
end

% شروط نيومان Y اتجاه
if j == 1
    A(k,k+n) = 2;
    B(k) = B(k) - 2*h*(x(i)); % u_y(x,0)=x
elseif j == n
    A(k,k-n) = 2;
    B(k) = B(k) - 2*h*(x(i)); % u_y(x,1)=x
else
    A(k,k-n) = 1; A(k,k+n) = 1;
end

% المصدر f(x,y)=0
B(k) = B(k) + 0;
end
end

% تثبيت المرجعية
A(1,:) = 0; A(1,1) = 1; B(1) = 0;

% --- إعدادات التكرار ---
tol = 1e-6; max_iter = 200000; u_init = zeros(N,1);

%% 1. جاكوبي
u_jac = u_init; iter_jac = 0;
D = diag(diag(A)); R = A - D;
for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (B - R*u_jac);
    if norm(u_new - u_jac, inf) < tol
        iter_jac = iter; break;
    end
    u_jac = u_new;
end

%% 2. جاوس-سايدل
u_gs = u_init; iter_gs = 0;
L_mat = tril(A); U_mat = A - L_mat;
for iter = 1:max_iter

```

```

    u_new = L_mat \ (B - U_mat*u_gs);
    if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
        iter_gs = iter; break;
    end
    u_gs = u_new;
end

%% 3. المترافق بدون شرط مسبق
AtA = A'*A; AtB = A'*B;
[u_cg_noPrec, ~, ~, iter_noPrec] = pcg(AtA, AtB, tol,
max_iter);

%% 4. المترافق مع ILU
setup.type = 'ilutp'; setup.droptol = 1e-6;
[L,U] = ilu(sparse(AtA), setup);
[u_cg_ILU, ~, ~, iter_ILU] = pcg(AtA, AtB, tol, max_iter,
L, U);

%% --- إعادة تشكيل الحلول ---
U_jac = reshape(u_jac, n, n)';
U_gs = reshape(u_gs, n, n)';
U_cg_noPrec = reshape(u_cg_noPrec, n, n)';
U_cg = reshape(u_cg_ILU, n, n)';

%% --- الحل التحليلي ---
[X,Y] = meshgrid(x,x);
U_analytical = X .* Y;

%% --- عرض عدد التكرارات لكل طريقة ---
fprintf('\nعدد التكرارات لكل طريقة:\n');
fprintf('جاكوبي (Jacobi): %d\n', iter_jac);
fprintf('جاوس-سايدل (Gauss-Seidel): %d\n', iter_gs);
fprintf('الترافق (بدون شرط مسبق CG): %d\n',
iter_noPrec);
fprintf('الترافق (CG+ILU): %d\n', iter_ILU);

%% --- رسم ثلاثي الأبعاد للحل العددي (مثلاً باستخدام جاوس-سايدل) ---
figure;
surf(X, Y, U_gs);
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');
title('الحل العددي باستخدام جاوس-سايدل');
shading interp; colorbar; grid on;

```

6. كود حل المثال (6.2) بالطرق التكرارية (PCGM , CGM , GSM , JM)

```

clear; clc;

% --- 1. إعداد الشبكة ---
h = 0.05; L = 1; x = 0:h:L; n = length(x); N = n*n;
A = zeros(N, N); B = zeros(N, 1);

% --- 2. والمتجه A بناء مصفوفة النظام ---
for j = 1:n
    for i = 1:n
        k = (j-1)*n + i;
        A(k,k) = -4; % القطر يبقى -4 دائماً

        % شروط نيومان X اتجاه
        if i == 1
            A(k,k+1) = 2; % u_x(0,y)=0 -->
            u(0,y)=u(2,y)
        elseif i == n
            A(k,k-1) = 2; % u_x(1,y)=y^2
            B(k) = B(k) - 2*h*(x(j)^2);
        else
            A(k,k-1) = 1; A(k,k+1) = 1;
        end

