



الجامعة الأسمرية الإسلامية

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة بعض الطرق العددية للمعادلات التفاضلية العادية غير الخطية من الرتبة الثانية

فاطمة أحمد مفتاح أبو سنينة

إشراف

أ.د. عمر علي العيان

قدمت هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات الإجازة العالية (الماجستير) في العلوم
التطبيقية بقسم الرياضيات بكلية العلوم بالجامعة الأسمرية الإسلامية

العام الجامعي (2025 - 2026)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ)

(سورة آل عمران، الآية 190)

الإهداء

يا من منحنتي اسمك لأفتخر به، وغرست في الطموح لأصل به إليك يا من كنت السند الذي لا
يميل

والدي العزيز ...

إلي الزهرة التي لا تدبل ..نبع الحنان .. التي ساندتني ووقفت إلي جانبي حتي وصلت هذه
المرحلة من التقدم والنجاح ..إلي من تعجز الكلمات عن وصفها وتسكن أمواج البحر لسماع
اسمها

والدتي الغالية ...

إلي رفيق الدرب .و سر نجاحي.. الذي تحمل معي عناء هذه الرحلة وكان لي خير عون في
درب العلم

زوجي

إلي ضلعي الثابت وأمان أيامي إلى من شددت عضدي بهم فكانوا لي ينابيع أرتوي منها إلى خيرة
أيامي

إلي أخوتي و أخواتي

لكل من كان عوناً وسنداً في هذا الطريق للأصدقاء الأوفياء ورفقاء السنين

إلي أصدقائي ..

أهديكم هذا الإنجاز وثمره نجاحي الذي لطالما تمنيته ها أنا اليوم أكملت وأتممت أول ثمرته
بفضله سبحانه وتعالى فالحمد لله على ما وهبني

شكر وتقدير

الحمد لله حمداً كثيراً طيباً مباركاً فيه كما ينبغي لجلال وجهه وعظيم سلطانه والصلاة والسلام
علي نبينا محمد وعلي آله وصحبه أجمعين

أتقدم بعظيم الشكر والامتنان ويطيب لي أن أرفع أسمى آيات الشكر والتقدير إلي الأستاذ الفاضل

أ. د. عمر علي العيان

الذي تفضل بالإشراف علي هذه الرسالة ،لقد كانت توجيهاته العلمية الدقيقة ونظرته الثاقبة وسعة
صدره الأثر البالغ في تقويم مسار هذه الرسالة فجزاه الله عني خير جزاء

كما أتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلي السادة الأفاضل أعضاء لجنة المناقشة الذين تفضلوا بقبول
قراءة هذه الرسالة ومناقشتها ، إن ملاحظاتكم العلمية ستكون بلا شك وساماً يزين هذا العمل.

المحتويات

فهرس الجداول	ج.....
فهرس الأشكال	ي.....
قائمة مصطلحات	ك.....
قائمة الاختصارات	ل.....
مقدمة	1.....
الفصل الأول (المفاهيم الأساسية)	
1.1 مقدمة	4.....
2.1 مفاهيم أساسية	4.....
3.1 نظريات هامة	6.....
4.1 الأخطاء	7.....
5.1 متسلسلة تايلور	8.....
الفصل الثاني (الطرق العددية)	
1.2 مقدمة	12.....
2.2 طريقة الفروق المنتهية	12.....
3.2 الطرق التكرارية	13.....
1.3.2 طريقة النقطة الثابتة	13.....
2.3.2 طريقة نيوتن	33.....
الفصل الثالث (مقارنة الطرق التكرارية)	
1.3 مقدمة	56.....
2.3 مقارنات	56.....
3.3 مناقشة النتائج	72.....
4.3 مقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن	72.....
الخلاصة	73.....
التوصيات	74.....
المراجع	75.....
Abstract	97

فهرس الجداول

[illegible]

55.....	الجدول (29.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي، للمثال (10.2)، $h=0.1$
56.....	الجدول (30.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي، للمثال (10.2)، $h=0.05$
59.....	الجدول (31.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي، للمثال (11.2)، $h=0.25$
60.....	الجدول (32.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي، للمثال (12.2)، $h=0.25$
61.....	الجدول (33.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي، للمثال (12.2)، $h=0.1$
62.....	الجدول (34.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي، للمثال (12.2)، $h=0.05$
65.....	الجدول (1.3) يوضح المقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن للمثال (1.2) و(7.2)
66.....	الجدول (2.3) يوضح المقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن للمثالين (2.2) و(8.2)
67.....	الجدول (3.3) يوضح المقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن للمثال (6.2) و(12.2)
68.....	الجدول (4.3) يوضح المقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن للمثال (3.2) و(9.2)
69.....	الجدول (5.3) يوضح المقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن للمثال (4.2) و(10.2)
70.....	الجدول (6.3) يوضح المقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن للمثال (5.2) و(11.2)
72.....	الجدول (7.3) يوضح المقارنة بين طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن

فهرس الأشكال

[illegible]

70.....	الشكل (13.3) يوضح المقارنة بين الحلول للمثال (5.2) ، $h=0.25$
70.....	الشكل (14.3) يوضح المقارنة بين الحلول للمثال (5.2) ، $h=0.1$
70.....	الشكل (15.3) يوضح المقارنة بين الحلول للمثال (5.2) ، $h=0.05$
71.....	الشكل (16.3) يوضح المقارنة بين الحلول للمثال (6.2) ، $h=0.25$

قائمة المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات العلمية التي وردت في هذه الرسالة مرتبة وفق حروف الهجاء العربية

(أ)

Absolute error	الخطأ المطلق
Relative error	الخطأ النسبي

(ت)

Forward differences approximation	تقريب الفروق الأمامية
Back differences approximation	تقريب الفروق الخلفية
Central differences approximation	تقريب الفروق المركزية

(خ)

Linear	خطي
--------	-----

(ش)

Dirichlet boundary conditions	شروط دريشليت الحدودية
Robin boundary conditions	شروط روبين الحدودية
Neumann boundary conditions	شروط نيومان الحدودية

(ط)

Finite differences method	طريقة الفروق المنتهية
Fixed point method	طريقة النقطة الثابتة
Newton's method	طريقة نيوتن

(م)

Taylor series	متسلسلة تايلور
Maclaurin series	متسلسلة ماكلورين
Partial differential equation	معادلات تفاضلية جزئية
Ordinary differential equation	معادلات تفاضلية عادية

قائمة الاختصارات

Abbreviation	Meaning
BC	Boundary Condition
ODE	Ordinary Differential Equation
PDE	Partial Differential Equation
FDM	Finite Difference Method
IVP	Initial Value Problem
BVP	Boundary Value Problem

المخلص

تُعنى هذه الدراسة بمعالجة مسائل القيم الحدية (BVP) Boundary Value Problems المتعلقة بالمعادلات التفاضلية العادية غير الخطية من الرتبة الثانية. وتستند المنهجية المتبعة في البحث إلى تحويل هذه المسائل إلى أنظمة من المعادلات الجبرية غير الخطية، وذلك باستخدام "طريقة الفروق المحدودة (FDM) Finite Difference Method.

درسنا في هذه الرسالة طريقتان لحل الأنظمة الجبرية غير الخطية طريقة النقطة الثابتة Fixed Point's Method (FPM) و طريقة نيوتن Newton's Method (NM). كما تهدف الدراسة إلى إجراء تحليل مقارنة بين النتائج العددية المستخلصة والحلول التحليلية الدقيقة، بالإضافة إلى تقييم كفاءة الخوارزميتين التكراريتين المستخدمتين، استناداً إلى معايير دقة النتائج وسرعة التقارب.

المقدمة

تشكل المعادلات التفاضلية عنصراً أساسياً في مختلف فروع العلوم، حيث تُستخدم في بناء النماذج الرياضية للظواهر الفيزيائية والهندسية وغيرها من العلوم ففي النظريات الكلاسيكية، كانت المعادلات التفاضلية في الغالب خطية، غير أن التطور العلمي الحديث كشف أن العديد من الظواهر لا يمكن تفسيرها بالمعادلات الخطية وحدها، مما جعل الاعتماد على المعادلات التفاضلية غير الخطية أمراً ضرورياً للحصول على معلومات دقيقة. وقد نتج عن ذلك حاجة متزايدة إلى طرق عددية وتقريبية فعالة وموثوقة لحل هذه المعادلات، نظراً لصعوبة إيجاد حلولها التحليلية المباشرة. (Salih og AL-Jawary, 2023). نتصّف مسائل المعادلات التفاضلية وفقاً للشروط المصاحبة لها، فإذا كانت الشروط معطاة عند نقطة واحدة من المتغير المستقل فإنها تُعرف بمسائل القيم الابتدائية Initial Value Problem (IVP)، أما إذا كانت الشروط معطاة عند أكثر من نقطة فإنها تُسمى مسائل القيم الحدية Boundary Value Problem (BVP) (Endeshaw, 2019) وتُعد مسائل القيم الحدية ذات النقطتين من أكثر المسائل شيوعاً في الرياضيات التطبيقية والفيزياء النظرية والهندسة ونظرية التحكم والتحسين، وغالباً لا يمكن إيجاد حلولها التحليلية مما يستدعي استخدام الطرق العددية. ومن بين هذه الطرق طريقة الفروق المنتهية وهي من أقدم الطرق وأبسطها وتعود الجذور التاريخية لهذه الطريقة إلى القرن الثامن عشر حيث وضع اللبنة الأولى لها علم الرياضيات السويسري الشهير لينارد أولير (Leonhard Euler) في عام 1768 م، وذلك على تطبيقها على المسائل ذات البعد الواحد، ومع تطور الرياضيات التطبيقية شهدت الطريقة توسعاً ملحوظاً ليشمل الأبعاد الثنائية في الفراغ بفضل الإسهامات الجوهرية التي قدمها العالم الألماني كارل ديفيد تولمي رانغ (Cari David Tolme Runge) في عام 1908 م على الرغم من ظهور منهجيات عددية بديلة إلا أن طريقة الفروق المنتهية لا تزال تحتفظ بمكانتها كأداة لا غنى عنها في الأبحاث العلمية والتطبيقات الهندسية الحديثة. (جبر، 2020).

وكما تمت دراسة طريقة التصويب (Shooting Method) في حل المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية من الرتبة الثانية (Ha, 2001) وقد طوّر الباحثون العديد من الأساليب التحليلية والتقريبية لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية، مثل طريقة الاضطراب الهوموتوبي (Homotopy Perturbation Method) (Hasan & Sulaiman, 2020)، طريقة التحليل الهوموتوبي (Homotopy Analysis Method) (Fadugba, 2020)، طريقة تحليل آدومين (Adomian Decomposition Method) (Ateeah, 2017)، طريقة التكرار التبايني (He og Latifzadeh, 2020) Variational Iteration Method) وطريقة التكرار التبايني باستخدام تحويل لابلاس (He-Laplace Variational Iteration Method) (Hasan og Sulaiman, 2020).

كما درست مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية الخطية باستخدام طريقة الفروق المحدودة (Finite Difference Method) في تحليل هذه الفئة من المسائل، وقد أثبتت هذه الطريقة فعاليتها في تقريب الحلول الدقيقة للمعادلات الخطية ذات الشروط الحدية وأسهمت في تطوير نماذج رياضية يمكن التعامل معها برمجياً بصورة مبسطة وموثوقة (Endeshaw, 2019) ومع ذلك، فإن التركيز على المعادلات الخطية لا يغطي التعقيد الحقيقي للعديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية، إذ إن هذه الظواهر غالباً ما تُصاغ رياضياً في صورة

معادلات تفاضلية غير خطية يصعب حلها تحليليًا. ومن هنا تنبع أهمية هذا البحث، الذي يسعى إلى توسيع نطاق تطبيق طريقة الفروق المحدودة لتشمل مسائل القيم الحدية غير الخطية، وذلك بهدف تطوير منهج عددي فعال قادر على التعامل مع هذه الفئة الأكثر تعقيدًا من المسائل، والتي تظهر بكثرة في النماذج الرياضية للعلوم التطبيقية والهندسية.

وفي هذه الرسالة درسنا حل المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية من الرتبة الثانية بطرق العددية وقسمت هذه الرسالة في ثلاثة فصول وفق الآتي:

الفصل الأول: عرضنا في هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية من تعريفات ونظريات الهامة.

الفصل الثاني: قمنا بحل المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية ببعض الطرق العددية وقارنا الحل التحليلي مع الحل التقريبي .

الفصل الثالث: عملنا علي مقارنة النتائج المتحصل عليها بالطرق التكرارية (طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن) بواسطة برنامج المتلاب .

الفصل الأول

المفاهيم الأساسية

Fundamental Concepts

Introduction

1.1 مقدمة

سننظر في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم الأساسية من تعريفات للمعادلات التفاضلية العادية وبعض النظريات المهمة في التحليل العددي

Fundamental Concepts

2.1. بعض المفاهيم الأساسية :

1.2.1. تعريف

تعرف المعادلة التفاضلية Differential Equation على أنها علاقة رياضية تربط دالة مجهولة بمتغير واحد أو أكثر و تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر لهذه الدالة بالنسبة لتلك المتغيرات و تصنف المعادلات التفاضلية إلى نوعين رئيسيين بناءً على عدد المتغيرات المستقلة هما إذا كانت المعادلة التفاضلية في متغير مستقل واحد ومشتقاته فإنها تسمى معادلات تفاضلية عادية Ordinary Differential Equation و إذا كانت المعادلة التفاضلية في أكثر من متغير مستقل فإنها تسمى معادلات تفاضلية جزئية Partial Differential Equation (البكور، 2019)

2.2.1. تعريف

المعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential Equation [ODE] معادلة تعتمد على متغير مستقل واحد أي لها مشتقات من متغير واحد .

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية العادية الخطية

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

حيث أن $a_n(x), \dots, a_0(x), f(x)$ دوال في x (McOwen, 2004)

و تعرف المعادلة التفاضلية العادية غير الخطية عندما نجد في المعادلة

$$1- \text{ قوى } y \text{ أو مشتقاتها مثل } ((y')^3, y^2)$$

$$2- \text{ دوال غير خطية لـ } y \text{ أو لمشتقاتها مثل } (\sin y, e^{y'})$$

$$3- \text{ ضرب الدالة في مشتقتها مثل } (yy')$$

3.2.1. تعريف

المعادلات التفاضلية الجزئية Partial Differential Equation [PDF] هي العلاقة بين الدالة المجهولة و

$$\text{المشتقات الجزئية لهذه الدالة } U_{yy}, U_{xx}, U_y, U_x$$

والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية هي

$$F(x, y, \dots, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, \dots) = 0$$

حيث F دالة معرفة و x, y متغيرات مستقلة $U(x, y)$ متغير تابع (البكور، 2019)

4.2.1. تعريف

لتكن f دالة معرفة علي المجموعة $D \subset R^n$ حيث $f: R^n \rightarrow R$ و الدالة f بأن لها نهاية عند x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

إذا كان لأي عدد معطاه $\epsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث $0 < \|x - x_0\| < \delta$ فإن

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad \text{حيث } x \in D \quad (\text{Burden o.fl., 1997})$$

5.2.1. تعريف

لتكن f دالة من المجموعة $D \subset R^n$. الدالة f تكون متصلة أو مستمرة عند $x_0 \in D$ بشرط أن

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ موجودة و}$$

و f تكون متصلة علي المجموعة D إذا كانت f متصلة عند أي نقطة في D

ويرمز له بالرمز $f \in C(D)$ (Burden o.fl., 1997)

6.2.1. تعريف (الشروط الابتدائية و الشروط الحدية):

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطي بعض الشروط التي يجب أن تتحقق لحل المعادلات التفاضلية العادية يتم تحديد بعض الشروط الحدية بالقيم الأولية و النهائية للمتغير المستقل

- الشروط الابتدائية Initial conditions هي القيمة الأولى في نطاق الحل
- الشروط الحدودية Boundary conditions للمعادلات التفاضلية العادية

1- إذا أعطيت قيمة f علي الحدود فالمسألة تكون مسألة دريشليت (Dirichlet problem)

2- إذا أعطيت قيمة المشتقة عند أحد الحدود فتكون المسألة روبن (Robin problem)

3- إذا أعطيت المشتقة علي الحدود فإن المسألة تكون نيومان (Van-Neumann problem)

(Endeshaw, 2019)

7.2.1. تعريف

إذا كان f دالة ما ذات قيم حقيقية و $c \in R$ فإن العدد c يسمى جذر للدالة (Root of function) إذا كان

$$f(c) = 0$$

3.1. النظريات المهمة :

1.3.1. نظرية

لتكن f من $R^n \subset D$ إلى R و $x_0 \in D$ إذا وجد الثابتين $\delta > 0$ و $k > 0$ مع

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right| \leq k \quad \text{لكل } j = 1, 2, \dots, n \quad \text{أي } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{و } x \in D$$

فإن f تكون متصلة عند x_0 (Burden o.fl., 1997)

2.3.1. نظرية

لتكن $g(x) \in C[a, b] \rightarrow [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$ فإن يوجد نقطة ثابتة لدالة g في الفترة $[a, b]$

وكذلك $|g(x)'| < 1$ لكل $x \in (a, b)$

فإن النقطة الثابتة تكون وحيدة

3.3.1. نظرية

لتكن $g(x) \in C[a, b]$ لكل $x \in [a, b]$ ونفرض أن g' موجودة علي الفترة $[a, b]$ بحيث $|g(x)'| \leq \lambda$

$\lambda < 1$ لكل $x \in (a, b)$

إذا كانت x_0 أي عدد في الفترة $[a, b]$ فإن المتتالية المعرفة

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad \text{لكل } n \geq 1$$

تتقارب إلى النقطة الثابتة الوحيدة α في الفترة $[a, b]$

4.3.1. نظرية

إذا كانت g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة (2.3.1) و $x_0 \in [a, b]$

فإن المتتالية $x_n = g(x_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ تحقق

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| \quad n \geq 1$$

5.3.1. نظرية

لنفرض أن $g(x)$ و $g'(x)$ دالتان متصلتان $c < x < d$ و أن الفترة (c, d) تحتوي علي α

ونفرض $|g'(x)| < 1$

فإنه يوجد فترة $[a, b]$ حول النقطة الثابتة α التي تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة (2.3.1)

و $x_0 \in [a, b]$

فإن المتتالية $x_n = g(x_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ تتقارب إلى النقطة الثابتة α

و إذا كان $|g'(x)| > 1$ فإن هذه المتتالية تتباعد (السعيد، 1437)

6.3.1. نظرية

إذا كانت الدالة f في مسألة القيمة الحدية

$$y'' = f(x, y, y') \quad b \geq x \geq a$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

دالة متصلة على المجموعة

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

وكذلك $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ يكونان متصلان على D

إذا كان

$$-1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0 \quad \text{لكل } (x, y, y') \in D$$

2- يوجد ثابت M بحيث

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') \right| \leq M \quad \text{لكل } (x, y, y') \in D$$

فإن مسألة القيمة الحدية لها حل وحيد. (Burden o.fl., 1997)

ERRORS

4.1. الأخطاء

تلعب الأخطاء دوراً محورياً وهاماً في التحليل العددي وهي تبين مدى دقة و سرعة الطريقة المستخدمة في الحل . أنواع الأخطاء وهي

Absolute Error (AE)

1.4.1. الخطأ المطلق

يعرف علي أنه القيمة المطلقة للفرق بين قيمة الجذر الفعلي و قيمة الجذر التقريبي لتكن x_0 القيمة التقريبية للجذر الفعلي x ، فإن الخطأ المطلق يعرف بالصورة :

$$E = |x - x_0|$$

Relative Error(RE)

2.4.1. الخطأ النسبي

ويعرف علي أنه نسبة الخطأ المطلق إلي قيمة الجذر الفعلي لتكن x_0 القيمة التقريبية للجذر الفعلي x ، فإن الخطأ النسبي يعرف بالصورة :

$$E_r = \frac{|x - x_0|}{|x|}$$

(السعيد، 1437)

Taylor Series(TS)

5.1. متسلسلة تايلور

ليكن $f(x)$ دالة مستمرة قابلة للاشتقاق عند جوار $x = a$ نستطيع تقريب هذه الدالة إلي دالة كثيرة حدود علي شكل متسلسلة متقاربة تسمى متسلسلة تايلور *Taylor series* وتعطي بالصيغة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

أو بصيغة أخرى

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \dots$$

1.5.1 تعريف

في متسلسلة تايلور *Taylor series* إذا كانت $a = 0$ عندئذ تسمى المتسلسلة بمتسلسلة ماكلورين *Maclaurin series* التي تأخذ الصيغة العامة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$$

2.5.1 تعريف

الفروق الأمامي (Forward difference approximation) للمشتقة الأولى و يكون علي الصورة

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الإثبات :

مفكوك متسلسلة تايلور لدالة $f(x)$ عند نقطة تبعد مسافة صغيرة h

أي أن $f(x+h)$ يكون

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

بإعادة ترتيب الحدود

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \dots$$

و بإهمال بعض الحدود نتحصل علي

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (1.1)$$

وهو ما يعرف بالفروق الأمامية ،حيث $O(h)$ هو مقدار الخطأ و بإهمال هذا الخطأ فإننا نتحصل علي تقريب الفروق الأمامي (Forward difference approximation) للمشتقة الأولى و يكون علي الصورة