        % شروط نيومان Y اتجاه
        if j == 1
            A(k,k+n) = 2; % u_y(x,0)=0 -->
            u(x,0)=u(x,2)
        elseif j == n
            A(k,k-n) = 2; % u_y(x,1)=x^2
            B(k) = B(k) - 2*h*(x(i)^2);
        else
            A(k,k-n) = 1; A(k,k+n) = 1;
        end

        % الحد الأيمن (المصدر) f(x,y)=x^2+y^2
        B(k) = B(k) + h^2*(x(i)^2 + x(j)^2);
    end
end

% تثبيت المرجعية
A(1,:) = 0; A(1,1) = 1; B(1) = 0;

% --- إعدادات المقارنة ---
tol = 1e-6; max_iter = 200000; u_init = zeros(N,1);

%% 1. طريقة جاوس-سايدل (Gauss-Seidel)
u_gs = u_init; iter_gs = 0;
L_mat = tril(A); U_mat = A - L_mat;

```

```

for iter = 1:max_iter
    u_new = L_mat \ (B - U_mat*u_gs);
    if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
        iter_gs = iter; break;
    end
    u_gs = u_new;
end

%% --- الحل المباشر ---
u_exact = A\B;

%% --- إعادة تشكيل الحلول ---
U_gs = reshape(u_gs, n, n)';
U_exact = reshape(u_exact, n, n)';

%% --- الحل التحليلي ---
[X,Y] = meshgrid(x,x);
U_analytical = 0.5*(X.*Y).^2;

%% --- مقارنة الفرق عن الحل التحليلي ---
err_gs = norm(U_gs(:) - U_analytical(:), inf);
err_ex = norm(U_exact(:) - U_analytical(:), inf);

fprintf('عدد التكرارات بطريقة جاوس-سايدل: %d\n',
iter_gs);
fprintf('الفرق عن الحل التحليلي (Gauss-Seidel): %.6f\n',
err_gs);
fprintf('الفرق عن الحل التحليلي (Direct): %.6f\n',
err_ex);

%% --- رسم الحل العددي بطريقة جاوس-سايدل (ملون مع شبكة واضحة) ---
figure;
mesh(X,Y,U_gs,'EdgeColor','k'); % شبكة بخطوط سوداء واضحة
hold on;
surf(X,Y,U_gs,'FaceAlpha',0.7); % سطح ملون شبه شفاف
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');
shading interp; colormap parula; % ألوان أخف لظهور الشبكة
grid on;

%% --- رسم الحل التحليلي كسطح كامل وملون ---
figure;
surf(X,Y,U_analytical);
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');
shading interp; colormap jet; % سطح ملون ناعم
grid on;

```

```

clear; clc;

% --- إعداد الشبكة ---
h = 0.1; L = 1; x = 0:h:L; n = length(x); N = n*n;
A = zeros(N, N); B = zeros(N, 1);

% --- B والمتجه A بناء مصفوفة النظام ---
for j = 1:n
    for i = 1:n
        k = (j-1)*n + i;
        A(k,k) = -4;

        % (شروط نيومان) X اتجاه
        if i == 1
            A(k,k+1) = 2;
        elseif i == n
            A(k,k-1) = 2;
            B(k) = B(k) - 2*h*(x(j)^2);
        else
            A(k,k-1) = 1; A(k,k+1) = 1;
        end

        % (شروط نيومان) Y اتجاه
        if j == 1
            A(k,k+n) = 2;
        elseif j == n
            A(k,k-n) = 2;
            B(k) = B(k) - 2*h*(x(i)^2);
        else
            A(k,k-n) = 1; A(k,k+n) = 1;
        end

        % المصدر f(x,y)=x^2+y^2
        B(k) = B(k) + h^2*(x(i)^2 + x(j)^2);
    end
end

% تثبيت المرجعية
A(1,:) = 0; A(1,1) = 1; B(1) = 0;

% --- إعدادات التكرار ---
tol = 1e-6; max_iter = 200000; u_init = zeros(N,1);

%% 1. جاكوبي
u_jac = u_init; iter_jac = 0;
D = diag(diag(A)); R = A - D;
for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (B - R*u_jac);

```

```

        if norm(u_new - u_jac, inf) < tol
            iter_jac = iter; break;
        end
        u_jac = u_new;
    end

%% 2. جاوس-سايدل
u_gs = u_init; iter_gs = 0;
L_mat = tril(A); U_mat = A - L_mat;
for iter = 1:max_iter
    u_new = L_mat \ (B - U_mat*u_gs);
    if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
        iter_gs = iter; break;
    end
    u_gs = u_new;
end

%% 3. التدرج المترافق بدون شرط مسبق
AtA = A'*A; AtB = A'*B;
[u_cg_noPrec, ~, ~, iter_noPrec] = pcg(AtA, AtB, tol,
max_iter);

%% 4. ILU التدرج المترافق مع
setup.type = 'ilutp'; setup.droptol = 1e-6;
[L,U] = ilu(sparse(AtA), setup);
[u_cg_ILU, ~, ~, iter_ILU] = pcg(AtA, AtB, tol, max_iter,
L, U);

%% --- إعادة تشكيل الحلول ---
U_jac = reshape(u_jac, n, n)';
U_gs = reshape(u_gs, n, n)';
U_cg_noPrec = reshape(u_cg_noPrec, n, n)';
U_cg = reshape(u_cg_ILU, n, n)';

%% --- الحل التحليلي ---
[X,Y] = meshgrid(x,x);
U_analytical = 0.5*(X.*Y).^2;

%% --- عرض عدد التكرارات لكل طريقة ---
fprintf('\nعدد التكرارات لكل طريقة:\n');
fprintf('جاكوبي (Jacobi): %d\n', iter_jac);
fprintf('جاوس-سايدل (Gauss-Seidel): %d\n', iter_gs);
fprintf('التدرج المترافق (CG بدون شرط مسبق): %d\n',
iter_noPrec);
fprintf('التدرج المترافق (CG+ILU): %d\n', iter_ILU);

%% --- مقارنة الحل التحليلي مع الطرق التكرارية عند y =
0.5 ---
y_line = 0.5;
x_line = 0:0.01:1;
u_analytic_line = 0.5*(x_line.*y_line).^2;

```

```

[~, idx_y] = min(abs(x - y_line));

u_jac_line    = U_jac(idx_y, :);
u_gs_line     = U_gs(idx_y, :);
u_cg_noPrec_line = U_cg_noPrec(idx_y, :);
u_cg_line     = U_cg(idx_y, :);

figure;
plot(x_line, u_analytic_line, 'k-', 'LineWidth', 2); hold
on;
plot(x, u_jac_line, 'r*- ', 'LineWidth', 1.5);
plot(x, u_gs_line, 'gs-', 'LineWidth', 1.5);
plot(x, u_cg_noPrec_line, 'bd-', 'LineWidth', 1.5);
plot(x, u_cg_line, 'm^-', 'LineWidth', 1.5);

xlabel('x'); ylabel('u(x,0.5)');
title('مقارنة الحل التحليلي مع الطرق التكرارية عند y=0.5');
legend('الحل التحليلي u(x,y)=0.5(xy)^2', ...
       'جاكوبي (Jacobi)', ...
       'جاوس-سايدل (Gauss-Seidel)', ...
       '(بدون شرط مسبق CG) التدرج المترافق', ...
       '(CG+ILU) التدرج المترافق', ...
       'Location','Best');
grid on;

```

7. كود حل المثال (7.2) بالطرق التكرارية (PCGM, CGM, GSM, JM)

```

clear; clc;

% --- B والمتجه A بناء المصفوفة ---
h = 0.25;
x_points = 0.25:h:0.75;
y_points = 0:h:0.75;
nx_m = length(x_points);
ny_m = length(y_points);
N_red = nx_m * ny_m;