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3.5.1 تعريف

الفروق الخلفي (Backward difference approximation) للمشتقة الأولى و يكون علي الصورة

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

الإثبات

مفكوك متسلسلة تايلور لدالة $f(x)$ عند نقطة المجاورة تقع قبل النقطة بمسافة صغيرة $-h$ أي أن $f(x-h)$

يكون

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) - \dots$$

بإعادة ترتيب الحدود

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \dots$$

و بإهمال بعض الحدود نتحصل علي

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (2.1)$$

وهو ما يعرف بالفروق الخلفي، حيث $O(h)$ هو مقدار الخطأ و بإهمال هذا الخطأ فإننا نتحصل علي تقريب الفروق الخلفي (Backward difference approximation) للمشتقة الأولى و يكون علي الصورة

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

4.5.1 تعريف

المشتقة الأولى للفرق المركزي

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

المشتقة الثانية للفرق المركزي

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

الإثبات

مفكوك متسلسلة تايلور لدالة $f(x)$ عند النقطتين هما $f(x+h)$ و $f(x-h)$ علي التوالي

$$f(x_{i+1}) = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \rightarrow (3.1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x-h) = f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) - \dots \rightarrow (4.1)$$

بطرح المعادلتين (3.1) و (4.1) نتحصل علي

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

بإهمال بعض الحدود نتحصل علي

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h) \rightarrow (5.1)$$

وهو ما يعرف بالفروق المركزي، حيث $O(h)$ هو مقدار الخطأ و بإهمال هذا الخطأ فإننا نتحصل علي تقريب الفروق المركزي (Center difference approximation) للمشتقة الأولى و يكون علي الصورة

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

و للحصول علي المشتقة الثانية نقوم بجمع المعادلتين (3.1) و (4.1) نتحصل علي

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{4!} f^{(4)}(x) + \dots$$

بإهمال بعض الحدود نتحصل علي

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \rightarrow (6.1)$$

بإهمال الحدود من الدرجة الرابعة فما فوق بالنسبة ل h نجد أن

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

حيث $h \rightarrow 0$ كلما $O(h^2) \rightarrow 0$ (Aleyan, 2020)

الفصل الثاني

الطريقة العددية

Numerical Method

1.2 المقدمة

Introduction

تصاغ الكثير من الظواهر الطبيعية في هيئة معادلات تفاضلية معقدة يصعب استنباط حلولها التحليلية الدقيقة لذلك برزت أهمية الطرق العددية كبديل فعال و قوي لتجاوز عقبات الحلول التحليلية سندرس في هذا الفصل طريقة الفروق المنتهية

2.2 طريقة الفروق المنتهية

Finite Difference Method

تعتبر الفروق المنتهية (الأمامية – الخلفية – المركزية) من أكثر الأساليب العددية استخداماً في العلوم والهندسة وغيرها من العلوم لتقريب حلول المعادلات التفاضلية سواء كنا نمتلك حلاً تحليلياً أو لا

1.2.2 طريقة الفروق النهائية لمسائل القيم الحدية غير الخطية

Finite Difference Method for Nonlinear Boundary Value Problems

المعادلة التفاضلية العادية غير الخطية من الرتبة الثانية علي الصورة

$$f'' = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b$$

الشروط الحدية

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

نفرض أن f تحقق الشروط التالية

1. f و المشتقات الجزئية $f_y, f_{y'}$ تكون كلها متصلة علي

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

2. $f_y(x, y, y') \geq \delta > 0$ علي D لبعض $\delta > 0$

3. يوجد ثابتان بحيث

$$L = \max_{(x,y,y') \in D} |f_{y'}(x, y, y')|$$

$$K = \max_{(x,y,y') \in D} |f_y(x, y, y')|$$

من نظرية (6.3.1) أن الحل وحيد موجود نقسم الفترة $[a, b]$ إلي $N + 1$ فترات متساوية حيث تكون نقاط

نهايتها $x_i = a + ih$ حيث $i = 1, 2, \dots, N$

من المعادلتين التاليتين هي تطبيق الفروق المركزية علي المعادلات التفاضلية غير الخطية من الرتبة الثانية

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

نتحصل علي

$$\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} = f\left(x, y(x_i), \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}\right) + O(h^2)$$

لكل $i = 1, 2, \dots, N$ (Burden o.fl., 1997)

عند تطبيق طريقة (FDM) علي مسألة القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية غير الخطية من الرتبة الثانية فإننا نتحصل علي منظومة من المعادلات ولحل هذه المنظومة نستخدم الطرق التكرارية

Iterative Methods

3.2 الطرق التكرارية

وهي تقنية رياضية تبدأ بوضع قيمة تقديرية أولية للحل ، ثم تقوم بتكرار عملية حسابية محددة عدة مرات و في كل تكرار تصبح النتيجة أقرب إلي الحل الدقيق .

Fixed point Method

1.3.2 طريقة النقطة الثابتة

تعد النقطة الثابتة أحد الركائز الأساسية في التحليل العددي وهي تمثل استراتيجية تكرارية تهدف إلي إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التي يصعب حلها تحليليا بصورة مباشرة و تستخدم هذه الطريقة لحل نظام من المعادلات غير الخطية .

1.1.3.2 تعريف

الدالة G من $D \subset R^n$ إلي R^n لها نقطة ثابتة عند $p \in D$ إذا كانت $G(p) = p$ (Burden o.fl., 1997)

2.1.3.2 نظرية

لتكن $D = \{(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)^t \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$

لكل $i = 1, 2, 3 \dots n$

لبعض مجموعة من الثوابت

$$b_1, b_2, b_3 \dots b_n \text{ و } a_1, a_2, a_3 \dots a_n$$

نفرض أن G دالة متصلة من $D \subset R^n$ إلى R^n أي $G(x) \in D$ عند $x \in D$ فإن G لها نقطة ثابتة D ونفرض أن G لها مشتقات جزئية متصلة و

$$\left| \frac{\partial g_{i(x)}}{\partial x_j} \right| \leq \frac{k}{n}$$

حيث الثابت $1 < k$ لكل $j = 1, 2, 3, \dots, n$

وكل مركبات g_i موجودة فإن المتسلسلة $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ معرفة بواسطة القيمة الاختيارية $x^{(0)}$ في D والمولدة بواسطة

$$x^k = G(x^{(k-1)}) \quad \text{لكل } k \geq 1$$

تكون متقاربة إلى النقطة الثابتة الوحيدة $p \in D$

أي

$$\|x^{(k)} - p\|_{\infty} \leq \frac{k^k}{1-k} \|x^1 - x^0\|_{\infty}$$

(Burden o.fl., 1997)

مثال (1.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = 2e^{-2y}(1 - x^2)$$

و الشروط الحدية

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \ln(2) \quad \text{حيث } h = 0.25$$

علما بأن الحل التحليلي هو

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل على

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 \left(2e^{-2y}(1 - x_i^2) \right)$$

و بالتعويض عن قيم $i = 1, 2, 3$

نتحصل علي منظومة من المعادلات غير الخطية

$$y_2 - 2y_1 - 0.11719e^{(-2y_1)} = 0 \rightarrow (1)$$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 - 0.09375e^{-2y_2} = 0 \rightarrow (2)$$

$$\ln 2 - 2y_3 + y_2 - 0.05469e^{-2y_3} = 0 \rightarrow (3)$$

سنقوم بحل هذه المنظومة من المعادلات بطريقة النقطة الثابتة

و الجدول (1.2) يبين القيم التقريبية للمتال (1.2)

y_3	y_2	y_1	عدد التكرارات
0.3192	-0.0469	-0.0586	1
0.3087	0.0788	-0.0893	2
0.3712	0.1537	-0.0306	3
0.4104	0.1358	0.0146	4
0.4025	0.1768	0.0110	5
0.4227	0.1738	0.0311	6
0.4217	0.1938	0.0318	7
0.4317	0.1950	0.0419	8
0.4325	0.2051	0.0436	9
0.4376	0.2070	0.0488	10
0.4387	0.2122	0.0503	11
0.4413	0.2138	0.0531	12
0.4422	0.2167	0.0542	13
0.4436	0.2178	0.0558	14
0.4442	0.2194	0.0565	15
0.4450	0.2201	0.0573	16
0.4454	0.2210	0.0578	17
0.4459	0.2215	0.0583	18
0.4461	0.2220	0.0586	19
0.4464	0.2228	0.0588	20
0.4468	0.2226	0.0593	21
0.4467	0.2230	0.0592	22
0.4469	0.2229	0.0595	23
0.4469	0.2232	0.0594	24
0.4470	0.2231	0.0596	25
0.4470	0.2233	0.0596	26
0.4470	0.2233	0.0596	27
0.4470	0.2233	0.0596	28

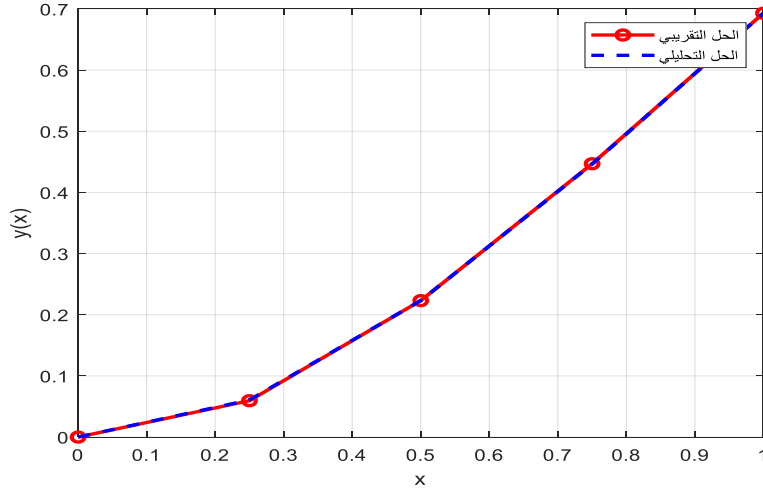
الجدول (2.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0	0	0	0	0

1.1×10^{-3}	0.0606	0.0595	0.25	1
2×10^{-4}	0.2232	0.2234	0.5	2
3.3×10^{-3}	0.4463	0.4469	0.75	3
0	0.6931	0.6931	1	4

حيث y_i هو الحل التقريبي بطريقة النقطة الثابتة ، w_i هو الحل التحليلي

في هذا المثال توصلنا إلى الحل التقريبي عندما $h = 0.25$ بعد تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية

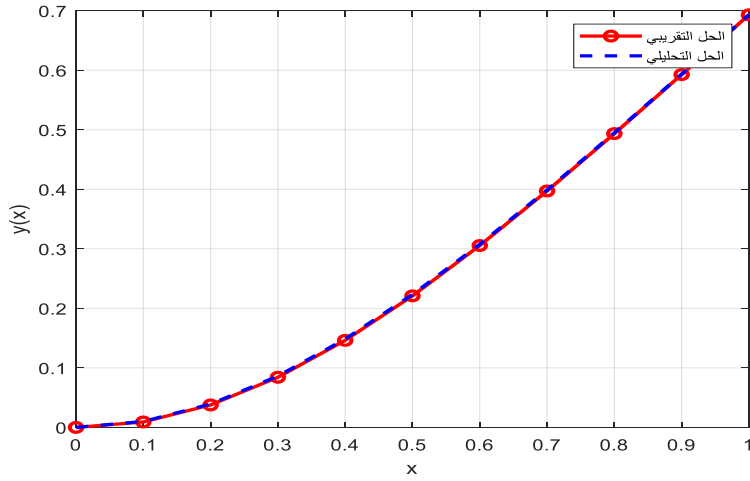


الشكل (1.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

و الجدول (3.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي للمثال (1.2) عندما $h = 0.1$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0	0	0	0	0
8×10^{-4}	0.0100	0.0091	0.1	1
1.5×10^{-3}	0.0392	0.0377	0.2	2
2×10^{-3}	0.0862	0.0842	0.3	3
2.1×10^{-3}	0.1484	0.1463	0.4	4
2.1×10^{-3}	0.2231	0.2210	0.5	5
1.9×10^{-3}	0.3075	0.3056	0.6	6
1.6×10^{-3}	0.3988	0.3972	0.7	7
1.1×10^{-3}	0.4947	0.4936	0.8	8
5×10^{-4}	0.5933	0.5928	0.9	9
0	0.6931	0.6931	1	10

من خلال الجدول السابق توصلنا إلى الحل بعد 126 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية

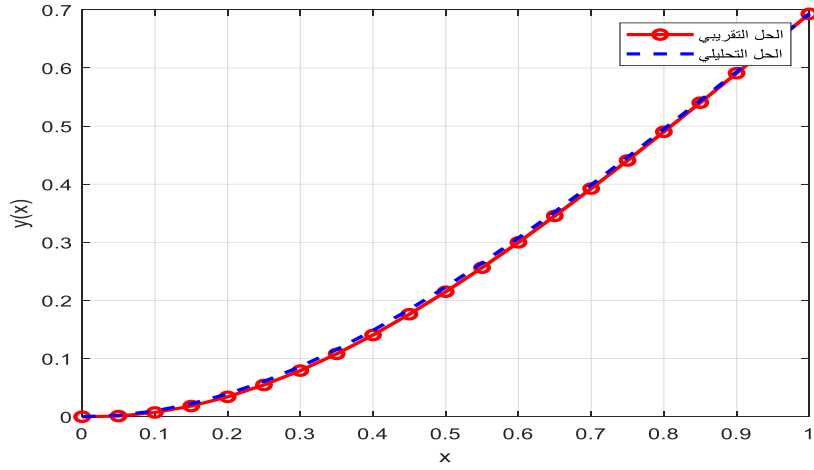


الشكل (2.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

و الجدول (4.2) التالي يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (1.2) عندما $h = 0.05$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0	0	0	0	0
1.4×10^{-3}	0.0025	0.0011	0.05	1
2.7×10^{-3}	0.0100	0.0073	0.10	2
4×10^{-3}	0.0223	0.0183	0.15	3
5×10^{-3}	0.0392	0.0342	0.20	4
6×10^{-3}	0.0606	0.0546	0.25	5
6.8×10^{-3}	0.0862	0.0794	0.30	6
7.5×10^{-3}	0.1156	0.1081	0.35	7
7.8×10^{-3}	0.1484	0.1406	0.40	8
8×10^{-3}	0.1844	0.1764	0.45	9
8×10^{-3}	0.2231	0.2151	0.50	10
7.9×10^{-3}	0.2643	0.2564	0.55	11
7.5×10^{-3}	0.3075	0.3000	0.60	12
6.9×10^{-3}	0.3524	0.3455	0.65	13
6.3×10^{-3}	0.3988	0.3925	0.70	14
5.4×10^{-3}	0.4463	0.4409	0.75	15
4.5×10^{-3}	0.4947	0.4902	0.80	16
3.5×10^{-3}	0.5438	0.5403	0.85	17
2.3×10^{-3}	0.5933	0.5910	0.90	18
1.2×10^{-3}	0.6432	0.6420	0.95	19
0	0.6931	0.6931	1	20

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل بعد 375 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (3.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

مثال (2.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = y' + 2(y - \ln(x))^3 - \frac{1}{x}$$

و الشروط الحدية

$$y(2) = \frac{1}{2} + \ln(2) \quad , \quad y(3) = \frac{1}{3} + \ln(3) \quad \text{حيث } h = 0.25$$

علما بأن الحل التحليلي هو $y = \frac{1}{x} + \ln x$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) + 2h^2(y_i - \ln(x_i))^3 - \frac{h^2}{x_i}$$

و بالتعويض عن قيم $i = 1, 2, 3$

نتحصل علي منظومة من المعادلات غير الخطية

$$2y_1 + 1.37008 - (0.125)(y_1 - \ln 2.25)^3 - \frac{y_2 - 1}{8}y_2 = 0 \rightarrow (1)$$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 - (0.125)(y_3 - y_1) - (0.125)(y_2 - \ln 2.5)^3 + 0.025 = 0 \rightarrow (2)$$

$$y_2 - 2y_3 + (0.125)y_2 - (0.125)(y_3 - \ln 2.75)^3 + 1.27567969 = 0 \rightarrow (3)$$

سنقوم حل هذه المنظومة عن طريق النقطة الثابتة

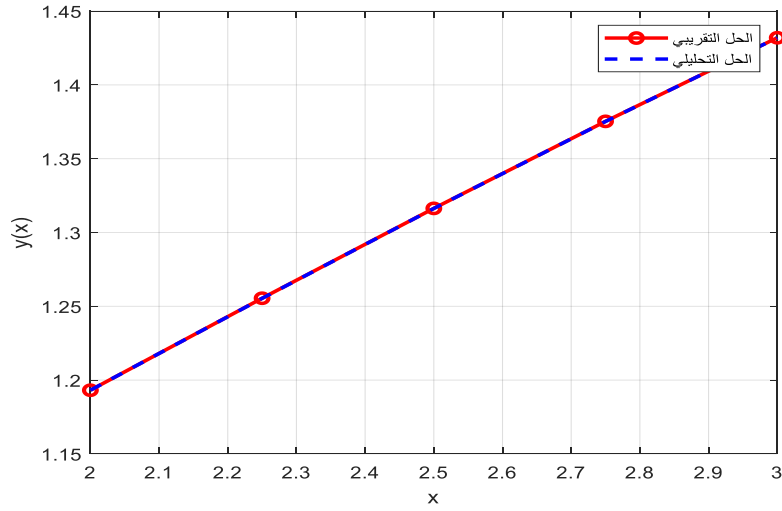
والجدول (5.2) يبين عدد القيم التقريبية للمثال (2.2)

y_3	y_2	y_1	عدد التكرارات
0.7025	0.0606	0.7184	1
0.6738	0.7631	0.7116	2
1.0695	0.7078	1.0190	3
1.0359	1.0541	0.9941	4
1.2308	1.0276	1.1458	5
1.2152	1.1954	1.1323	6
1.3097	1.1797	1.2060	7
1.2998	1.2625	1.1973	8
1.3465	1.2520	1.2338	9
1.3398	1.2932	1.2281	10
1.3631	1.2861	1.2463	11
1.3586	1.3067	1.2425	12
1.3703	1.3021	1.2517	13
1.3644	1.3125	1.2493	14
1.3734	1.3080	1.2540	15
1.3706	1.3150	1.2519	16
1.3746	1.3124	1.2550	17
1.3731	1.3159	1.2537	18
1.3751	1.3144	1.2553	19
1.3742	1.3163	1.2546	20
1.3753	1.3154	1.2555	21
1.3748	1.3164	1.2551	22
1.3753	1.3159	1.2555	23
1.3750	1.3164	1.2553	24
1.3753	1.3162	1.2555	25
1.3751	1.3164	1.2554	26
1.3753	1.3163	1.2555	27
1.3761	1.3164	1.2554	28
1.3753	1.3167	1.2555	29

و الجدول (6.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (2.2) عندما $h = 0.25$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0.0000	1.1931	1.1931	2	0
1×10^{-4}	1.2554	1.2555	2.25	1
1×10^{-4}	1.3163	1.3164	2.5	2
1×10^{-4}	1.3752	1.3753	2.75	3
0.0000	1.4319	1.4319	3	4

في هذا المثال توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 29 تكرار عندما $h = 0.25$ بدقة اربعة ارقام عشرية

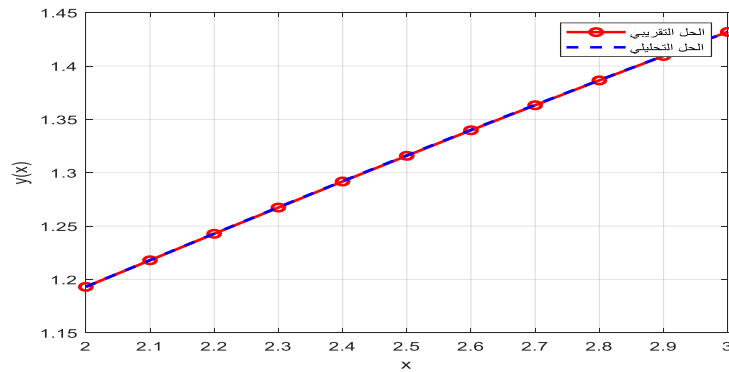


الشكل (4.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

و الجدول (7.2) التالي يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي للمثال (2.2) عندما $h = 0.1$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0.0000	1.1931	1.1931	2	0
1×10^{-4}	1.2181	1.2180	2.1	1
2×10^{-4}	1.2430	1.2428	2.2	2
3×10^{-4}	1.2677	1.2674	2.3	3
3×10^{-4}	1.2921	1.2918	2.4	4
4×10^{-4}	1.3163	1.3159	2.5	5
3×10^{-4}	1.3401	1.3398	2.6	6
3×10^{-4}	1.3636	1.3633	2.7	7
3×10^{-4}	1.3868	1.3865	2.8	8
1×10^{-4}	1.4095	1.4094	2.9	9
0.0000	1.4319	1.4319	3	10

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل بعد 150 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية

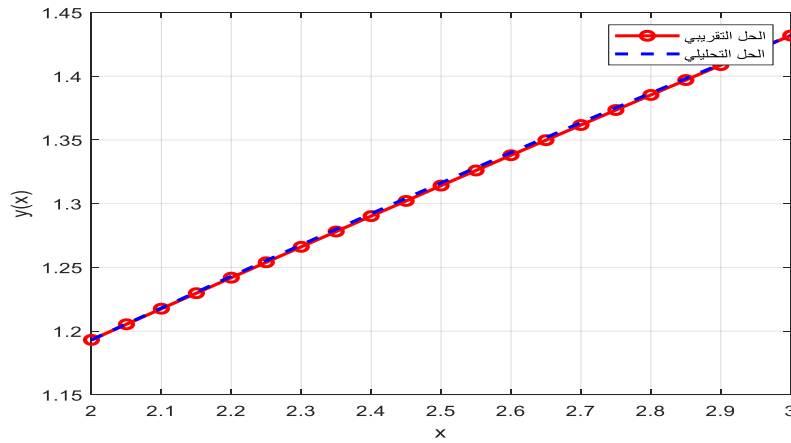


الشكل (5.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

و الجدول (8.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (2.2) عندما $h = 0.05$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0.0000	1.1931	1.1931	2	0
2×10^{-4}	1.2056	1.2054	2.05	1
5×10^{-4}	1.2181	1.2176	2.10	2
8×10^{-4}	1.2306	1.2298	2.15	3
1×10^{-3}	1.2430	1.2420	2.20	4
1.4×10^{-3}	1.2554	1.2540	2.25	5
1.5×10^{-3}	1.2677	1.2662	2.30	6
1.7×10^{-3}	1.2799	1.2782	2.35	7
1.8×10^{-3}	1.2921	1.2903	2.40	8
2×10^{-3}	1.3042	1.3022	2.45	9
2.1×10^{-3}	1.3163	1.3142	2.50	10
2.2×10^{-3}	1.3283	1.3261	2.55	11
2.1×10^{-3}	1.3401	1.3380	2.60	12
2.1×10^{-3}	1.3519	1.3498	2.65	13
1.9×10^{-3}	1.3636	1.3617	2.70	14
1.7×10^{-3}	1.3752	1.3735	2.75	15
1.5×10^{-3}	1.3868	1.3853	2.80	16
1.2×10^{-3}	1.3982	1.3970	2.85	17
8×10^{-4}	1.4095	1.4087	2.90	18
4×10^{-4}	1.4208	1.4204	2.95	19
0.0000	1.4319	1.4319	3	20

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل بعد 488 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (6.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي عندما $h = 0.05$

مثال (3.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = y^3 - yy'$$

و الشروط الحدية

$$y'(0) = -1 \quad , \quad y(1) = 0.5$$

$$h = 0.25 \quad \text{حيث}$$

علما بأن الحل التحليلي

$$y = \frac{1}{x+1}$$

الحل

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad \text{بما أن}$$

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 y_i^3 - h^2 y_i \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) = 0$$

$$i = 0, 1, 2, 3 \quad \text{و بالتعويض عن قيم}$$

نتحصل علي منظومة من المعادلات غير الخطية

$$2y_0 - 2y_1 - 0.5 + (0.0625)y_0^3 + (0.0625)y_0 = 0 \rightarrow (1)$$

$$2y_1 - y_0 - y_2 + (0.0625)y_1^3 - y_1 y_2 (0.125) + y_1 y_0 (0.125) = 0 \rightarrow (2)$$

$$2y_2 - y_3 - y_1 + (0.0625)y_2^3 - y_2 y_3 (0.125) + y_1 y_2 (0.125) = 0 \rightarrow (3)$$

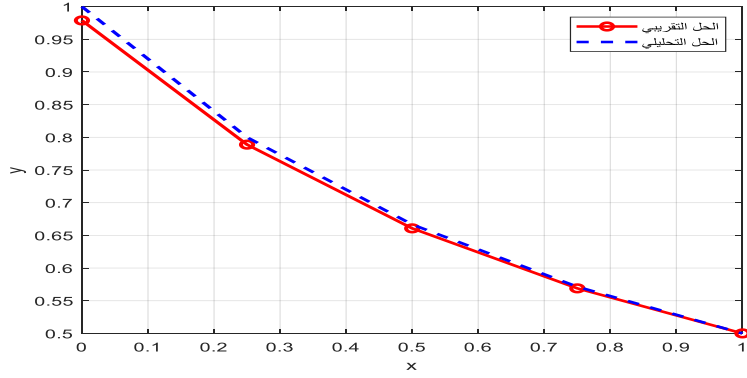
$$2y_3 - 0.5 - y_2 + (0.0625)y_3^3 + (0.125)y_3 y_2 - (0.0625)y_3 = 0 \rightarrow 4$$

سنقوم حل هذه المنظومة عن طريق النقطة الثابتة

و الجدول (9.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (3.2) عندما $h = 0.25$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0.0211	1	0.9789	0	0
0.0111	0.8	0.7889	0.25	1
0.0060	0.6667	0.6607	0.5	2
0.0025	0.5714	0.5689	0.75	3
0.0000	0.5	0.5	1	4

في هذا المثال توصلنا إلي الحل التقريبي بعد 274 تكرار عندما $h = 0.25$ بدقة اربعة ارقام عشرية

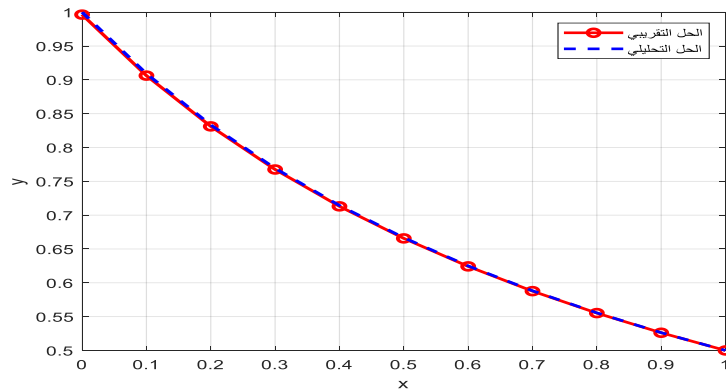


الشكل (7.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي

و الجدول (10.2) التالي يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (3.2) عندما $h = 0.1$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i
3.5×10^{-3}	1	0.9965	0
2.8×10^{-3}	0.9091	0.9063	0.1
2.1×10^{-3}	0.8333	0.8312	0.2
1.7×10^{-3}	0.7692	0.7675	0.3
1.3×10^{-3}	0.7143	0.7130	0.4
1.1×10^{-3}	0.6667	0.6656	0.5
0.7×10^{-3}	0.6250	0.6243	0.6
0.5×10^{-3}	0.5882	0.5877	0.7
0.4×10^{-3}	0.5556	0.5552	0.8
0.1×10^{-3}	0.5263	0.5262	0.9
0	0.5	0.5	1

في هذا المثال توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 811 تكرار عندما $h = 0.1$ بدقة اربعة ارقام عشرية



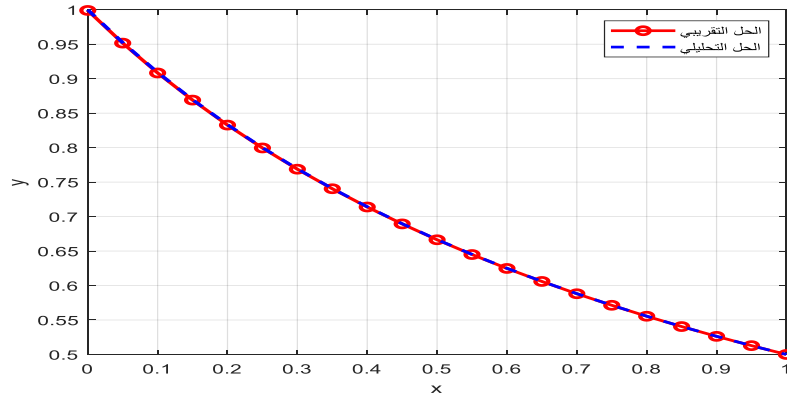
الشكل (8.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (3.2)

و الجدول (11.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (3.2) عندما $h = 0.05$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i
0.1×10^{-2}	1	0.9990	0
0.8×10^{-3}	0.9524	0.9516	0.05
0.8×10^{-3}	0.9091	0.9083	0.10

0.6×10^{-3}	0.8696	0.8690	0.15
0.6×10^{-3}	0.8333	0.8327	0.20
0.5×10^{-3}	0.8000	0.7995	0.25
0.4×10^{-3}	0.7692	0.7688	0.30
0.3×10^{-3}	0.7407	0.7404	0.35
0.4×10^{-3}	0.7143	0.7139	0.40
0.3×10^{-3}	0.6897	0.6894	0.45
0.3×10^{-3}	0.6667	0.6664	0.50
0.2×10^{-3}	0.6452	0.6450	0.55
0.2×10^{-3}	0.6250	0.6248	0.60
0.1×10^{-3}	0.6061	0.6059	0.65
0.1×10^{-3}	0.5882	0.5881	0.70
0.1×10^{-3}	0.5714	0.5713	0.75
0.1×10^{-3}	0.5556	0.5555	0.80
0.2×10^{-3}	0.5407	0.5405	0.85
0	0.5263	0.5263	0.90
0	0.5128	0.5128	0.95
0	0.5	0.5	1

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل بعد 1562 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (9.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (3.2)

مثال (4.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = \frac{3}{2}y^2$$

و الشروط الحدية

$$h = 0.25 \quad \text{حيث} \quad y'(1) = -1, \quad y(0) = 4$$

$$y = \frac{4}{(x+1)^2} \quad \text{علما بأن الحل التحليلي}$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{3}{2}y_i^2 = 0$$

و بالتعويض عن قيم $i = 1, 2, 3, 4$

نتحصل علي منظومة من المعادلات غير الخطية

$$y_2 - 2y_1 + 4 - 0.09375y_1^2 = 0 \rightarrow (1)$$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 - 0.09375y_2^2 = 0 \rightarrow (2)$$

$$y_4 - 2y_3 + y_2 - 0.09375y_3^2 = 0 \rightarrow (3)$$

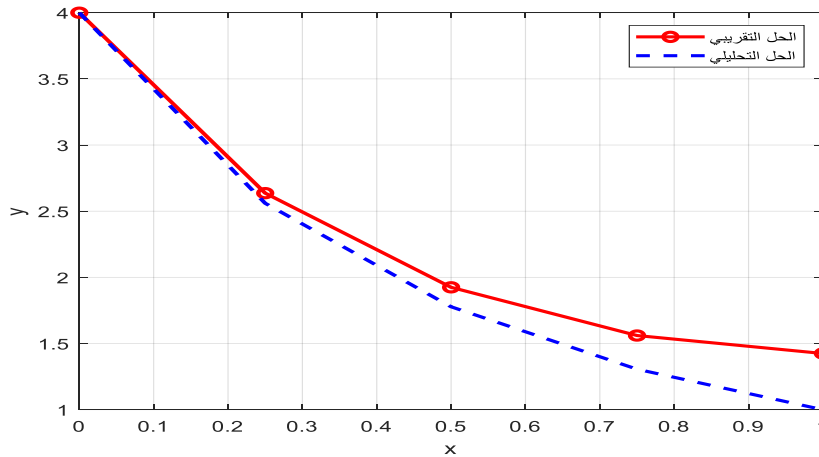
$$2y_3 - 2y_4 - 0.5 - 0.09375y_4^2 = 0 \rightarrow (4)$$

وسنقوم بحل هذه المنظومة بطريقة العددية (النقطة الثابتة)

و الجدول (12.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (4.2) عندما $h = 0.25$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
0.0000	4	4	0	0
7.7×10^{-2}	2.5600	2.6366	0.25	1
1.4×10^{-1}	1.7778	1.9249	0.5	2
2.5×10^{-1}	1.3061	1.5606	0.75	3
4.2×10^{-1}	1	1.4248	1	4

في هذا المثال توصلنا إلي الحل التقريبي بعد 32 تكرار عندما $h = 0.25$ بدقة اربعة ارقام عشرية

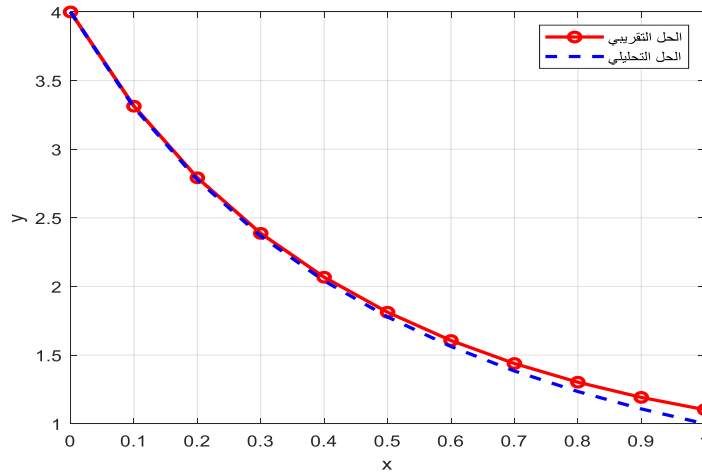


الشكل (10.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (4.2)

و الجدول (13.2) التالي يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (4.2) عندما $h = 0.1$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i
0	4	4	0
0.8×10^{-3}	3.3058	3.3135	0.1
1.2×10^{-2}	2.7778	2.7917	0.2
2×10^{-2}	2.3669	2.3867	0.3
2.7×10^{-2}	2.0408	2.0674	0.4
3.4×10^{-2}	1.7778	1.8120	0.5
4.4×10^{-2}	1.5625	1.6060	0.6
5.4×10^{-2}	1.3841	1.4387	0.7
6.8×10^{-2}	1.2346	1.3025	0.8
8.4×10^{-2}	1.1080	1.1918	0.9
1×10^{-1}	1	1.1025	1

من خلال الجدول السابق توصلنا إلى الحل بعد 811 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية



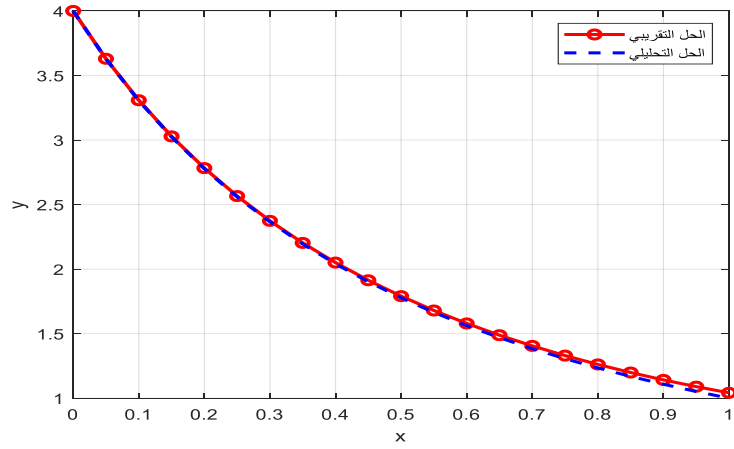
الشكل (11.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (4.2)

و الجدول (14.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (4.2) عندما $h = 0.05$

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i
0	4	4	0
1.3×10^{-3}	3.6281	3.6294	0.05
0.2×10^{-3}	3.3085	3.3083	0.10
3.6×10^{-3}	3.0246	3.0282	0.15
4.7×10^{-3}	2.7778	2.7825	0.20
5.8×10^{-3}	2.5600	2.5658	0.25
7×10^{-3}	2.3669	2.3739	0.30
8.2×10^{-3}	2.1948	2.2030	0.35
9.7×10^{-3}	2.0408	2.0505	0.40
1.1×10^{-2}	1.9025	1.9136	0.45
1.3×10^{-2}	1.7778	1.7906	0.50

1.5×10^{-2}	1.6649	1.6795	0.55
1.7×10^{-2}	1.5625	1.5791	0.60
1.9×10^{-2}	1.4692	1.4880	0.65
2.1×10^{-2}	1.3841	1.4054	0.70
2.4×10^{-2}	1.3061	1.3301	0.75
2.7×10^{-2}	1.2346	1.2615	0.80
3×10^{-2}	1.1687	1.1989	0.85
3.4×10^{-2}	1.1080	1.1417	0.90
3.8×10^{-2}	1.0519	1.0895	0.95
4.2×10^{-2}	1	1.0417	1

من خلال الجدول السابق توصلنا إلى الحل بعد 838 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (12.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال (4.2)

مثال (5.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = \frac{1-y}{2} y'$$

و الشروط الحدية

$$h = 0.25 \quad \text{حيث} \quad y'(1) = \frac{1-}{4} \quad , \quad y'(0) = \frac{4-}{25}$$

الحل التحليلي

$$y = \frac{4}{x-5}$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل على

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{2}y_i\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

$$y_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2 - 0.0625(y_{i+1} - y_{i-1})}$$

بما أن لا نملك $y(0)$, $y(1)$ نستخدم النقاط الخيالية y_{-1} و y_5 من المشتقة الأولى للفرق المركزي عندما

نعوض $i = 0$

نتحصل علي

$$y_0 = \frac{y_1 + y_{-1}}{2 - 0.0625(y_1 - y_{-1})} \quad (1.2)$$

من المعطي

$$y'(0) = \frac{4 -}{25}$$

و قانون المشتقة الأولى للفرق المركزي

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

بحيث

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2(0.25)} = \frac{4 -}{25}$$

ومنها

$$y_{-1} = y_1 + 0.08$$

ثم نعوض في المعادلة (1.2) نتحصل علي

$$y_0 = \frac{2y_1 + 0.08}{2.005}$$

وكالك عندما نعوض $i = 4$

$$y_4 = \frac{y_5 + y_3}{2 - 0.0625(y_5 - y_3)} \quad (2.2)$$

$$y'_5 \text{ خارج الفترة إذًا من المعطي } = \frac{1-}{4}$$

وقانون المشتقة الأولي للفرق المركزي

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

بحيث

$$y'_4 = \frac{y_5 - y_3}{2(0.25)} = \frac{1-}{4}$$

ومنها

$$y_5 = y_3 - 0.125$$

بالتعويض عن قيمة y_5 في المعادلة (2.2) نتحصل علي

$$y_4 = \frac{2y_3 - 0.125}{2.0078125}$$

و بالتعويض عن قيم $i = 0,1,2,3,4$

$$y_0 = \frac{2y_1 + 0.08}{2.005} \rightarrow (1)$$

$$y_1 = \frac{y_2 + y_0}{2 - 0.0625(y_2 - y_0)} \rightarrow (2)$$

$$y_2 = \frac{y_3 + y_1}{2 - 0.0625(y_3 - y_1)} \rightarrow (3)$$

$$y_3 = \frac{y_4 + y_2}{2 - 0.0625(y_4 - y_2)} \rightarrow (4)$$

$$y_4 = \frac{2y_3 - 0.125}{2.0078125} \rightarrow (5)$$

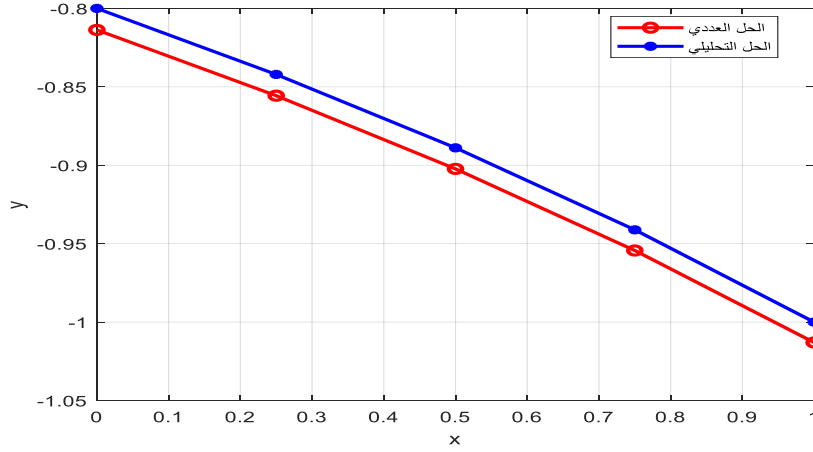
وعند حل هذه المنظومة بطريقة النقطة الثابتة نتحصل علي القيم التقريبية

الجدول (15.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i	i
1.4×10^{-2}	0.8-	0.8137-	0	0
1.4×10^{-2}	0.8421-	0.8557-	0.25	1
1.3×10^{-2}	0.8889-	0.9023-	0.5	2

1.3×10^{-2}	0.9412-	0.9544-	0.75	3
1.3×10^{-2}	1-	1.013-	1	4

في هذا المثال توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 645 تكرار عندما $h = 0.25$ بدقة اربعة ارقام عشرية



الشكل (13.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي

مثال (6.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = -y^2$$

و الشروط الحدية

$$y(1) = 1.2, \quad y(0) = 0.5 \quad \text{حيث } h = 0.25$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i^2 = 0$$