A = zeros(N_red, N_red);
B = zeros(N_red, 1);

for j = 1:ny_m
    y_val = y_points(j);
    for i = 1:nx_m
        x_val = x_points(i);
        k = (j-1)*nx_m + i;
        A(k,k) = -4;
    end
end

```

```

% الجيران في اتجاه x
if i > 1
    A(k, k-1) = 1;
else
    B(k) = B(k) - (-y_val);
end
if i < nx_m
    A(k, k+1) = 1;
else
    B(k) = B(k) - (1 - y_val);
end

% الجيران في اتجاه y
if j == 1
    A(k, k+nx_m) = 2;
    B(k) = B(k) + (2 * h * 1);
else
    A(k, k-nx_m) = 1;
    if j < ny_m
        A(k, k+nx_m) = 1;
    else
        B(k) = B(k) - (x_val - 1);
    end
end
end
end

% --- إعدادات التكرار ---
tol = 1e-6;
max_iter = 1000;
u_init = zeros(N_red,1);

%% 1. جاكوبي
u_jac = u_init; iter_jac = 0;
D = diag(diag(A));
R = A - D;
for iter = 1:max_iter
    u_new = D \ (B - R*u_jac);
    if norm(u_new - u_jac, inf) < tol
        iter_jac = iter; break;
    end
    u_jac = u_new;
end

%% 2. جاوس-سايدل
u_gs = u_init; iter_gs = 0;
L_mat = tril(A);
U_mat = A - L_mat;
for iter = 1:max_iter
    u_new = L_mat \ (B - U_mat*u_gs);

```

```

        if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
            iter_gs = iter; break;
        end
        u_gs = u_new;
    end

%% التدرج المترافق بدون شرط مسبق 3.
AtA = A'*A;
AtB = A'*B;
[u_cg_noPrec, flag_noPrec, relres_noPrec, iter_noPrec] =
pcg(AtA, AtB, tol, max_iter);

%% قوي ILU التدرج المترافق مع 4.
setup.type = 'ilutp';
setup.droptol = 1e-6;
[L,U] = ilu(sparse(AtA), setup);
[u_cg_ILU, flag_ILU, relres_ILU, iter_ILU] = pcg(AtA,
AtB, tol, max_iter, L, U);

%% --- عرض عدد التكرارات فقط في الـ Command Window ---
fprintf('\nعدد التكرارات لكل طريقة:\n');
fprintf('جاكوبي (Jacobi): %d\n', iter_jac);
fprintf('جاوس-سايدل (Gauss-Seidel): %d\n', iter_gs);
fprintf('بدون شرط مسبق (CG) التدرج المترافق: %d\n',
iter_noPrec);
fprintf('قوي (CG+ILU) التدرج المترافق: %d\n', iter_ILU);

%% --- إعادة تشكيل الحلول إلى مصفوفة ثنائية الأبعاد ---
[X,Y] = meshgrid(x_points, y_points);
U_jac = reshape(u_jac, nx_m, ny_m)';
U_gs = reshape(u_gs, nx_m, ny_m)';
U_cg_noPrec = reshape(u_cg_noPrec, nx_m, ny_m)';
U_cg = reshape(u_cg_ILU, nx_m, ny_m)';

%% --- الحل التحليلي u(x,y) = x - y ---
U_analytic = X - Y;

%% --- مقارنة الحل التحليلي مع الطرق التكرارية عند y =
0.75 ---
y_line = 0.75;
x_line = 0:0.01:1;
u_analytic_line = x_line - y_line;

% في الشبكة y=0.75 أقرب نقطة
 [~, idx_y] = min(abs(y_points - y_line));

u_jac_line = U_jac(idx_y, :);
u_gs_line = U_gs(idx_y, :);
u_cg_noPrec_line = U_cg_noPrec(idx_y, :);
u_cg_line = U_cg(idx_y, :);

```

```

% المقارنة رسم
figure;
plot(x_line, u_analytic_line, 'k-', 'LineWidth', 2); hold
on;
plot(x_points, u_jac_line, 'r*-', 'LineWidth', 1.5);
plot(x_points, u_gs_line, 'gs-', 'LineWidth', 1.5);
plot(x_points, u_cg_noPrec_line, 'bd-', 'LineWidth',
1.5);
plot(x_points, u_cg_line, 'm^-', 'LineWidth', 1.5);

xlabel('x'); ylabel('u(x,0.75)');
title('مقارنة الحل التحليلي مع الطرق التكرارية عند y=0.75');
legend('الحل التحليلي u(x,y)=x-y', ...
      'جاكوبي (Jacobi)', ...
      'جاوس-سايدل (Gauss-Seidel)', ...
      '(بدون شرط مسبق CG) التدرج المترافق', ...
      '(CG+ILU) التدرج المترافق', ...
      'Location','Best');
grid on;

```

8. كود حل المثال (8.2) بالطرق التكرارية (PCGM, CGM, GSM, JM)

```

clear; clc;

% --- إعدادات الشبكة 1. ---
h = 0.05;
x_points = h:h:1.0;
y_points = h:h:1;
nx = length(x_points);
ny = length(y_points);
N = nx * ny; % عقدة 12

A = zeros(N, N);
B = zeros(N, 1);

% --- B والمتجه A بناء المصفوفة 2. ---
for j = 1:ny
    y_val = y_points(j);
    for i = 1:nx
        k = (j-1)*nx + i;
        x_val = x_points(i);
        A(k,k) = -4;

        % اتجاه X
        if i == 1
            A(k, k+1) = 1;
            B(k) = B(k) - 0; % Dirichlet u(0,y)=0
        end
    end
end

```

```

elseif i < nx
    A(k, k-1) = 1; A(k, k+1) = 1;
else % Neumann عند x=1
    A(k, k-1) = 2;
    B(k) = B(k) - 2*h*exp(y_val);
end

% اتجاه Y
if j == 1
    B(k) = B(k) - x_val; % Dirichlet u(x,0)=x
    if i < nx, A(k, k+nx) = 1; end
elseif j == ny
    B(k) = B(k) - x_val*exp(1); % Dirichlet
u(x,1)=x*e
    A(k, k-nx) = 1;
else
    A(k, k-nx) = 1; A(k, k+nx) = 1;
end
B(k) = B(k) + h^2 * (x_val * exp(y_val)); %
المصدر f
end
end

% --- 3. الحلول التكرارية ---
tol = 1e-6; max_iter = 2000; u0 = zeros(N, 1);

% Jacobi
D = diag(diag(A)); R = A - D;
u_jac = u0; iter_jac = max_iter;
for it = 1:max_iter
    u_new = D \ (B - R*u_jac);
    if norm(u_new - u_jac, inf) < tol
        iter_jac = it; break;
    end
    u_jac = u_new;
end

% Gauss-Seidel
L_gs = tril(A); U_gs = A - L_gs;
u_gs = u0; iter_gs = max_iter;
for it = 1:max_iter
    u_new = L_gs \ (B - U_gs*u_gs);
    if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
        iter_gs = it; break;
    end
    u_gs = u_new;
end

% CG
AtA = A' * A; AtB = A' * B;
[u_cg, ~, ~, iter_cg] = pcg(AtA, AtB, tol, max_iter);

```

```

% CG + ILU
[L_ilu, U_ilu] = ilu(sparse(AtA));
[u_ilu, ~, ~, iter_ilu] = pcg(AtA, AtB, tol, max_iter,
L_ilu, U_ilu);

% --- 4. الحل التحليلي ---
u_exact = zeros(N,1);
for k=1:N
    c = mod(k-1, nx) + 1; r = ceil(k/nx);
    u_exact(k) = (c*h) * exp(r*h);
end

% --- 5. إعادة تشكيل الحلول للمصفوفة ---
U_exact = reshape(u_exact, nx, ny)';
U_jac    = reshape(u_jac,    nx, ny)';
U_gs     = reshape(u_gs,     nx, ny)';
U_cg     = reshape(u_cg,     nx, ny)';
U_ilu    = reshape(u_ilu,    nx, ny)';