وعليه

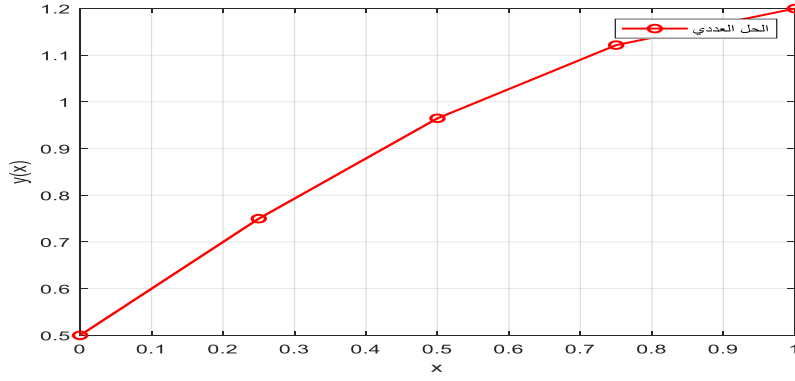
$$y_i = 0.5(y_{i+1} + y_{i-1} + h^2 y_i^2)$$

و بالتعويض عن قيم $i = 1, 2, 3$

نتحصل علي منظومة من المعادلات ونقوم بحل هذه المنظومة بطريقة النقطة الثابتة

و الجدول (16.2) يوضح الحل التقريبي بعد 31 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية

y_i	x_i
0.5000	0
0.7500	0.25
0.9649	0.5
1.1217	0.75
1.2000	1

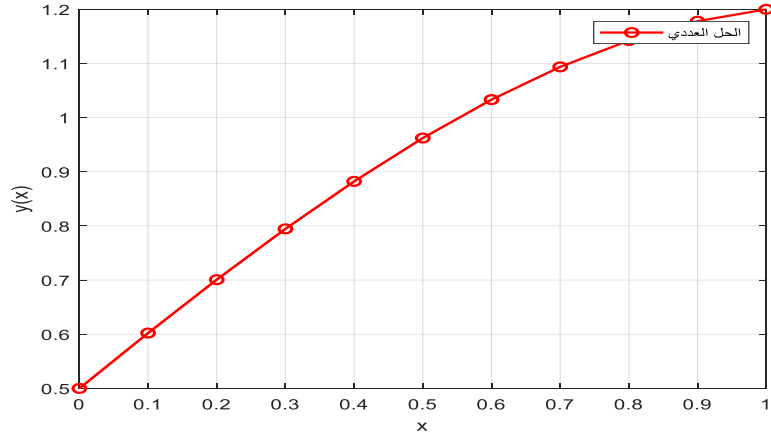


الشكل (14.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

الجدول (17.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

y_i	x_i
0.5	0
0.6022	0.1
0.7008	0.2
0.7946	0.3
0.8823	0.4
0.9623	0.5
1.0333	0.6
1.0938	0.7
1.1424	0.8
1.1781	0.9
1.2000	1

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل بعد 152 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية

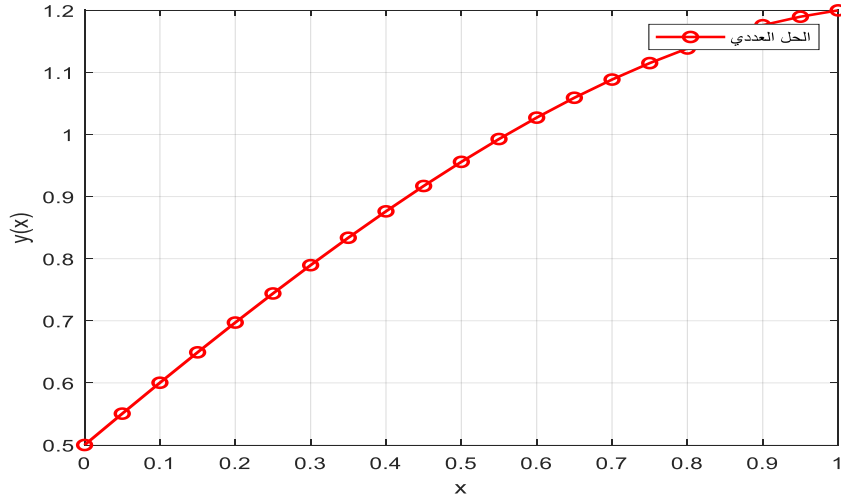


الشكل (15.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

الجدول (18.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

y_i	x_i
0.5000	0
0.5505	0.05
0.6003	0.10
0.6492	0.15
0.6972	0.20
0.7440	0.25
0.7896	0.30
0.8338	0.35
0.8763	0.40
0.9172	0.45
0.9560	0.50
0.9928	0.55
1.0272	0.60
1.0592	0.65
1.0886	0.70
1.1151	0.75
1.1386	0.80
1.1590	0.85
1.1761	0.90
1.1898	0.95
1.2000	1

من خلال الجدول السابق توصلنا إلى الحل بعد 483 تكرار بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (16.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

2.3.2 طريقة نيوتن Newton's Method

1.2.3.2 نظرية :

نفرض أن p حل للمعادلة $G(x) = x$ لبعض $G = (g_1, g_2 \dots g_n)^t$ كراسم من R^n إلى R^n إذا وجد عدد $\delta > 0$ مع الخاصية أن

$$i = 1, 2 \dots n \quad N_\delta = \{x: \|x - p\| < \delta\} \text{ تكون متصلة علي } \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} - 1$$

$$2 - \frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \text{ تكون متصله و } \left| \frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \text{ لبعض الثابت } M$$

عندما $x \in N_\delta$

$$i = 1, 2 \dots n, \quad k = 1, 2 \dots n, \quad j = 1, 2 \dots n$$

$$3 - \frac{\partial g_i(p)}{\partial x_k}$$

$$\text{لكل } k = 1, 2 \dots n, i = 1, 2 \dots n$$

إن يوجد عدد $\delta \leq \hat{\delta}$ بحيث أن المتتالية المولدة $x^{(k)} = G(x^{k-1})$

متقاربة ثنائية الدرجة إلي p لأي اختيار ل $x^{(0)}$ بشرط

$$\|x^{(0)} - p\| < \hat{\delta}$$

$$\text{و } \|x^k - p\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|x^{k-1} - p\|_\infty^2 \text{ لكل } k \geq 1$$

من النظرية السابقة (1.2.3.2)

نفرض أن $A(x)$ مصفوفة من نوع $n \times n$ للدوال من $R \leftarrow R^n$

نفرض أن المصفوفة $A(x)$ مصفوفة غير شادة قريبا من الحل p لدالة $F(x) = 0$

واجعل $b_{ij}(x)$ يرمز إلي مداخل المصفوفة

بما أن

$$G(x) = x - A^{-1}(x)F(x)$$

$$g_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(x)f_j(x) \quad \text{و}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + f_j(x) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) \right) ; i = k \\ - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + f_j(x) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) \right) ; i \neq k \end{cases}$$

من النظرية السابقة نحتاج إلي

$$\frac{\partial g_i(p)}{\partial x_k}$$

لكل من $k = 1, 2 \dots n, i = 1, 2 \dots n$

عندما $i = k$

$$\sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p) + f_j(p) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(p) \right) = 1 \rightarrow (1)$$

عندما $i \neq k$

$$\sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p) + f_j(p) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(p) \right) = 0 \rightarrow (2)$$

نعرف المصفوفة $J(X)$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

من المعادلتين (1) و (2) نتحصل علي

$$A(p^{-1})J(p) = I$$

ومن الشرط الثالث في النظرية السابقة نجد أن

$$A(p) = J(p)$$

الدلة G تكون معرفة كالتالي

$$G(x) = x - J^{-1}(x)F(x)$$

و بإجراء عملية التكرار وذلك من اختيار $x^{(0)}$ تولد

$$x^{(k)} = G(x)^{(k-1)} = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1}F(x^{(k-1)})$$

حيث $k \geq 1$

(Burden o.fl., 1997)

مثال (7.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = 2e^{-2y}(1 - x^2)$$

و الشروط الحدية

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = \ln(2)$$

$$h = 0.25 \text{ حيث}$$

علما بأن الحل التحليلي هو

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 \left(2e^{-2y_i}(1 - x_i^2) \right)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad \text{و بالتعويض عن قيم}$$

نتحصل علي منظومة من المعادلات غير الخطية

$$y_2 - 2y_1 - 0.11719e^{(-2y_1)} = 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 - 0.09375e^{-2y_2} = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$\ln 2 - 2y_3 + y_2 - 0.05469e^{-2y_3} = 0 \quad \rightarrow (3)$$

سنقوم بحل هذه المنظومة من المعادلات بطريقة نيوتن

أولاً نوجد المصفوفة A وهي مصفوفة جاكوبي

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(0.25)^2} + 4e^{-2y_1}(1 - x_1^2) & 16 & 0 \\ 16 & \frac{-2}{(0.25)^2} + 4e^{-2y_2}(1 - x_2^2) & 16 \\ 0 & 16 & \frac{-2}{(0.25)^2} + 4e^{-2y_3}(1 - x_3^2) \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(0)} = (0, 0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} -28.25 & 16 & 0 \\ 16 & -29 & 16 \\ 0 & 16 & -30.25 \end{bmatrix} \quad B = - \begin{bmatrix} -1.8750 \\ -1.5000 \\ 10.2154 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(0)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 0.0739 \\ 0.2476 \\ 0.4687 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0739 \\ 0.2476 \\ 0.4687 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0739 \\ 0.2476 \\ 0.4687 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عند $y^{(1)}$

$$A = \begin{bmatrix} -28.7650 & 16 & 0 \\ 16 & -30.1716 & 16 \\ 0 & 16 & -31.3146 \end{bmatrix}, \quad B = -\begin{bmatrix} -0.0195 \\ -0.1570 \\ -0.2879 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(1)} = (A^{-1}B) = -\begin{bmatrix} 0.0141 \\ 0.0240 \\ 0.0215 \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \Delta^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0739 \\ 0.2476 \\ 0.4687 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0141 \\ 0.0240 \\ 0.0215 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0598 \\ 0.2236 \\ 0.4472 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(2)}$

$$A = \begin{bmatrix} -28.6725 & 16 & 0 \\ 16 & -30.0816 & 16 \\ 0 & 16 & -31.2845 \end{bmatrix}, \quad B = -\begin{bmatrix} -0.0006 \\ -0.0011 \\ -0.0003 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(2)} = (A^{-1}B) = -\begin{bmatrix} 0.0893 \times 10^{-3} \\ 0.1225 \times 10^{-3} \\ 0.0722 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \Delta^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0598 \\ 0.2236 \\ 0.4472 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0893 \times 10^{-3} \\ 0.1225 \times 10^{-3} \\ 0.0722 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0597 \\ 0.2235 \\ 0.4471 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(3)}$

$$A = \begin{bmatrix} -28.6722 & 16 & 0 \\ 16 & -30.0811 & 16 \\ 0 & 16 & -31.2844 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.2770 \times 10^{-7} \\ 0.2912 \times 10^{-7} \\ 0.0384 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(3)} = (A^{-1}B) = - \begin{bmatrix} 0.2969 \times 10^{-8} \\ 0.3588 \times 10^{-8} \\ 0.1958 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$y^{(4)} = y^{(3)} + \Delta^{(3)}$$

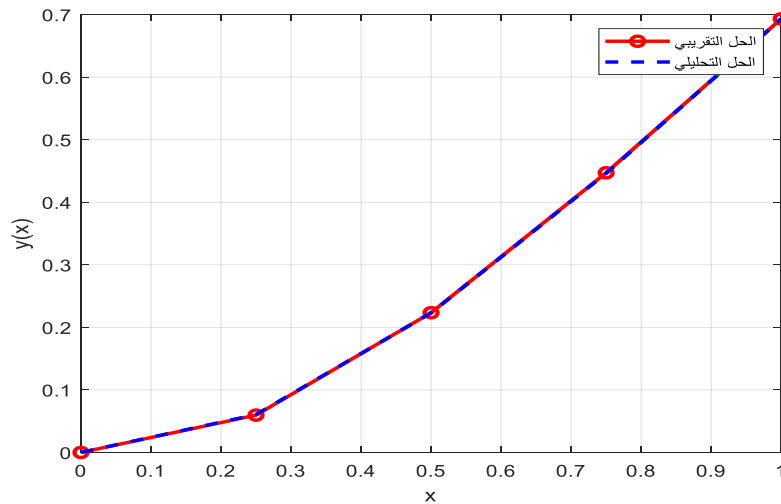
$$= \begin{bmatrix} 0.0597 \\ 0.2235 \\ 0.4471 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2969 \times 10^{-8} \\ 0.3588 \times 10^{-8} \\ 0.1958 \times 10^{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0597 \\ 0.2235 \\ 0.4471 \end{bmatrix}$$

والجدول (19.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي والحل التحليلي

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
0	0	0	0	0
9×10^{-4}	0.0606	0.0597	0.25	1
3×10^{-4}	0.2231	0.2234	0.5	2
8×10^{-4}	0.4463	0.4471	0.75	3
0	0.6931	0.6931	1	4

حيث z_i هو الحل التقريبي بطريقة نيوتن و w_i هو الحل التحليلي

في هذا المثال توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 4 تكرار عندما $h = 0.25$ بدقة اربعة ارقام عشرية



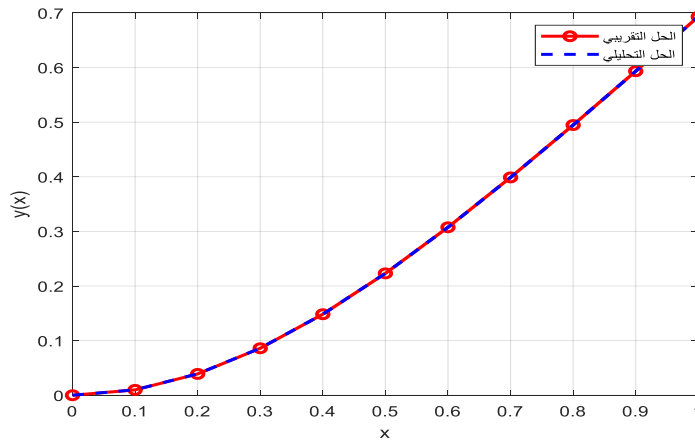
الشكل (17.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

و الجدول (20.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.1$

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
0	0	0	0	0

2×10^{-4}	0.0100	0.0098	0.1	1
1×10^{-4}	0.0392	0.0391	0.2	2
1×10^{-4}	0.0862	0.0861	0.3	3
0	0.1484	0.1484	0.4	4
1×10^{-4}	0.2231	0.2232	0.5	5
1×10^{-4}	0.3075	0.3076	0.6	6
1×10^{-4}	0.3988	0.3989	0.7	7
1×10^{-4}	0.4947	0.4948	0.8	8
1×10^{-4}	0.5933	0.5934	0.9	9
0	0.6931	0.6931	1	10

من خلال الجدول السابق توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 3 تكرارات بدقة أربعة أرقام عشرية

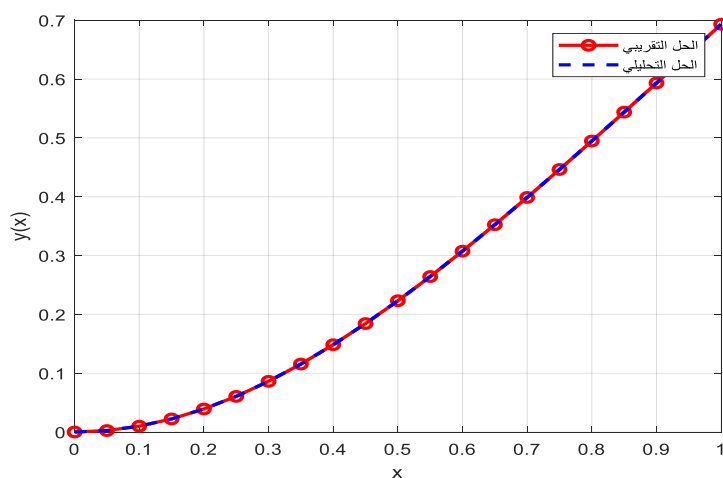


الشكل (18.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

و الجدول (21.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.05$

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0025	0.0025	0.05	1
1×10^{-4}	0.0100	0.0099	0.10	2
1×10^{-4}	0.0223	0.0222	0.15	3
0	0.0392	0.0392	0.20	4
0	0.0606	0.0606	0.25	5
1×10^{-4}	0.0862	0.0861	0.30	6
1×10^{-4}	0.1156	0.1155	0.35	7
0	0.1484	0.1484	0.40	8
0	0.1844	0.1844	0.45	9
1×10^{-4}	0.2231	0.2232	0.50	10
0	0.2643	0.2643	0.55	11
0	0.3075	0.3075	0.60	12
0	0.3524	0.3524	0.65	13
0	0.3988	0.3988	0.70	14
0	0.4463	0.4463	0.75	15
0	0.4947	0.4947	0.80	16
0	0.5438	0.5438	0.85	17
0	0.5933	0.5933	0.90	18
0	0.6432	0.6432	0.95	19
1×10^{-4}	0.6931	0.6932	1	20

من خلال الجدول السابق توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 3 تكرارات بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (19.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

مثال (8.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = y' + 2(y - \ln(x))^3 - \frac{1}{x}$$

و الشروط الحدية

$$y(2) = \frac{1}{2} + \ln(2) \quad , \quad y(3) = \frac{1}{3} + \ln(3)$$

حيث $h = 0.25$

علما بأن الحل التحليلي هو

$$y = \frac{1}{x} + \ln x$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل على

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) + 2h^2(y_i - \ln(x_i))^3 - \frac{h^2}{x_i}$$

و بالتعويض عن قيم $i = 1, 2, 3$

نتحصل علي منظومة من المعادلات

$$2y_1 + 1.37008 - (0.125)(y_1 - \ln 2.25)^3 - \frac{y_2 - 1}{8}y_2 = 0 \rightarrow (1)$$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 - (0.125)(y_3 - y_1) - (0.125)(y_2 - \ln 2.5)^3 + 0.025 = 0$$

$$\rightarrow (2)$$

$$y_2 - 2y_3 + (0.125)y_2 - (0.125)(y_3 - \ln 2.75)^3 + 1.27567969 = 0 \rightarrow (3)$$

سنقوم حل هذه المنظومة بطريقة نيوتن

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(0.25)^2} - 6(y_1 - \ln(x_1))^2 & 14 & 0 \\ 18 & \frac{-2}{(0.25)^2} - 6(y_2 - \ln(x_2))^2 & 14 \\ 0 & 18 & \frac{-2}{(0.25)^2} - 6(y_3 - \ln(x_3))^2 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(0)} = (0, 0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} -35.946 & 14 & 0 \\ 18 & -37.038 & 14 \\ 0 & 18 & -38.14 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -22.988 \\ -1.9386 \\ -22.481 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(0)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 1.0004 \\ 0.9266 \\ 1.0268 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0004 \\ 0.9266 \\ 1.0268 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0004 \\ 0.9266 \\ 1.0268 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عند $y^{(1)}$

$$A = \begin{bmatrix} -32.215 & 14 & 0 \\ 18 & -32.001 & 14 \\ 0 & 18 & -32.001 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.0195 \\ -0.1570 \\ -0.2879 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(1)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 0.2645 \\ 0.4038 \\ 0.3594 \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \Delta^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0004 \\ 0.9266 \\ 1.0268 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2645 \\ 0.4038 \\ 0.3594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2649 \\ 1.3305 \\ 1.3862 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(2)}$

$$A = \begin{bmatrix} -33.127 & 14 & 0 \\ 18 & -33.029 & 14 \\ 0 & 18 & -32.842 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.1165 \\ 0.1418 \\ 0.1046 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(2)} = (A^{-1}B) = - \begin{bmatrix} 0.0094 \\ 0.0140 \\ 0.0109 \end{bmatrix}$$

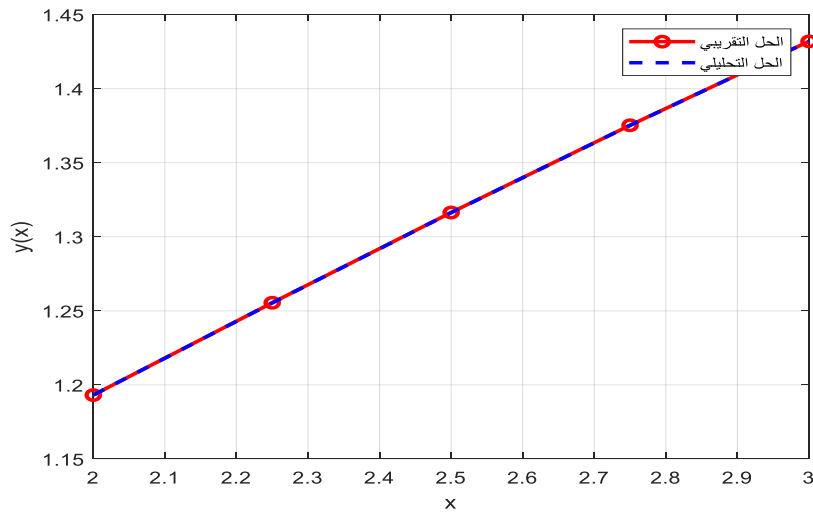
$$y^{(3)} = y^{(2)} + \Delta^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2649 \\ 1.3305 \\ 1.3862 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0094 \\ 0.0140 \\ 0.0109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2555 \\ 1.3164 \\ 1.3753 \end{bmatrix}$$

و الجدول (22.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.25$

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
0.0000	1.1931	1.1931	2	0
1×10^{-4}	1.2554	1.2555	2.25	1
1×10^{-4}	1.3163	1.3164	2.5	2
1×10^{-4}	1.3752	1.3753	2.75	3
0.0000	1.4319	1.4319	3	4

في هذا المثال توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 3 تكرار عندما $h = 0.25$ بدقة اربعة ارقام عشرية

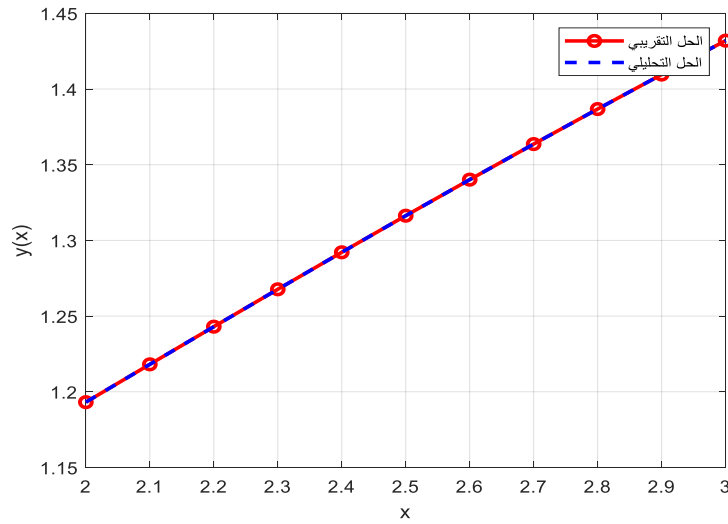


الشكل (19.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

و الجدول (23.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.1$

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
0.0000	1.1931	1.1931	2	0
0.0000	1.2181	1.2181	2.1	1
0.0000	1.2430	1.2430	2.2	2
0.0000	1.2677	1.2677	2.3	3
0.0000	1.2921	1.2921	2.4	4
0.0000	1.3163	1.3163	2.5	5
0.0000	1.3401	1.3401	2.6	6
0.0000	1.3636	1.3636	2.7	7
0.0000	1.3868	1.3868	2.8	8
0.0000	1.4095	1.4095	2.9	9
0.0000	1.4319	1.4319	3	10

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل التقريبي بعد 3 تكرارات بدقة أربعة أرقام عشرية



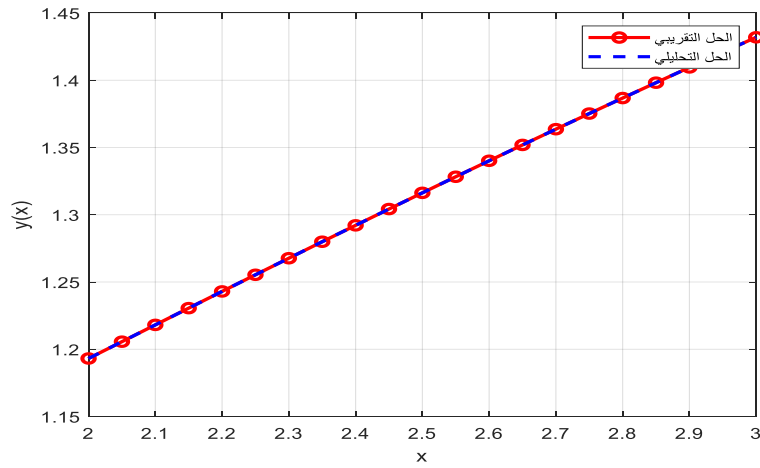
الشكل (20.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

و الجدول (24.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.05$

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
0.0000	1.1931	1.1931	2	0
0.0000	1.2056	1.2056	2.05	1
0.0000	1.2181	1.2181	2.10	2
0.0000	1.2306	1.2306	2.15	3
0.0000	1.2430	1.2430	2.20	4
0.0000	1.2554	1.2554	2.25	5
0.0000	1.2677	1.2677	2.30	6
0.0000	1.2799	1.2799	2.35	7
0.0000	1.2921	1.2921	2.40	8
0.0000	1.3042	1.3042	2.45	9
0.0000	1.3163	1.3163	2.50	10
1×10^{-4}	1.3283	1.3282	2.55	11

0.0000	1.3401	1.3401	2.60	12
0.0000	1.3519	1.3519	2.65	13
0.0000	1.3636	1.3636	2.70	14
0.0000	1.3752	1.3752	2.75	15
0.0000	1.3868	1.3868	2.80	16
0.0000	1.3982	1.3982	2.85	17
0.0000	1.4095	1.4095	2.90	18
0.0000	1.4208	1.4208	2.95	19
0.0000	1.4319	1.4319	3	20

من خلال الجدول السابق توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 4 تكرارات بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (21.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

مثال (9.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = y^3 - yy'$$

و الشروط الحدية

$$y'(0) = -1 \quad , \quad y(1) = 0.5$$

حيث $h = 0.1$

علما بأن الحل التحليلي

$$y = \frac{1}{x+1}$$

الحل

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 y_i^3 - h^2 y_i \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) = 0$$

و بالتعويض عن قيم $i = 0, 1, 2, 3$

نتحصل علي منظومة من المعادلات غير الخطية

$$2y_0 - 2y_1 - 0.5 + (0.0625)y_0^3 + (0.0625)y_0 = 0 \rightarrow (1)$$

$$2y_1 - y_0 - y_2 + (0.0625)y_1^3 - y_1 y_2 (0.125) + y_1 y_0 (0.125) = 0 \rightarrow (2)$$

$$2y_2 - y_3 - y_1 + (0.0625)y_2^3 - y_2 y_3 (0.125) + y_1 y_2 (0.125) = 0 \rightarrow (3)$$

$$2y_3 - 0.5 - y_2 + (0.0625)y_3^3 + (0.125)y_3 y_2 - (0.0625)y_3 = 0 \rightarrow (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_1^2 & \frac{1}{(0.25)^2} - \frac{y_1}{0.5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(0.25)^2} + \frac{y_2}{0.5} & \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_2^2 & \frac{1}{(0.25)^2} - \frac{y_2}{0.5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0.25)^2} + \frac{y_3}{0.5} & \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_3^2 & \frac{1}{(0.25)^2} - \frac{y_3}{0.5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0.25)^2} + \frac{y_4}{0.5} & \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_4^2 & \frac{1}{(0.25)^2} - \frac{y_4}{0.5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} -33 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -32 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -32 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = - \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(0)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عند $y^{(1)}$

$$A = \begin{bmatrix} -38.333 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 18.25 & -35.797 & 13.75 & 0 & 0 \\ 0 & 17.833 & -34.521 & 14.167 & 0 \\ 0 & 0 & 17.417 & -33.525 & 14.583 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2.3704 \\ 2.3613 \\ 1.5341 \\ 0.9457 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(1)} = (A^{-1}B) = - \begin{bmatrix} 0.3853 \\ 0.3874 \\ 0.3256 \\ 0.1974 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \Delta^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3853 \\ 0.3874 \\ 0.3256 \\ 0.1974 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.948 \\ 0.7376 \\ 0.5911 \\ 0.5109 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(2)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.696 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.475 & -33.632 & 14.525 & 0 & 0 \\ 0 & 17.182 & -33.048 & 14.818 & 0 \\ 0 & 0 & 17.022 & -32.783 & 14.978 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5367 \\ -0.0965 \\ -0.5871 \\ -0.8835 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(2)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 0.0290 \\ 0.0491 \\ 0.0722 \\ 0.0644 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \Delta^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.948 \\ 0.7376 \\ 0.5911 \\ 0.5109 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0290 \\ 0.0491 \\ 0.0722 \\ 0.0644 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9770 \\ 0.7867 \\ 0.6633 \\ 0.5753 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(3)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.864 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.573 & -33.856 & 14.427 & 0 & 0 \\ 0 & 17.326 & -33.319 & 14.818 & 0 \\ 0 & 0 & 17.15 & -32.993 & 14.85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ -0.0912 \\ 0.0039 \\ 0.1752 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(3)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 0.0046 \\ 0.0052 \\ 0.0003 \\ -0.0051 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(4)} = y^{(3)} + \Delta^{(3)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9770 \\ 0.7867 \\ 0.6633 \\ 0.5753 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0046 \\ 0.0052 \\ 0.0003 \\ -0.0051 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9816 \\ 0.7919 \\ 0.6636 \\ 0.5702 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(4)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.891 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.584 & -33.881 & 14.416 & 0 & 0 \\ 0 & 17.327 & -33.321 & 14.673 & 0 \\ 0 & 0 & 17.14 & -32.975 & 14.86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.6174 \times 10^{-4} \\ 0.0168 \\ 0.0276 \\ -0.8666 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(4)} = (A^{-1}B) = - \begin{bmatrix} 0.0034 \\ 0.0038 \\ 0.0036 \\ 0.0019 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= y^{(4)} + \Delta^{(4)} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9816 \\ 0.7919 \\ 0.6636 \\ 0.5702 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0034 \\ 0.0038 \\ 0.0036 \\ 0.0019 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9782 \\ 0.7881 \\ 0.6600 \\ 0.5683 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(5)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.871 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.576 & -33.863 & 14.424 & 0 & 0 \\ 0 & 17.32 & -33.306 & 14.68 & 0 \\ 0 & 0 & 17.137 & -32.969 & 14.863 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.3346 \times 10^{-4} \\ -0.0016 \\ -0.0067 \\ -0.88 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(5)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 0.5866 \times 10^{-3} \\ 0.6586 \times 10^{-3} \\ 0.7205 \times 10^{-3} \\ 0.4012 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(6)} = y^{(5)} + \Delta^{(5)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9782 \\ 0.7881 \\ 0.6600 \\ 0.5683 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5866 \times 10^{-3} \\ 0.6586 \times 10^{-3} \\ 0.7205 \times 10^{-3} \\ 0.4012 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9788 \\ 0.7888 \\ 0.6607 \\ 0.5687 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(6)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.875 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.578 & -33.867 & 14.422 & 0 & 0 \\ 0 & 17.322 & -33.31 & 14.678 & 0 \\ 0 & 0 & 17.138 & -32.971 & 14.862 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1868 \times 10^{-5} \\ -0.1202 \times 10^{-3} \\ 0.7112 \times 10^{-3} \\ 0.2569 \times 10^{-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(6)} = (A^{-1}B) = - \begin{bmatrix} 0.0973 \times 10^{-3} \\ 0.1090 \times 10^{-3} \\ 0.1458 \times 10^{-3} \\ 0.1537 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(7)} = y^{(6)} + \Delta^{(6)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9788 \\ 0.7888 \\ 0.6607 \\ 0.5687 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0973 \times 10^{-3} \\ 0.1090 \times 10^{-3} \\ 0.1458 \times 10^{-3} \\ 0.1537 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9787 \\ 0.7877 \\ 0.6606 \\ 0.5685 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(7)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.875 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.578 & -33.867 & 14.422 & 0 & 0 \\ 0 & 17.322 & -33.31 & 14.678 & 0 \\ 0 & 0 & 17.138 & -32.971 & 14.862 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2781 \times 10^{-7} \\ 0.8360 \times 10^{-4} \\ 0.5400 \times 10^{-4} \\ -0.3812 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(6)} = (A^{-1}B) = - \begin{bmatrix} 0.8130 \times 10^{-4} \\ 0.9114 \times 10^{-4} \\ 0.5697 \times 10^{-4} \\ 0.1805 \times 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

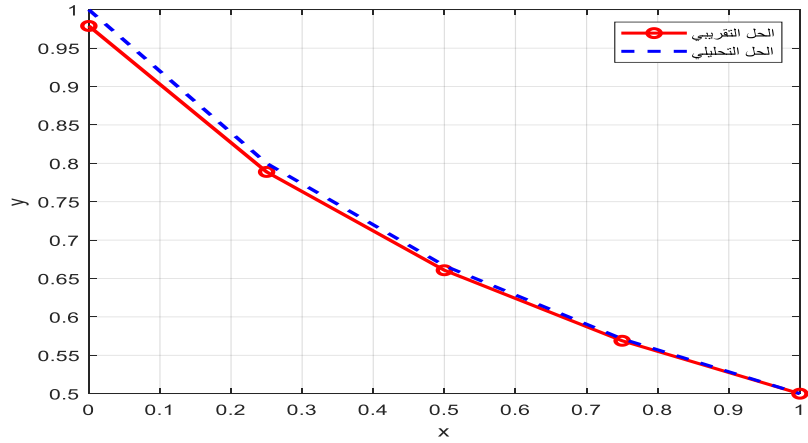
$$y^{(7)} = y^{(6)} + \Delta^{(6)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9787 \\ 0.7877 \\ 0.6606 \\ 0.5685 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8130 \times 10^{-4} \\ 0.9114 \times 10^{-4} \\ 0.5697 \times 10^{-4} \\ 0.1805 \times 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9779 \\ 0.7877 \\ 0.6606 \\ 0.5685 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و الجدول (25.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.25$

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
2.1×10^{-2}	1	0.9779	0	0
1.1×10^{-2}	0.8	0.7877	0.25	1
5.9×10^{-3}	0.6667	0.6606	0.5	2
2.5×10^{-3}	0.5714	0.5685	0.75	3
0	0.5	0.5	1	4

في هذا المثال توصلنا إلى الحل التقريبي بعد 7 تكرار عندما $h = 0.25$ بدقة اربعة ارقام عشرية

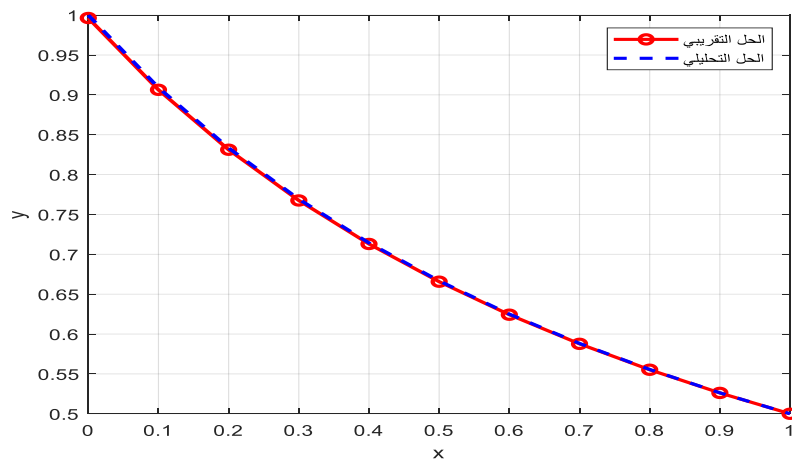


الشكل (22.2) يوضح المقارنة بين الحال التحليلي والحل التقريبي عندما $h = 0.25$

و الجدول (26.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحال التحليلي عندما $h = 0.1$

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i
3.6×10^{-3}	1	0.9964	0
2.8×10^{-3}	0.9091	0.9063	0.1
2.1×10^{-3}	0.8333	0.8312	0.2
1.7×10^{-3}	0.7692	0.7676	0.3
1.3×10^{-3}	0.7143	0.7130	0.4
1×10^{-3}	0.6667	0.6657	0.5
7×10^{-4}	0.6250	0.6243	0.6
5×10^{-4}	0.5882	0.5877	0.7
3×10^{-4}	0.5556	0.5552	0.8
1×10^{-4}	0.5263	0.5262	0.9
0	0.5	0.5	1

من خلال الجدول السابق تحصلنا على الحل التقريبي بعد 8 تكرار عندما $h = 0.1$

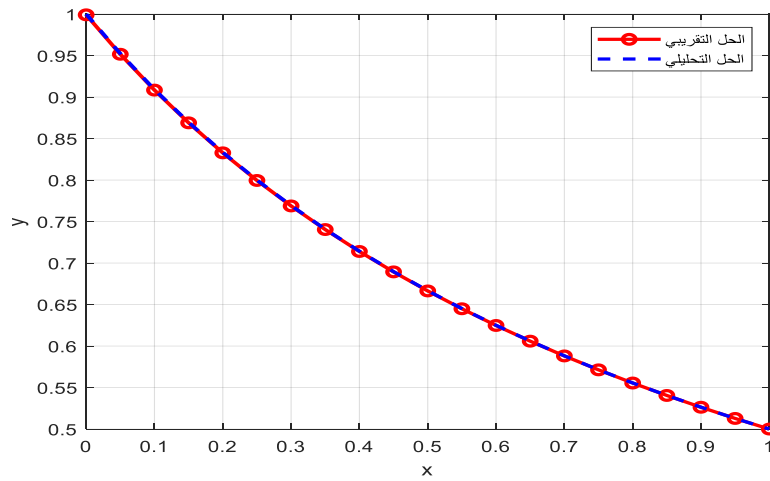


الشكل (23.2) يوضح المقارنة بين الحال التحليلي والحل التقريبي عندما $h = 0.1$

و الجدول (27.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

$ w_i - y_i $	w_i	z_i	x_i
9×10^{-4}	1	0.9991	0
8×10^{-4}	0.9524	0.9516	0.05
7×10^{-4}	0.9091	0.9084	0.10
6×10^{-4}	0.8696	0.8690	0.15
5×10^{-4}	0.8333	0.8328	0.20
5×10^{-4}	0.8000	0.7995	0.25
4×10^{-4}	0.7692	0.7688	0.30
4×10^{-4}	0.7407	0.7404	0.35
3×10^{-4}	0.7143	0.7140	0.40
3×10^{-4}	0.6897	0.6894	0.45
2×10^{-4}	0.6667	0.6664	0.50
2×10^{-4}	0.6452	0.6450	0.55
2×10^{-4}	0.6250	0.6248	0.60
1×10^{-4}	0.6061	0.6059	0.65
1×10^{-4}	0.5882	0.5881	0.70
1×10^{-4}	0.5714	0.5713	0.75
1×10^{-4}	0.5556	0.5555	0.80
0	0.5405	0.5405	0.85
0	0.5263	0.5263	0.90
0	0.5128	0.5128	0.95
0	0.5	0.5	1

من خلال الجدول السابق حصلنا علي الحل التقريبي بعد 8 تكرار عندما $h = 0.05$



الشكل (24.2) يوضح المقارنة بين الحال التحليلي والحل التقريبي عندما $h = 0.05$

مثال (10.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = \frac{3}{2}y^2$$

و الشروط الحدية

$$y'(1) = -1 \quad , \quad y(0) = 4$$

$$h = 0.25 \text{ حيث}$$

علما بأن الحل التحليلي

$$y = \frac{4}{(x+1)^2}$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - \frac{3}{2}y_i^2 = 0$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{و بالتعويض عن قيم}$$

نتحصل علي منظومة من المعادلات غير الخطية

$$y_2 - 2y_1 + 4 - 0.09375y_1^2 = 0 \rightarrow (1)$$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 - 0.09375y_2^2 = 0 \rightarrow (2)$$

$$y_4 - 2y_3 + y_2 - 0.09375y_3^2 = 0 \rightarrow (3)$$

$$2y_3 - 2y_4 - 0.5 - 0.09375y_4^2 = 0 \rightarrow (4)$$

وسنقوم بحل هذه المنظومة بطريقة العددية (نيوتن)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{(0.25)^2} & \frac{0}{(0.25)^2} - 3y_1 & \frac{0}{(0.25)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0.25)^2} & \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_2 & \frac{1}{(0.25)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0.25)^2} & \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_3 & \frac{1}{(0.25)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0.25)^2} + \frac{y_4}{0.5} & \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_4^2 & \frac{-2}{(0.25)^2} - 3y_4 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(0)} = (0,0,0,0)$

$$A = \begin{bmatrix} -33 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -32 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -32 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = - \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(0)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عند $y^{(1)}$

$$A = \begin{bmatrix} -38.333 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 18.25 & -35.797 & 13.75 & 0 & 0 \\ 0 & 17.833 & -34.521 & 14.167 & 0 \\ 0 & 0 & 17.417 & -33.525 & 14.583 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2.3704 \\ 2.3613 \\ 1.5341 \\ 0.9457 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(1)} = (A^{-1}B) = - \begin{bmatrix} 0.3853 \\ 0.3874 \\ 0.3256 \\ 0.1974 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \Delta^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.1250 \\ 0.9167 \\ 0.7083 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3853 \\ 0.3874 \\ 0.3256 \\ 0.1974 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.948 \\ 0.7376 \\ 0.5911 \\ 0.5109 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(2)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.696 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.475 & -33.632 & 14.525 & 0 & 0 \\ 0 & 17.182 & -33.048 & 14.818 & 0 \\ 0 & 0 & 17.022 & -32.783 & 14.978 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5367 \\ -0.0965 \\ -0.5871 \\ -0.8835 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(2)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 0.0290 \\ 0.0491 \\ 0.0722 \\ 0.0644 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \Delta^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.948 \\ 0.7376 \\ 0.5911 \\ 0.5109 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0290 \\ 0.0491 \\ 0.0722 \\ 0.0644 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9770 \\ 0.7867 \\ 0.6633 \\ 0.5753 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(3)}$

$$A = \begin{bmatrix} -35.864 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 17.573 & -33.856 & 14.427 & 0 & 0 \\ 0 & 17.326 & -33.319 & 14.818 & 0 \\ 0 & 0 & 17.15 & -32.993 & 14.85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ -0.0912 \\ 0.0039 \\ 0.1752 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(3)} = (A^{-1}B) = \begin{bmatrix} 0.0046 \\ 0.0052 \\ 0.0003 \\ -0.0051 \\ 0 \end{bmatrix}$$