[X,Y] = meshgrid(x_points, y_points);

% --- 6. رسومات السطح الملونة والملساء ---
figure;
surf(X,Y,U_exact);
shading interp; colormap jet; colorbar;
%title('سطح أملس ملون - الحل التحليلي (Exact Solution)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)'); grid on;

figure;
surf(X,Y,U_jac);
%shading interp; colormap parula; colorbar;
%title('سطح ملون - الحل بجاكوبي (Jacobi)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)'); grid on;

figure;
surf(X,Y,U_gs);
%shading interp; colormap hot; colorbar;
%title('سطح ملون - الحل بجاوس-سايدل (Gauss-Seidel)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)'); grid on;

figure;
surf(X,Y,U_cg);
%shading interp; colormap cool; colorbar;
%title('سطح ملون - الحل بالتدرج المترافق (CG)');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)'); grid on;

figure;
surf(X,Y,U_ilu);
%shading interp; colormap spring; colorbar;
%title('سطح ملون - ILU الحل بالتدرج المترافق مع');

```

```
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)'); grid on;
```

كود آخر

```
clear; clc;

% --- 1. إعدادات الشبكة ---
h = 0.25;
x_points = h:h:1.0;
y_points = h:h:1;
nx = length(x_points);
ny = length(y_points);
N = nx * ny; % عقدة 12

A = zeros(N, N);
B = zeros(N, 1);

% --- 2. والمتجه A بناء المصفوفة B ---
for j = 1:ny
    y_val = y_points(j);
    for i = 1:nx
        k = (j-1)*nx + i;
        x_val = x_points(i);
        A(k,k) = -4;

        % اتجاه X
        if i == 1
            A(k, k+1) = 1;
            B(k) = B(k) - 0; % Dirichlet u(0,y)=0
        elseif i < nx
            A(k, k-1) = 1; A(k, k+1) = 1;
        else % Neumann عند x=1
            A(k, k-1) = 2;
            B(k) = B(k) - 2*h*exp(y_val);
        end

        % اتجاه Y
        if j == 1
            B(k) = B(k) - x_val; % Dirichlet u(x,0)=x
            if i < nx, A(k, k+nx) = 1; end
        elseif j == ny
            B(k) = B(k) - x_val*exp(1); % Dirichlet
            u(x,1)=x*e
            A(k, k-nx) = 1;
        else
            A(k, k-nx) = 1; A(k, k+nx) = 1;
        end
        B(k) = B(k) + h^2 * (x_val * exp(y_val)); %
        f المصدر
    end
end
```

```

end

% --- 3. الحلول التكرارية ---
tol = 1e-6; max_iter = 2000; u0 = zeros(N, 1);

% Jacobi
D = diag(diag(A)); R = A - D;
u_jac = u0; iter_jac = max_iter;
for it = 1:max_iter
    u_new = D \ (B - R*u_jac);
    if norm(u_new - u_jac, inf) < tol
        iter_jac = it; break;
    end
    u_jac = u_new;
end

% Gauss-Seidel
L_gs = tril(A); U_gs = A - L_gs;
u_gs = u0; iter_gs = max_iter;
for it = 1:max_iter
    u_new = L_gs \ (B - U_gs*u_gs);
    if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
        iter_gs = it; break;
    end
    u_gs = u_new;
end

% CG
AtA = A' * A; AtB = A' * B;
[u_cg, ~, ~, iter_cg] = pcg(AtA, AtB, tol, max_iter);

% CG + ILU
[L_ilu, U_ilu] = ilu(sparse(AtA));
[u_ilu, ~, ~, iter_ilu] = pcg(AtA, AtB, tol, max_iter,
L_ilu, U_ilu);

% --- 4. الحل التحليلي ---
u_exact = zeros(N,1);
for k=1:N
    c = mod(k-1, nx) + 1; r = ceil(k/nx);
    u_exact(k) = (c*h) * exp(r*h);
end