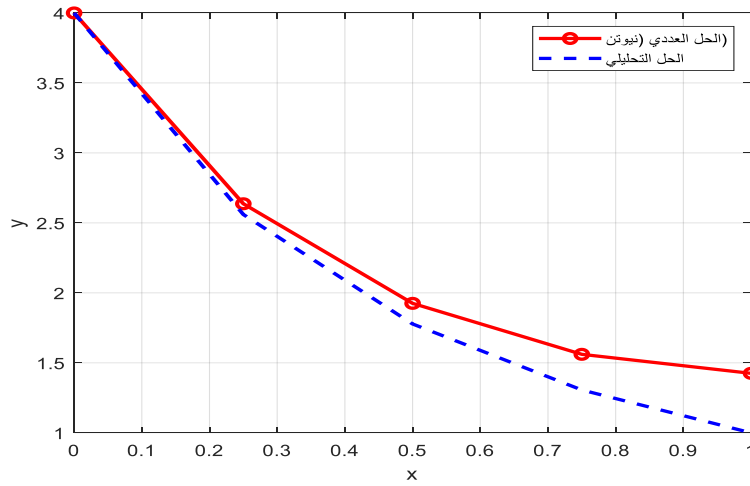
$$y^{(4)} = y^{(3)} + \Delta^{(3)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9770 \\ 0.7867 \\ 0.6633 \\ 0.5753 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0046 \\ 0.0052 \\ 0.0003 \\ -0.0051 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9816 \\ 0.7919 \\ 0.6636 \\ 0.5702 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة A, B عندما $y^{(4)}$

و الجدول (28.2) المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.25$ بعد 5 تكرار

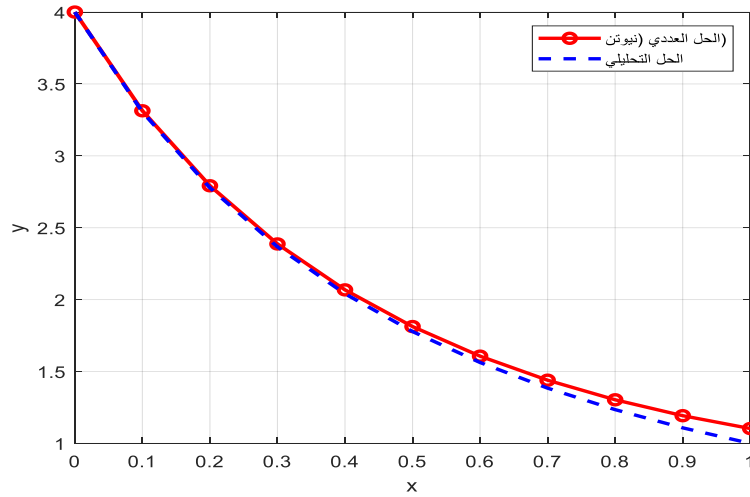
$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
0	4	4	0	0
7.7×10^{-2}	2.5600	2.6366	0.25	1
1.4×10^{-1}	1.7778	1.9249	0.5	2
2.5×10^{-1}	1.3061	1.5606	0.75	3
4.2×10^{-1}	1	1.4248	1	4



الشكل (25.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

و الجدول (29.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي الحل التحليلي عندما $h = 0.1$ بعد 6 تكرار

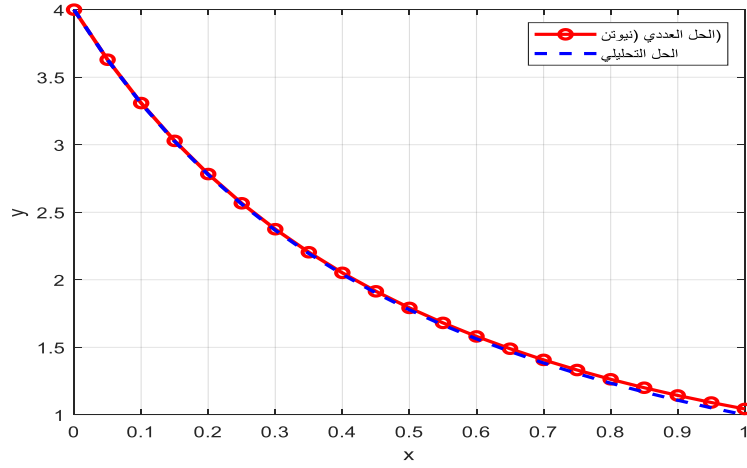
$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i
0	4	4	0
7.8×10^{-3}	3.3058	3.3136	0.1
1.4×10^{-2}	2.7778	2.7919	0.2
2×10^{-2}	2.3669	2.3870	0.3
2.6×10^{-2}	2.0408	2.0677	0.4
3.4×10^{-2}	1.7778	1.8125	0.5
4.4×10^{-2}	1.5625	1.6066	0.6
5.5×10^{-2}	1.3841	1.4393	0.7
6.8×10^{-2}	1.2346	1.3032	0.8
8.4×10^{-2}	1.1080	1.1925	0.9
1×10^{-1}	1	1.1032	1



الشكل (26.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

و الجدول (30.2) يوضح المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي عندما $h = 0.05$ بعد 6 تكرار

$ w_i - y_i $	w_i	y_i	x_i
0	4	4	0
1.5×10^{-3}	3.6281	3.6296	0.05
2.8×10^{-3}	3.3085	3.3086	0.10
4×10^{-3}	3.0246	3.0286	0.15
5.2×10^{-3}	2.7778	2.7830	0.20
6.5×10^{-3}	2.5600	2.5665	0.25
7.8×10^{-3}	2.3669	2.3746	0.30
9.2×10^{-3}	2.1948	2.2040	0.35
1×10^{-2}	2.0408	2.0515	0.40
1.2×10^{-2}	1.9025	1.9148	0.45
1.4×10^{-2}	1.7778	1.7919	0.50
1.6×10^{-2}	1.6649	1.6810	0.55
1.8×10^{-2}	1.5625	1.5807	0.60
2×10^{-2}	1.4692	1.4897	0.65
2.3×10^{-2}	1.3841	1.4071	0.70
2.5×10^{-2}	1.3061	1.3319	0.75
2.8×10^{-2}	1.2346	1.2634	0.80
3.2×10^{-2}	1.1687	1.2009	0.85
3.5×10^{-2}	1.1080	1.1437	0.90
3.9×10^{-2}	1.0519	1.0915	0.95
3.4×10^{-2}	1	1.0437	1



الشكل (27.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

مثال (11.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = \frac{1-y}{2} y y'$$

و الشروط الحدية

$$y'(1) = \frac{1-}{4} \quad , \quad y'(0) = \frac{4-}{25} \quad \text{حيث } h = 0.25$$

الحل التحليلي

$$y = \frac{4}{x-5}$$

الحل

باستخدام طريقة الفروق المنتهية نتحصل علي

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{2} y_i \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) = 0$$

$$y_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2 - 0.0625(y_{i+1} - y_{i-1})}$$

بما أن لا نملك $y(0)$, $y(1)$ نستخدم النقاط الخيالية y_{-1} و y_5 من المشتقة الأولى للفرق المركزي عندما نعوض $i = 0$

نتحصل علي

$$y_0 = \frac{y_1 + y_{-1}}{2 - 0.0625(y_1 - y_{-1})} \quad (3.2)$$

$$y'(0) = \frac{4-}{25} \text{ من المعطي}$$

و قانون المشتقة الأولى للفرق المركزي

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

بحيث

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2(0.25)} = \frac{4-}{25}$$

ومنها

$$y_{-1} = y_1 + 0.08$$

ثم نعوض في المعادلة (3.2) نتحصل علي

$$y_0 = \frac{2y_1 + 0.08}{2.005}$$

وكذلك عندما نعوض $i = 4$

$$y_4 = \frac{y_5 + y_3}{2 - 0.0625(y_5 - y_3)} \quad (4.2)$$

$$y'(1) = \frac{1-}{4} \text{ بما أن } y_5 \text{ خارج الفترة إذا من المعطي}$$

و قانون المشتقة الأولى للفرق المركزي

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

بحيث

$$y_4' = \frac{y_5 - y_3}{2(0.25)} = \frac{1 -}{4}$$

ومنها

$$y_5 = y_3 - 0.125$$

بالتعويض عن قيمة y_5 في المعادلة (4.2) نتحصل علي

$$y_4 = \frac{2y_3 - 0.125}{2.0078125}$$

و بالتعويض عن قيم $i = 0,1,2,3,4$

$$y_0 = \frac{2y_1 + 0.08}{2.005} \rightarrow (1)$$

$$y_1 = \frac{y_2 + y_0}{2 - 0.0625(y_2 - y_0)} \rightarrow (2)$$

$$y_2 = \frac{y_3 + y_1}{2 - 0.0625(y_3 - y_1)} \rightarrow (3)$$

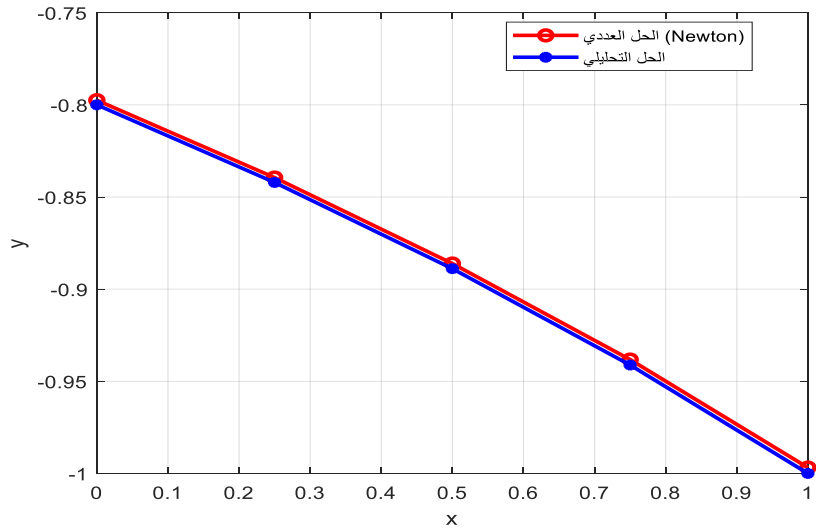
$$y_3 = \left(\frac{y_4 + y_2}{2 - 0.0625(y_4 - y_2)} \right) \rightarrow (4)$$

$$y_4 = \frac{2y_3 - 0.125}{2.0078125} \rightarrow (5)$$

وعند حل هذه المنظومة بطريقة نيوتن نتحصل علي القيم التقريبية بعد 4 تكرارات

والجدول (31.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي

$ w_i - z_i $	w_i	z_i	x_i	i
2.5×10^{-3}	0.8-	0.7975-	0	0
2.6×10^{-3}	0.8421-	0.8395-	0.25	1
2.8×10^{-3}	0.8889-	0.8861-	0.5	2
3×10^{-3}	0.9412-	0.9382-	0.75	3
3.2×10^{-3}	1-	0.9968-	1	4



الشكل (28.2) يوضح المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

مثال (12.2)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية التالية

$$y'' = -y^2$$

و الشروط الحدية

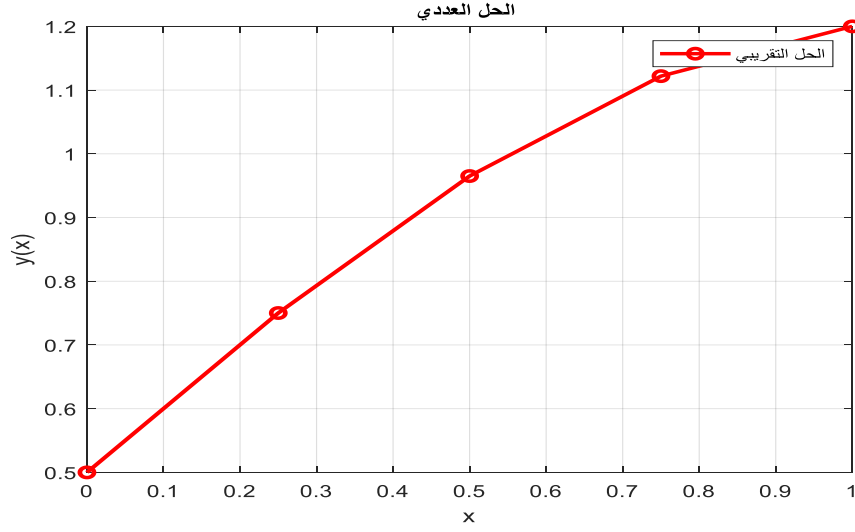
$$y(1) = 1.2, \quad y(0) = 0.5 \quad \text{حيث } h = 0.25$$

الحل

تم الوصول إلي الحل بعد 4 تكرار

و الجدول (32.2) يوضح الحل العددي

z_i	x_i
0.5	0
0.7502	0.25
0.9651	0.5
1.1219	0.75
1.2	1

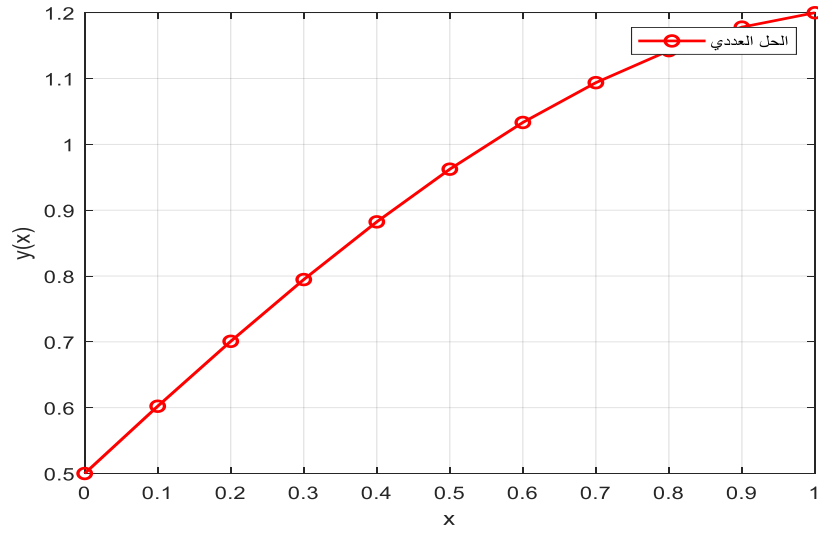


الشكل (29.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.25$

الجدول (33.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

y_i	x_i
0.5	0
0.6029	0.1
0.7022	0.2
0.7965	0.3
0.8845	0.4
0.9647	0.5
1.0355	0.6
1.0957	0.7
1.1438	0.8
1.1788	0.9
1.2000	1

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل بعد 4 تكرارات بدقة أربعة أرقام عشرية

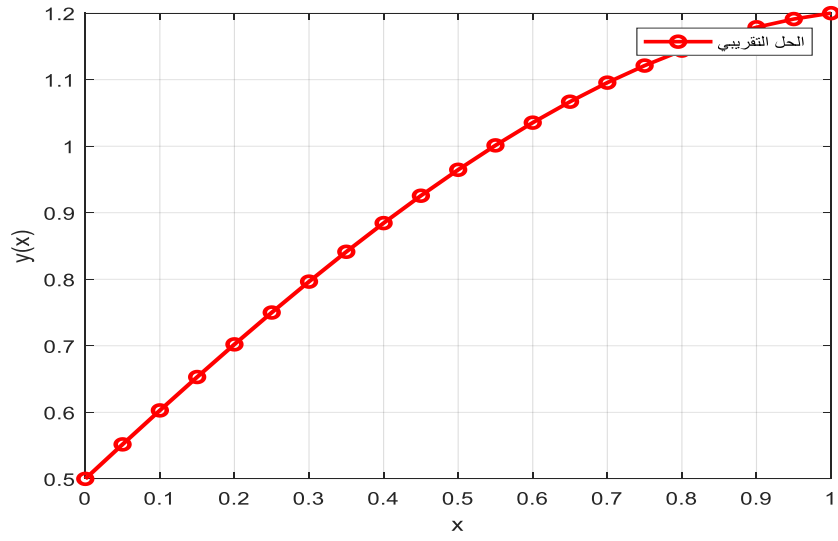


الشكل (30.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.1$

الجدول (34.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

z_i	x_i
0.5000	0
0.5518	0.05
0.6029	0.10
0.6531	0.15
0.7022	0.20
0.7500	0.25
0.7965	0.30
0.8413	0.35
0.8844	0.40
0.9256	0.45
0.9646	0.50
1.0013	0.55
1.0354	0.60
1.0669	0.65
1.0956	0.70
1.1212	0.75
1.1437	0.80
1.1629	0.85
1.1788	0.90
1.1912	0.95
1.2000	1

من خلال الجدول السابق توصلنا إلي الحل بعد 4 تكرارات بدقة أربعة أرقام عشرية



الشكل (16.2) يوضح الحل التقريبي عندما $h = 0.05$

الفصل الثالث

مقارنة الطرق التكرارية

Iterative Methods Comparison

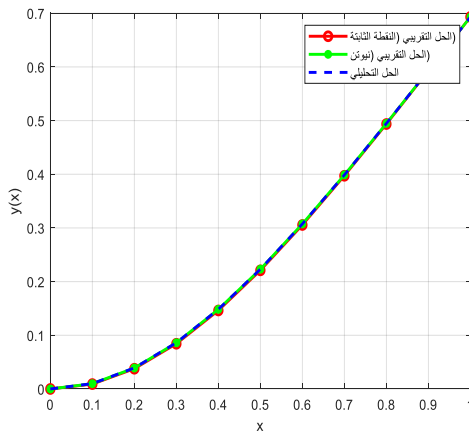
1.3 مقدمة

في هذا الفصل سنقوم بمقارنه النتائج المتحصل عليها الطرق التكرارية (النقطة الثابتة ونيوتن) التي تم تطبيقها في الفصل الثاني

2.3 المقارنات

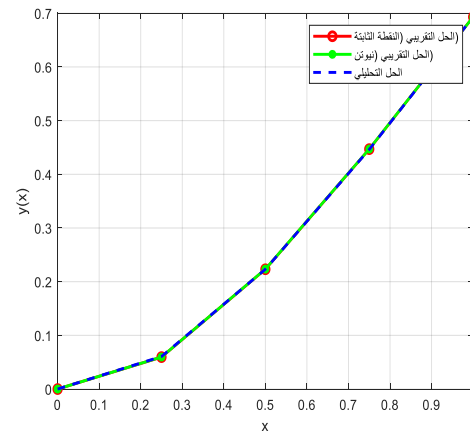
مقارنة النتائج المتحصل عليها في المثال (1.2) التي تم حلها بطريقة النقطة الثابتة و المتال (7.2) الذي تم حله بطريقة نيوتن عند شروط دريشليت الحدودية في عدة حالات
جدول (1.3) مقارنة طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن

h	طريقة النقطة الثابتة	طريقة نيوتن	أقصى خطأ مطلق
0.25	27	4	0
0.1	126	3	2.2×10^{-3}
0.05	375	3	8.1×10^{-3}



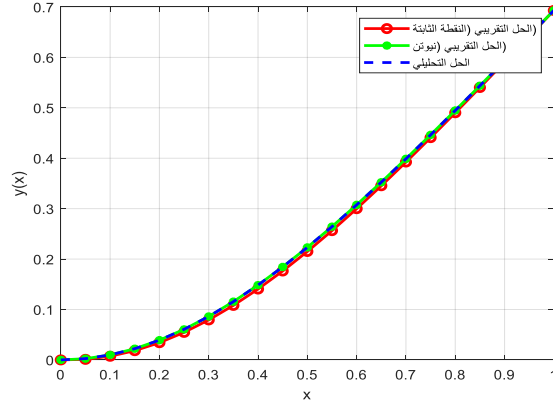
الشكل (2.3) يوضح المقارنة بين الحلول (التحليلي – النقطة الثابتة – نيوتن)

عندما $h = 0.1$



الشكل (1.3) يوضح المقارنة بين الحلول (التحليلي – النقطة الثابتة – نيوتن)

عندما $h=0.25$

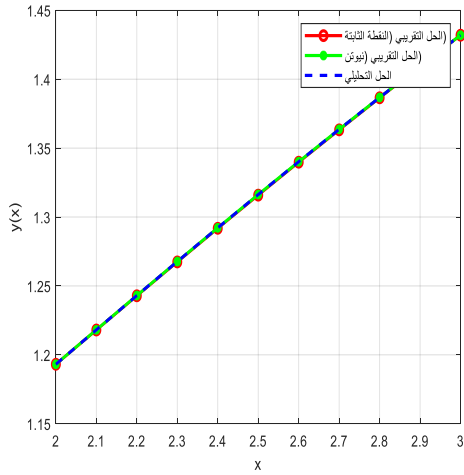


الشكل (3.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي- النقطة الثابتة -نيوتن)

عندما $h=0.05$

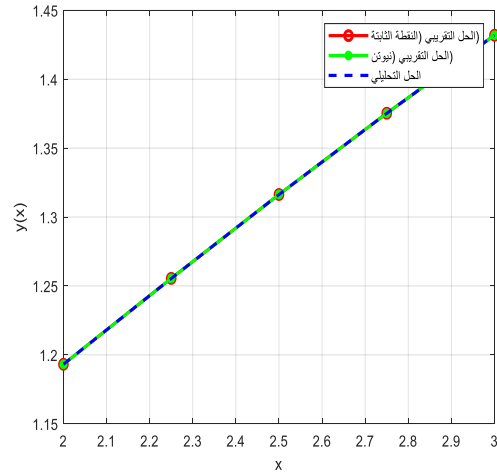
جدول (2.3) مقارنة طريقة النقطة الثابتة للمثال (2.2) و طريقة نيوتن للمثال (8.2)

أقصى خطأ مطلق	طريقة نيوتن	طريقة النقطة الثابتة	h
0	3	29	0.25
4×10^{-4}	3	150	0.1
2.1×10^{-3}	4	488	0.05



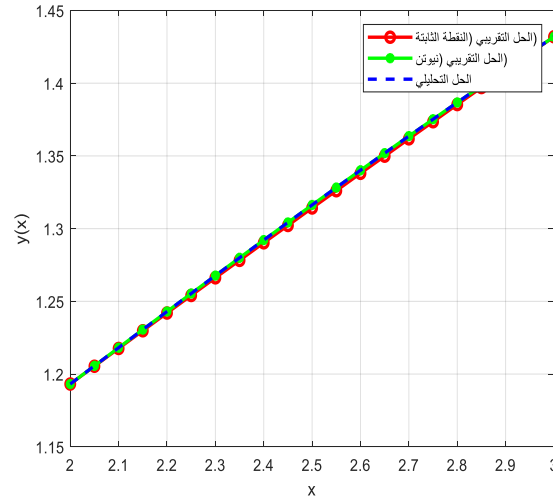
الشكل (5.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي- النقطة الثابتة -نيوتن)

عندما $h=0.1$



الشكل (4.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي- النقطة الثابتة - نيوتن)

عندما $h=0.25$



الشكل (6.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي-النقطة الثابتة-نيوتن)

عندما $h=0.05$

تم إدراج قيم أقصى خطأ مطلق لبيان أقصى تباعد عددي سجلته الطريقتان خلال المسار الحسابي عند كل قيمة ل h

بناءً على نتائج المقارنة التحليلية في المثال (6.2) و المثال (12.2) التي أجريت بين الحل التقريبي المستخلص باستخدام طريقة نيوتن و الحل التحليلي تبين أن الحل التقريبي يتمتع بدرجة عالية من الدقة و الكفاءة عند تطبيق شروط دريشليت الحدودية (Dirichet Boundary Conditions.)