% --- 5. إعادة تشكيل الحلول للمصفوفة ---
U_exact = reshape(u_exact, nx, ny)';
U_jac    = reshape(u_jac,    nx, ny)';
U_gs     = reshape(u_gs,     nx, ny)';
U_cg     = reshape(u_cg,     nx, ny)';
U_ilu    = reshape(u_ilu,    nx, ny)';

[X,Y] = meshgrid(x_points, y_points);

```

```

% --- 6. اختلاف مكان يظهر فيه y=0.75 اختيار الصف عند ---
[~, iy_target] = min(abs(y_points - 0.75));

exact_line = U_exact(iy_target,:);
jac_line    = U_jac(iy_target,:);
gs_line     = U_gs(iy_target,:);
cg_line     = U_cg(iy_target,:);
ilu_line    = U_ilu(iy_target,:);

% --- 7. رسم خط مقارنة بين الحل الفعلي والتقريبي ---
figure;
plot(x_points, exact_line, '-o','LineWidth',2);
hold on;
plot(x_points, jac_line, '--s','LineWidth',1.5);
plot(x_points, gs_line, '--d','LineWidth',1.5);
plot(x_points, cg_line, '--^','LineWidth',1.5);
plot(x_points, ilu_line, '--x','LineWidth',1.5);
legend('الحل الفعلي','Jacobi','Gauss-
Seidel','CG','CG+ILU','Location','best');
xlabel('x'); ylabel('u(x,y=0.75)');
title('مقارنة الحل الفعلي مع الحلول التقريبية عند
y=0.75');
grid on;

```

9. كود حل المثال (9.2) بالطرق التكرارية (PCGM, CGM, GSM, JM)

```

clear; clc;

% --- 1. إعدادات الشبكة ---
h = 0.05;
x_points = h:h:1.0;
y_points = h:h:0.75;
nx = length(x_points); ny = length(y_points); N = nx *
ny;

A = zeros(N, N); B = zeros(N, 1);

% --- 2. بناء المنظومة (A و B) ---
for j = 1:ny
    y_val = y_points(j);
    for i = 1:nx
        k = (j-1)*nx + i; x_val = x_points(i);
        A(k,k) = 65;

        if i == 1
            if nx > 1, A(k, k+1) = -16; end
            B(k) = B(k) + 16 * y_val;
        elseif i < nx
            A(k, k-1) = -16; A(k, k+1) = -16;
        end
    end
end

```

```

else
    A(k, k-1) = -32; B(k) = B(k) + 8;
end

if j == 1
    B(k) = B(k) + 16 * x_val;
    if ny > 1, A(k, k+nx) = -16; end
elseif j == ny
    B(k) = B(k) + 16 * (x_val + 1);
    A(k, k-nx) = -16;
else
    A(k, k-nx) = -16; A(k, k+nx) = -16;
end
B(k) = B(k) + (x_val + y_val);
end
end

A_sparse = sparse((A + A') / 2);

% --- 3. الحل ---
tol = 1e-7; max_iter = 5000; u0 = zeros(N,1);

% Jacobi
D_jac = diag(diag(A_sparse)); R_jac = A_sparse - D_jac;
u_jac = u0; iter_jac = max_iter;
for it = 1:max_iter
    u_new = D_jac \ (B - R_jac * u_jac);
    if norm(u_new - u_jac, inf) < tol
        iter_jac = it; break;
    end
    u_jac = u_new;
end

% Gauss-Seidel
L_gs = tril(A_sparse); U_gs = A_sparse - L_gs;
u_gs = u0; iter_gs = max_iter;
for it = 1:max_iter
    u_new = L_gs \ (B - U_gs * u_gs);
    if norm(u_new - u_gs, inf) < tol
        iter_gs = it; break;
    end
    u_gs = u_new;
end

% CG
[u_cg, ~, ~, iter_cg] = pcg(A_sparse, B, tol, max_iter);