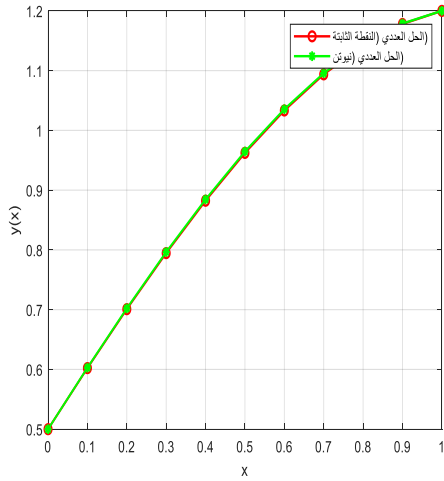
وقد أثبتت المقارنة بين الطرق التكرارية أن طريقة نيوتن تمثل الخيار الأمثل و الأكثر استقراراً نظراً لسرعة تقاربها الفائقة و قدرتها على تقليل الجهد الحسابي مع الحفاظ على أدنى مستويات الخطأ المطلق

و عليه فإن هذه النتائج تفتح أفقاً منهجية موثوقة لمعالجة مسائل القيم الحدية (BVP) للمعادلات التفاضلية

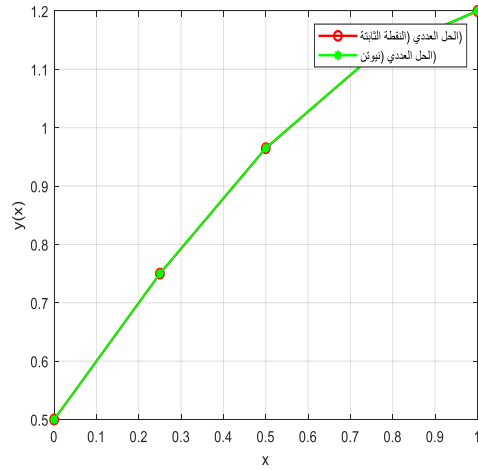
العادية غير الخطية التي تفنقر إلى الحلول التحليلية المباشرة

الجدول (3.3) يوضح المقارنة للمثال (6.2) و المثال (12.2)

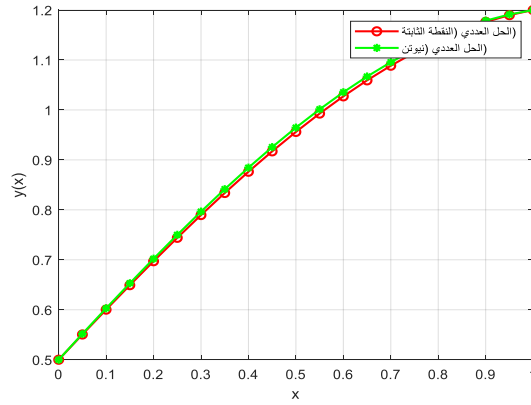
h	طريقة النقطة الثابتة	طريقة نيوتن	أقصى خطأ مطلق
0.25	31	4	2×10^{-4}
0.1	152	4	2.4×10^{-3}
0.05	483	4	8.2×10^{-3}



الشكل (8.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(النقطة الثابتة-نيوتن)
عندما $h = 0.1$



الشكل (7.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(النقطة الثابتة-نيوتن)
عندما $h=0.25$



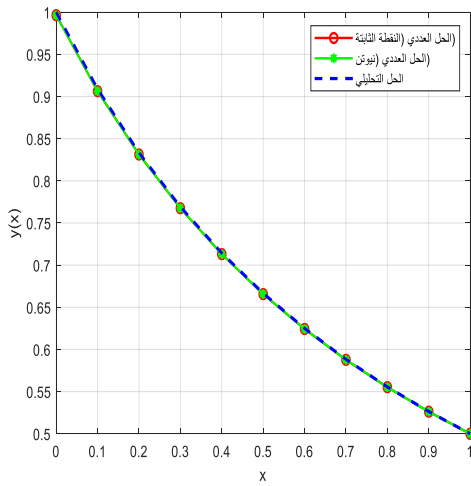
الشكل (9.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(النقطة الثابتة-نيوتن)
عندما $h=0.05$

و بناءً علي ما تقدم يمكن الجزم بأن الحل التقريبي المعتمد علي خوارزمية نيوتن هو الحل الأكثر ملائمة و دقة لمحاكاة هذا النوع من المسائل المعقدة مما يجعلها بديلاً رياضياً قوياً .

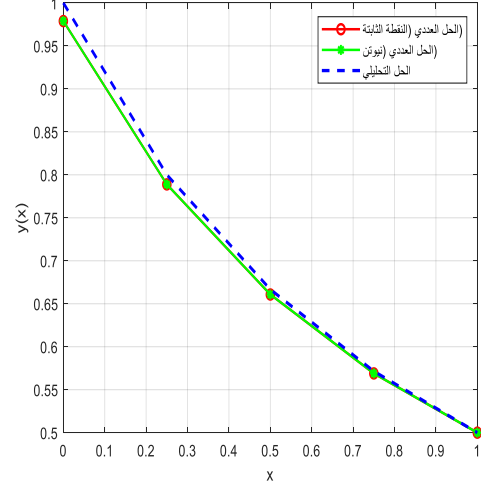
مقارنة نتائج حل المنظومة بالطرق التكرارية في المثال (3.2) و المثال (9.2) عند شروط روبن الحدودية في عدة حالات

الجدول (4.3) يوضح المقارنة للمثال (3.2) الذي تم حله بطريقة النقطة الثابتة و المثال (9.2) الذي تم حله بطريقة نيوتن

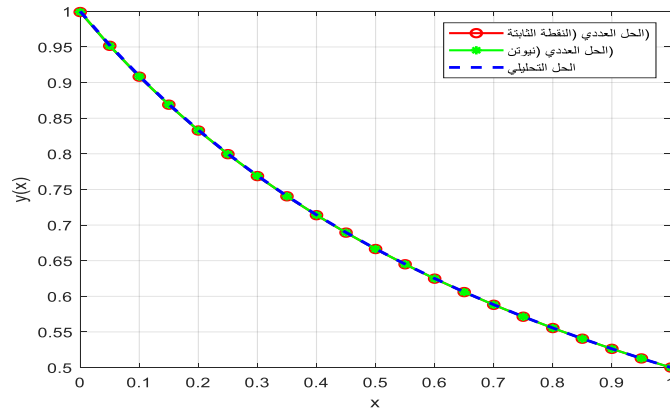
أقصى خطأ مطلق	طريقة نيوتن	طريقة النقطة الثابتة	h
3×10^{-4}	7	274	0.25
1×10^{-4}	8	811	0.1
9×10^{-4}	8	1562	0.05



الشكل (11.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي – النقطة الثابتة- نيوتن)
عندما $h=0.1$



الشكل (10.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي-النقطة الثابتة-نيوتن)
عندما $h=0.25$

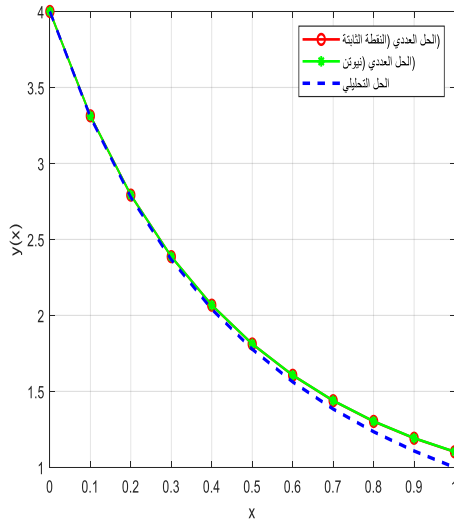


الشكل (12.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي-النقطة الثابتة- نيوتن)
عندما $h=0.05$

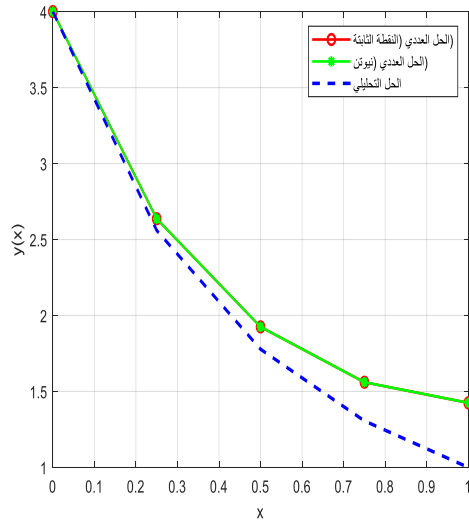
مقارنة نتائج حل المنظومة بالطرق التكرارية في المثال (4.2) و المثال (10.2) عند شروط روبرن الحدودية في عدة حالات

الجدول (5.3)

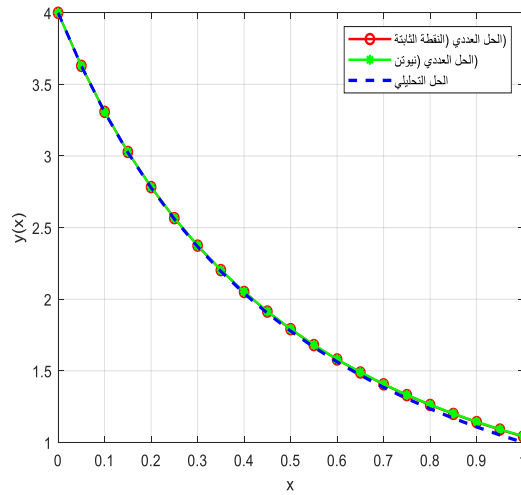
h	طريقة النقطة الثابتة	طريقة نيوتن	أقصى خطأ مطلق
0.25	32	5	1×10^{-4}
0.1	811	6	7×10^{-4}
0.05	838	6	1×10^{-4}



الشكل (14.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي- النقطة الثابتة - نيوتن)
عندما $h=0.1$



الشكل (13.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي- النقطة الثابتة - نيوتن)
عندما $h=0.25$

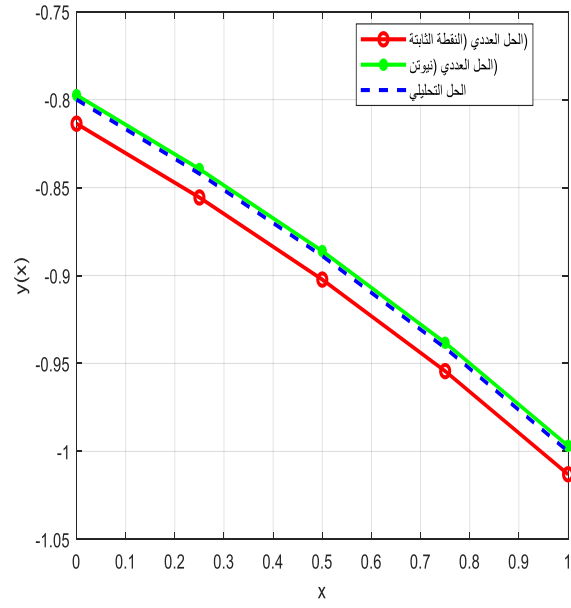


الشكل (15.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي - النقطة الثابتة - نيوتن)
عندما $h=0.05$

مقارنة نتائج حل المنظومة بالطرق التكرارية في المثال (5.2) و المثال (11.2) عند شروط نيومان الحدودية
في عدة حالات

الجدول (6.3) يوضح المقارنة للمثال (5.2) الذي تم حله بطريقة النقطة الثابتة والمثال (11.2) الذي تم حله
بطريقة نيوتن

h	طريقة النقطة الثابتة	طريقة نيوتن	أقصى خطأ مطلق
0.25	32	5	1.8×10^{-2}



الشكل (16.3) يوضح المقارنة بين الحلول
(التحليلي- النقطة الثابتة - نيوتن)
عندما $h=0.25$

3.3 النتائج

من خلال الأمثلة العددية والجدول والرسوم البيانية التي تم عرضها في هذه الدراسة، يمكن استخلاص عدد من الملاحظات المهمة:

1 - المقارنة بين الحلول التحليلية والعددية: أظهرت الجداول أن الحلول العددية باستخدام طريقة الفروق المحدودة تتقارب بشكل ملحوظ مع الحلول التحليلية عند تقليل حجم الخطوة ، مما يؤكد فعالية هذه الطريقة في تقريب الحلول الدقيقة.

2- تأثير حجم الخطوة: أوضحت الرسوم البيانية أن تقليل قيمة يؤدي إلى تقارب أوضح بين المنحنى العددي والمنحنى التحليلي، بينما يؤدي استخدام قيم أكبر لـ إلى زيادة الخطأ النسبي.

3- مقارنة الطرق التكرارية: بينت الأمثلة أن طريقة النقطة الثابتة، رغم بساطتها، تعطي تقاربًا بطيئًا مقارنة بطريقة نيوتن التي أظهرت سرعة تقارب تربيعية. ومع ذلك، فإن طريقة نيوتن تتطلب حساب المشتقات وحسن اختيار نقطة البداية لضمان نجاحها.

4- الرسوم البيانية كأداة توضيحية: ساعدت الرسوم في إبراز الفروق بين الطرق بشكل بصري، حيث ظهر أن طريقة الفروق المحدودة تعطي منحنيات قريبة جدًا من الحلول التحليلية، بينما طريقة النقطة الثابتة أبطأ في الوصول إلى الشكل الصحيح، وطريقة نيوتن أكثر دقة وسرعة عند توفر الشروط المناسبة.

5- الاستنتاج العام: تؤكد هذه الطرق العددية تكمل بعضها البعض؛ فطريقة الفروق المحدودة توفر إطارًا عامًا، طريقة النقطة الثابتة مناسبة للتطبيقات التعليمية أو الأولية، وطريقة نيوتن هي الأكثر كفاءة عند توفر المشتقات.

4.3 المقارنة بين طريقة نيوتن و طريقة النقطة الثابتة

الشكل (7.3)

الجانب	طريقة نيوتن	طريقة النقطة الثابتة
السرعة	سريعة جدًا عندما تكون نقطة البداية قريبة من الجذر	أبطأ نسبيًا في الوصول إلى الحل الدقيق
التكلفة الحسابية	عالية تتطلب حساب قيمة الدالة و مشتقاتها في كل خطوة تكرارية	منخفضة تتطلب فقط قيم الدالة في كل خطوة تكرارية
الاستقرار	حساسة جدًا لنقطة البداية قد تتباعد إذا كان المشتقة الأولى صغيرة جدًا	أكثر استقرارًا إذا تحقق شرط التقارب

خلاصة

استنتجنا في هذه الرسالة إلى أن طريقة الفروق المحدودة تمثل إطارًا عامًا وفعالًا لتحويل مسائل القيم الحدية غير الخطية إلى أنظمة جبرية قابلة للحل، وأن دقتها تتحسن مع زيادة عدد نقاط الشبكة. كما أظهرت المقارنة أن طريقة النقطة الثابتة، رغم بساطتها وسهولة تطبيقها، تعاني من بطء في التقارب وتعتمد على صياغة مناسبة لضمان الاستقرار. في المقابل، أثبتت طريقة نيوتن كفاءتها العالية وسرعة تقاربها التربيعية، لكنها تتطلب حساب المشتقات وحسن اختيار نقطة البداية. وبناءً على ذلك، فإن اختيار الطريقة المناسبة يعتمد على طبيعة المسألة المدروسة،

التوصيات

- يُوصى بتطبيق طريقة الفروق المحدودة على مسائل القيم الحدية غير الخطية للمعادلات التفاضلية العادية من رتب أعلى الأكثر تعقيداً، خاصة تلك التي تظهر في النماذج الفيزيائية والهندسية وغيرها متعددة الأبعاد، مع دراسة تأثير حجم الخطوة وعدد نقاط الشبكة على دقة الحل واستقراره.
- يُستحسن الجمع بين طريقة الفروق المحدودة وطريقة نيوتن لتسريع تقارب الحلول في المسائل غير الخطية، حيث يمكن استخدام الفروق المحدودة لتحويل المعادلة إلى نظام جبري، ثم تطبيق نيوتن لحل النظام بكفاءة أكبر.

المراجع

المراجع العربية

- البكور ، ماجدة.(2019). *المعادلات التفاضلية*
- السعيد، ع. ب. ع. ا. (1437). *التحليل العددي*. النشر العلمي و المطابع -جامعة الملك سعود
- جبر، إنعام رزاق. (2020). *الفروقات المنتهية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية*. جامعة الكوفة، كلية علوم
- الحاسوب والرياضيات، قسم الرياضيات <https://mathcomp.uokufa.edu.iq/wp-content/uploads/2020/01/الفروقات-المنتهية-لحل-المعادلات-التفاضلية-الاعتيادية-انعام-رزاق.pdf>

المراجع الإنجليزية

- Ateeah, A. (2017). Approximate solution for fuzzy differential algebraic equations of fractional order using adomian decomposition method. *Pure Appl. Sci*, 30, 202-213 .
- Burden, R. L., Faires, J. D. og Toomey, H. A. (1997). Numerical analysis algorithms in c. *Brooks Cole: Pacific Grove, CA, USA* .
- Endeshaw, B. (2019). Finite difference method for boundary value problems in ordinary differential equations. *Math. Theory Model*, 9, 17-27 .
- Fadugba, S. E. (2020). Homotopy analysis method and its applications in the valuation of european call options with time-fractional black-scholes equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 141, 110351 .
- Ha, S. N. (2001). A nonlinear shooting method for two-point boundary value problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 4-1411 ،(11-10)2 .1420
- Hasan, P. M. og Sulaiman, N. A. (2020). Convergence analysis for the homotopy perturbation method for a linear system of mixed volterra-fredholm integral equations. *Baghdad Science Journal*, 17(3 (Supl.)), 1010-1010 .
- He, J.-H. og Latifizadeh, H. (2020). A general numerical algorithm for nonlinear differential equations by the variational iteration method. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 30(11), 4797-4810 .
- McOwen, R. C. (2004). *Partial differential equations: Methods and applications*. 清华大学出版社有限公司 .

Salih, O. M. og AL-Jawary, M. A. (2023). Computational methods for solving nonlinear ordinary differential equations arising in engineering and applied sciences. *Iraqi Journal of Science*, 4070-4091 .