% PCG + ILU
[L_ilu, U_ilu] = ilu(A_sparse, struct('type','nofill'));
[u_ilu, ~, ~, iter_ilu] = pcg(A_sparse, B, tol, max_iter,
L_ilu, U_ilu);

```

```

% --- 4. الحل التحليلي u(x,y)=x+y ---
u_exact = zeros(N,1);
for k=1:N
    c = mod(k-1, nx) + 1;
    r = ceil(k/nx);
    u_exact(k) = (c*h) + (r*h);
end

% --- 5. إعادة تشكيل الحلول ---
U_exact = reshape(u_exact, [nx, ny]);
U_jac    = reshape(u_jac,   [nx, ny]);
U_gs     = reshape(u_gs,    [nx, ny]);
U_cg     = reshape(u_cg,    [nx, ny]);
U_ilu    = reshape(u_ilu,   [nx, ny]);

[X,Y] = meshgrid(x_points, y_points);

% --- 6. رسم السطوح ---

figure; surf(X,Y,U_jac);
title('الحل العددي بطريقة Jacobi'); xlabel('x');
ylabel('y'); zlabel('u'); grid on;

figure; surf(X,Y,U_gs);
title('الحل العددي بطريقة Gauss-Seidel'); xlabel('x');
ylabel('y'); zlabel('u'); grid on;

figure; surf(X,Y,U_cg);
title('الحل العددي بطريقة CG'); xlabel('x'); ylabel('y');
zlabel('u'); grid on;

figure; surf(X,Y,U_ilu);
title('الحل العددي بطريقة PCG+ILU'); xlabel('x');
ylabel('y'); zlabel('u'); grid on;

% --- 7. مقارنة خطية عند y=0.75 ---
[~, j_slice] = min(abs(y_points - 0.75));
exact_line = U_exact(j_slice,:);
jac_line    = U_jac(j_slice,:);
gs_line     = U_gs(j_slice,:);
cg_line     = U_cg(j_slice,:);
ilu_line    = U_ilu(j_slice,:);

figure;
plot(x_points, exact_line, '-o','LineWidth',2);
hold on;
plot(x_points, jac_line, '--s','LineWidth',1.5);
plot(x_points, gs_line, '--d','LineWidth',1.5);
plot(x_points, cg_line, '--^','LineWidth',1.5);
plot(x_points, ilu_line, '--x','LineWidth',1.5);

```

```

legend('الحل التحليلي','Jacobi','Gauss-
Seidel','CG','PCG+ILU','Location','best');
xlabel('x'); ylabel('u(x,y=0.75)');
title('مقارنة الحل التحليلي مع الحلول التكرارية عند
y=0.75');
grid on;

% --- عرض عدد التكرارات 8. ---
fprintf('عدد التكرارات لكل طريقة:\n');
fprintf('Jacobi: %d\n', iter_jac);
fprintf('Gauss-Seidel: %d\n', iter_gs);
fprintf('CG: %d\n', iter_cg);
fprintf('PCG+ILU: %d\n', iter_ilu);

```

Abstract

In this thesis we will study and apply some numerical methods to solve some important elliptic partial differential equations, like the Laplace equation, Poisson equation, and the Helmholtz equation.

By applying the Finite Difference Method (FDM) to elliptic equations, the problem is discretized and transformed to linear equations systems.

To solve these linear systems, we use some iterative methods, like Jacobi Method (JM), the Gauss–Seidel Method (GSM), and the Conjugate Gradient Method (CGM), and the Preconditioned Conjugate Gradient Method (PCGM).

We will compare the results of these methods and determine which approach achieves the fastest convergence toward the approximate solution.



Al-Asmarya Islamic University

Faculty of Science

Department of Mathematics

Applying Some Numerical Methods On Linear Systems Obtained From Solving Elliptic Equations

Hana Faraj Abdualslam Aboufardah

Supervised by:

Prof. Omar Ali Aleyan

**Thesis Was Submitted in Partial Fulfillment of The
Requirements for The Degree of Master in Mathematics**

Date (2026 -2025)