الملحق
الأكواد البرمجية
MATLAB CODES

1-كود طريقة النقطة الثابتة للمثال (1.2)

```
clc; clear;

% إعداد المعطيات
a = 0;
b = 1;
n = 3; % عدد النقاط الداخلية
h = (b - a) / (n + 1); % خطوة الشبكة
x = linspace(a, b, n+2)'; % النقاط من 0 إلى 1
y = zeros(n+2, 1); % القيم الابتدائية
y(1) = 0; % شرط ابتدائي عند x = 0
y(end) = log(2); % شرط ابتدائي عند x = 1

% تعريف الدالة f(x, y)
f = @(x, y) 2 * exp(-2*y) .* (1 - x.^2);

% النقطة الثابتة
max_iter = 1000;
tol = 1e-4;
Y_all = {}; % كل تكرار لتخزين القيم في

for iter = 1:max_iter
    y_old = y;
    for i = 2:n+1
        y(i) = 0.5 * (y_old(i-1) + y_old(i+1) - h^2 * f(x(i), y_old(i)));
    end
    Y_all{iter} = y; % تخزين القيم الحالية

    % شرط التقارب
    if norm(y - y_old, inf) < tol
        fprintf('تم الوصول للحل بعد %d تكرارات\n\n', iter);
        break;
    end
end

% عرض القيم في كل تكرار
for k = 1:iter
    fprintf('--- التكرار رقم %d ---\n', k);
    disp(Y_all{k});
end

% الحل التحليلي
y_exact = log(x.^2 + 1);

% عرض الحل التقريبي النهائي
fprintf('\n:الحل التقريبي النهائي? \n');
disp(y);
```

```

% عرض الحل التحليلي
fprintf('\n? الحل التحليلي  $y(x) = \ln(x^2 + 1)$ :\n');
disp(y_exact);

% رسم الحل التقريبي والحل التحليلي
figure;
plot(x, y, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('y(x)');
legend('الحل التحليلي', 'الحل التقريبي');
%title('مقارنة بين الحل العددي والتحليلي');
grid on;

% حساب الخطأ المطلق
error = abs(y - y_exact);

% رسم الخطأ المطلق
figure;
plot(x, error, 'k*-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('x'); ylabel('الخطأ المطلق');
%title('الرسم البياني للفرق بين الحل التقريبي والحل التحليلي');
grid on;

```

كود النقطة الثابتة للمثال (2.2)

```

clc; clear;

% إعداد المعطيات
h = 0.25;
x = 2+h:h:3-h; % النقاط الداخلية: 2.25 و 2.5 و 2.75
n = length(x); % عدد النقاط الداخلية
y0 = 1/2 + log(2); % y(2)
yN = 1/3 + log(3); % y(3)

% نقطة البداية: جميع القيم الداخلية = صفر
y = zeros(n, 1);

% إعداد التكرار
tol = 1e-4;
max_iter = 10000;
iter_count = 0;
converged = false;

% مصفوفة لتخزين الحلول في كل تكرار
Y_all = [];

% طريقة النقطة الثابتة مع شرط التقارب
while iter_count < max_iter
    y_old = y;
    y_new = zeros(n,1);

    for i = 1:n

```

```

xi = x(i);

% القيم المجاورة
if i == 1
    yi_minus = y0;
    yi_plus = y_old(i+1);
elseif i == n
    yi_minus = y_old(i-1);
    yi_plus = yN;
else
    yi_minus = y_old(i-1);
    yi_plus = y_old(i+1);
end

% تقريب المشتقة الأولى
yp = (yi_plus - yi_minus)/(2*h);

% تطبيق الفروق المنتهية للمعادلة
f = yp + 2*(y_old(i) - log(xi))^3 - 1/xi;
y_new(i) = (yi_minus + yi_plus - h^2 * f) / 2;
end

% تخزين الحل الحالي
Y_all = [Y_all, y_new];

% شرط التقارب
if norm(y_new - y_old, inf) < tol
    converged = true;
    break;
end

y = y_new;
iter_count = iter_count + 1;
end

% بناء الحل الكامل
x_full = [2, x, 3];
y_full = [y0; y_new; yN];

% الحل التحليلي
y_exact = 1 ./ x_full + log(x_full);

% حساب الخطأ المطلق
error = abs(y_full - y_exact');

% عرض عدد التكرارات
if converged
    fprintf('\n? تكرار %d تم الوصول إلى الحل التقريبي بعد ', iter_count);
else
    fprintf('\n?? تكرار %d لم يتم الوصول إلى التقارب بعد ', max_iter);
end

% عرض القيم في كل تكرار
fprintf('\n? تطور الحلول التقريبية في كل تكرار ');
for k = 1:size(Y_all, 2)

```

```

fprintf('--- التكرار %d ---\n', k);
disp(Y_all(:,k));
end

% عرض الحل النهائي والتحليلي
fprintf('\n? الحل التقريبي النهائي:\n');
disp(table(x_full, y_full, 'VariableNames', {'x', 'y_approx'}));

fprintf('\n? الحل التحليلي y(x) = 1/x + ln(x):\n');
disp(table(x_full, y_exact, 'VariableNames', {'x', 'y_exact'}));

fprintf('\n? الخطأ المطلق:\n');
disp(table(x_full, error, 'VariableNames', {'x', 'Absolute_Error'}));

% رسم الحل التقريبي والتحليلي
figure;
plot(x_full, y_full, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_full, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('y(x)');
legend('الحل التقريبي', 'الحل التحليلي');
%title('مقارنة بين الحل التقريبي والحل التحليلي');
grid on;

% رسم الخطأ المطلق
figure;
plot(x_full, error, 'k*-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('x'); ylabel('الخطأ المطلق');
title('الرسم البياني للفرق بين الحل التقريبي والحل التحليلي');
grid on;

```

كود النقطة الثابتة للمثال (3.2)

```

clc;
clear;

% إعداد الشبكة
h = 0.05; % يمكن تغيير h
x = 0:h:1;
n = length(x);

% الشروط الحدية
dy0 = -1; % y'(0)
y_end = 0.5; % y(1)

% الابتدائية القيم
Y = zeros(n,1);
Y(end) = y_end;

% إعداد التكرار
max_iter = 20000; % عدد التكرارات
tol = 1e-4; % شرط التقارب

fprintf('--- طريقة الفروق المنتهية + النقطة الثابتة ---\n');

```

```

iter_count = 0;

for k = 1:max_iter
    Y_new = Y;

    % شرط نيومن باستخدام نقطة شبحية عند x=0
    y_m1 = Y(2) - 2*h*dy0;
    dy = (Y(2) - y_m1)/(2*h);
    Y_new(1) = (Y(2) + y_m1)/2 - (h^2/2)*(Y(1)^3 - Y(1)*dy);

    % النقاط الداخلية
    for i = 2:n-1
        dy = (Y(i+1) - Y(i-1))/(2*h);
        Y_new(i) = (Y(i+1) + Y(i-1))/2 - (h^2/2)*(Y(i)^3 - Y(i)*dy);
    end

    % شرط دريشليه عند x=1
    Y_new(n) = y_end;

    iter_count = k;

    % شرط التقارب
    if norm(Y_new - Y, inf) < tol
        fprintf('n\tكرارات %d تم التقارب بعد', iter_count);
        Y = Y_new;
        break;
    end

    % تحديث
    Y = Y_new;
end

% الحل التحليلي
y_exact = 1 ./ (x + 1);

% عرض النتائج
disp('الحل التقريبي مقابل الحل التحليلي:');
disp(table(x, Y, y_exact, 'VariableNames', {'x', 'y_approx', 'y_exact'}));

% عرض عدد التكرارات النهائي
fprintf('عدد التكرارات الفعلي المستخدم = %d\n', iter_count);

% رسم الحل
figure;
plot(x, Y, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
legend('الحل التحليلي', 'الحل التقريبي');
xlabel('x'); ylabel('y');
%title('المقارنة بين الحل التقريبي و الحل التحليلي');
grid on;

```

طريقة النقطة الثابتة للمثال (4.2)

```
clc;
clear;

% إعداد الشبكة
h = 0.05;
x = 0:h:1;
n = length(x);

% الشروط الحدية
y0 = 4; % y(0) = 4
dy1 = -1; % y'(1) = -1

% القيم الابتدائية
Y = zeros(n,1);
Y(1) = y0; % الشرط عند x=0

% إعداد التكرار
max_iter = 20000;
tol = 1e-4;

fprintf('\n--- طريقة الفروق المنتهية + النقطة الثابتة ---\n');

iter_count = 0;

for k = 1:max_iter
    Y_new = Y;

    % شرط دريشليه (x=0 عند)
    Y_new(1) = y0;

    % النقاط الداخلية
    for i = 2:n-1
        % المعادلة:  $y'' = 3/2 y^2$ 
        Y_new(i) = (Y(i+1) + Y(i-1))/2 - (h^2/2)*(1.5*Y(i)^2);
    end

    % شرط نيومن باستخدام الفرق المركزي (x=1 عند)
    %  $y'(1) \approx (Y(n) - Y(n-2)) / (2*h) = -1$ 
    Y_new(n) = Y(n-2) + 2*h*dy1;

    iter_count = k;

    % عند كل تكرار Y عرض القيم الكاملة للمنتج
    fprintf('%d: التكرار\n', k);
    disp(Y_new);

    % شرط التقارب
    if norm(Y_new - Y, inf) < tol
        fprintf('%d تكرارات تم التقارب بعد\n', iter_count);
        Y = Y_new;
        break;
    end
end
```

```

    % تحديث
    Y = Y_new;
end

% الحل التحليلي
y_exact = 4 ./ (x+1).^2;

% الفرق
error = Y - y_exact';

% عرض النتائج النهائية
disp('الحل التقريبي مقابل الحل التحليلي:');
disp(table(x, Y, y_exact', error, ...
    'VariableNames', {'x','y_approx','y_exact','error'}));

fprintf('عدد التكرارات الفعلي المستخدم = %d\n', iter_count);

% رسم الحل
figure;
plot(x, Y, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
legend('الحل التحليلي', 'الحل التقريبي');
xlabel('x'); ylabel('y');
%title('مقارنة بين الحل التقريبي و الحل ');
grid on;

% رسم الفرق
figure;
plot(x, error, 'k*-', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('الفرق (y_{approx} - y_{exact})');
title('الفرق بين الحل التقريبي والحل التحليلي');
grid on;

```

طريقة النقطة الثابتة للمثال (5.2)

```

clc; clear; close all;

h = 0.25;
x = 0:h:1; % نقاط الشبكة: 0,0.25,0.5,0.75,1
N = length(x);

% الحل التحليلي للمقارنة
y_exact = @(x) 4./(x - 5);

% قيمة ابتدائية (مثلاً -1 لكل النقاط)
y = -0.99*ones(N,1);

maxIter = 5000;
tol = 1e-4; % دقة نهائية عالية
tol_check = 1e-4; % 4^-10 تريدها

Y_hist = zeros(N,maxIter);

```

```

fprintf('Iter   y0      y1      y2      y3      y4\n');
fprintf('-----\n');

iter_tol_check = NaN; % تخزين رقم التكرار عند الوصول لـ 4-^10

for k = 1:maxIter
    y_old = y;

    % 5)–(1) المعادلات
    y(1) = (2*y_old(2) + 0.08)/2.005; % (1)
    y(2) = (y_old(3)+y_old(1))/(2 - 0.0625*(y_old(3)-y_old(1))); % (2)
    y(3) = (y_old(4)+y_old(2))/(2 - 0.0625*(y_old(4)-y_old(2))); % (3)
    y(4) = (y_old(5)+y_old(3))/(2 - 0.0625*(y_old(5)-y_old(3))); % (4)
    y(5) = (2*y_old(4)-0.125)/(2+0.0078125); % (5)

    Y_hist(:,k) = y;

    % طباعة القيم في هذا التكرار
    fprintf('%3d %10.6f %10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n', ...
        k, y(1), y(2), y(3), y(4), y(5));

    % تحقق من الدقة المطلوبة 4-^10
    if isnan(iter_tol_check) && norm(y - y_old, inf) < tol_check
        iter_tol_check = k;
        fprintf('1 عند التكرار رقم 4-وصلنا إلى دقة %d\n', k);
    end

    % شرط التوقف النهائي
    if norm(y - y_old, inf) < tol
        fprintf('تكرار %d تم الوصول للتقارب النهائي بعد\ن', k);
        break;
    end
end

% الحل التحليلي عند النقاط
y_true = y_exact(x);

% مقارنة نهائية
disp(' ');
disp('Final comparison:');
T = table(x', y_true', y, abs(y_true' - y), ...
    'VariableNames', {'x','y_exact','y_numeric','abs_error'});
disp(T);

% عرض عدد التكرارات عند الدقة المطلوبة
if ~isnan(iter_tol_check)
    fprintf('\n عدد التكرارات للوصول إلى دقة 4-^10 هو %d\n', iter_tol_check);
else
    fprintf('\n1 لم نصل إلى دقة 4-^10 ضمن %d تكرار.\n', maxIter);
end

% ===== رسم المقارنة بين الحل العددي والتحليلي =====
figure;
plot(x, y, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, y_true, 'b*-', 'LineWidth', 2);

```

```

xlabel('x'); ylabel('y');
legend('الحل التحليلي', 'Location', 'best');
%title('مقارنة الحل العددي مع الحل التحليلي');
grid on;

```

طريقة النقطة الثابتة للمثال (6.2)

```

clc; clear;

% إعداد المعطيات
a = 0;
b = 1;
n = 25; % عدد النقاط الداخلية
h = (b - a) / (n + 1); % خطوة الشبكة
x = linspace(a, b, n+2); % النقاط من 0 إلى 1

% القيم الابتدائية
y = zeros(n+2, 1);
y(1) = 0.5; % شرط ابتدائي عند x = 0
y(end) = 1.2; % شرط ابتدائي عند x = 1

% تعريف الدالة غير الخطية (مثال)
f = @(x, y) -y.^2; % المعادلة: y'' = -y^2

% النقطة الثابتة
max_iter = 10000;
tol = 1e-4;
Y_all = {}; % تخزين القيم في كل تكرار

for iter = 1:max_iter
    y_old = y;
    for i = 2:n+1
        % معادلة الفروق المنتهية
        y(i) = 0.5 * (y_old(i-1) + y_old(i+1) - h^2 * f(x(i), y_old(i)));
    end
    Y_all{iter} = y; % تخزين القيم الحالية

    % شرط التقارب
    if norm(y - y_old, inf) < tol
        fprintf('تم الوصول للحل بعد %d تكرارات\n', iter);
        break;
    end
end

% عرض القيم في كل تكرار
for k = 1:iter
    fprintf('---\n رقم التكرار %d\n', k);
    disp(Y_all{k});
end

% عرض الحل التقريبي النهائي
fprintf('\n? الحل التقريبي النهائي:\n');
disp(y);

```

```

رسم الحل العددي فقط
figure;
plot(x, y, 'ro-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('x'); ylabel('y(x)');
legend('الحل العددي');
grid on;

```

طريقة نيوتن للمثال (7.2)

```

clc; clear;

% إعداد المعطيات
h = 0.25;
x = h:h:1-h; % النقاط الداخلية
n = length(x); % عدد النقاط الداخلية
y0 = 0;
yN = log(2); % y(1)

% بداية تقديرية للقيم الداخلية
% توزيع خطي كبدائية
y = linspace(0, log(2), n)';

tol = 1e-4;
max_iter = 100;

% طريقة نيوتن
for iter = 1:max_iter
    F = zeros(n, 1);
    J = zeros(n, n);

    for i = 1:n
        if i == 1
            yi_minus = y0;
        else
            yi_minus = y(i-1);
        end

        if i == n
            yi_plus = yN;
        else
            yi_plus = y(i+1);
        end

        xi = x(i);

        % المعادلة غير الخطية
        F(i) = (yi_minus - 2*y(i) + yi_plus)/h^2 - 2*exp(-2*y(i))*(1 - xi^2);

        % عناصر المصفوفة
        J(i,i) = -2/h^2 + 4*exp(-2*y(i))*(1 - xi^2);
        if i > 1
            J(i,i-1) = 1/h^2;
        end
    end
end

```

```

    if i < n
        J(i,i+1) = 1/h^2;
    end
end

% تحديث y
delta = J \ (-F);
y_new = y + delta;
Y_all{iter} = y_new; % تخزين القيم في كل تكرار

if norm(delta, inf) < tol
    break;
end

y = y_new;
end

% عرض القيم في كل تكرار
for k = 1:iter%
    fprintf('--- القيم في التكرار رقم %d ---\n', k);
    disp(Y_all{k});
end

% إضافة القيم الحديثة
y_full = [y0; y; yN];
x_full = [0, x, 1];

% الحل التحليلي
y_exact = log(x_full.^2 + 1);

% عرض النتائج النهائية
fprintf('\n عدد التكرارات: %d\n', iter);
disp('الحل التقريبي:');
disp(y_full);

disp('الحل التحليلي y(x) = ln(x^2 + 1):');
disp(y_exact);

% رسم الحل التقريبي والحل التحليلي
figure;
plot(x_full, y_full, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_full, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('y(x)');
legend('الحل التحليلي', 'الحل التقريبي');
%title('العدي والتحليلي مقارنة بين الحل');
grid on;

clc; clear;

% إعداد المعطيات
h = 0.25;
x = 2+h:h:3-h; % النقاط الداخلية: 2.25 و 2.5 و 2.75
n = length(x); % عدد النقاط الداخلية

```

طريقة نيوتن للمثال (8.2)

```

y0 = 1/2 + log(2); % y(2)
yN = 1/3 + log(3); % y(3)

% نقطة البداية: جميع القيم الداخلية = صفر
y = zeros(n, 1);

% إعداد التكرار
tol = 1e-4;
max_iter = 1000;
iter_count = 0;
converged = false;

% مصفوفة لتخزين الحلول في كل تكرار
Y_all = [];

% طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي
while iter_count < max_iter
    F = zeros(n,1); % المنتج F(y)
    J = zeros(n,n); % المصفوفة Jacobian

    for i = 1:n
        xi = x(i);

        % القيم المجاورة
        if i == 1
            yi_minus = y0;
            yi_plus = y(i+1);
        elseif i == n
            yi_minus = y(i-1);
            yi_plus = yN;
        else
            yi_minus = y(i-1);
            yi_plus = y(i+1);
        end

        % تقريب المشتقات
        yp = (yi_plus - yi_minus)/(2*h);
        ypp = (yi_plus - 2*y(i) + yi_minus)/h^2;

        % المعادلة الأصلية
        F(i) = ypp - yp - 2*(y(i) - log(xi))^3 + 1/xi;

        % Jacobian حساب عناصر
        dFdy = -2/h^2 - 6*(y(i) - log(xi))^2; % المشتقة الجزئية لـ F بالنسبة لـ y(i)
        J(i,i) = dFdy;

        if i > 1
            J(i,i-1) = 1/h^2 + 1/(2*h); % مشتقة F بالنسبة لـ y(i-1)
        end
        if i < n
            J(i,i+1) = 1/h^2 - 1/(2*h); % مشتقة F بالنسبة لـ y(i+1)
        end
    end

    % حل النظام الخطي: J * delta = -F

```

```

delta = J \ (-F);
y_new = y + delta;

% تخزين الحل الحالي
Y_all = [Y_all, y_new];

% شرط التقارب
if norm(delta, inf) < tol
    converged = true;
    break;
end

y = y_new;
iter_count = iter_count + 1;
end

% بناء الحل الكامل
x_full = [2, x, 3];
y_full = [y0; y_new; yN];

% الحل التحليلي
y_exact = 1 ./ x_full + log(x_full);

% حساب الخطأ المطلق
error = abs(y_full - y_exact);

% عرض عدد التكرارات
if converged
    fprintf('\n? تكرار %d تم الوصول إلى الحل باستخدام نيوتن بعد \n', iter_count);
else
    fprintf('\n?? تكرار %d لم يتم الوصول إلى التقارب بعد \n', max_iter);
end

% عرض القيم في كل تكرار
fprintf('\n? تطور الحلول التقريبية في كل تكرار \n');
for k = 1:size(Y_all, 2)
    fprintf('--- التكرار %d ---\n', k);
    disp(Y_all(:,k));
end

% عرض الحل النهائي والتحليلي
fprintf('\n? الحل التقريبي النهائي:\n');
disp(table(x_full, y_full, 'VariableNames', {'x', 'y_approx'}));

fprintf('\n? الحل التحليلي y(x) = 1/x + ln(x):\n');
disp(table(x_full, y_exact, 'VariableNames', {'x', 'y_exact'}));

fprintf('\n? الخطأ المطلق:\n');
disp(table(x_full, error, 'VariableNames', {'x', 'Absolute_Error'}));

% رسم الحل التقريبي والتحليلي
figure;
plot(x_full, y_full, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_full, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('y(x)');

```

```

legend('الحل التحليلي', 'الحل التقريبي');
%title('مقارنة بين الحل التقريبي والحل التحليلي');
grid on;

% رسم الخطأ المطلق
figure;
plot(x_full, error, 'k*-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('x'); ylabel('الخطأ المطلق');
%title('الرسم البياني للفرق بين الحل التقريبي والحل التحليلي');
grid on;

```

طريقة نيوتن للمثال (9.2)

```

clc;
clear;

% إعداد الشبكة
h = 0.25;
x = 0:h:1;
n = length(x); % عدد النقاط = 5

% الشروط الحدية
dy0 = -1; % y'(0)
y_end = 0.5; % y(1)

% القيم الابتدائية (كلها صفر)
Y = zeros(n,1);
% فرض الشرط الحدي عند النهاية
Y(end) = y_end;

% إعداد التكرار
max_iter = 50;
tol = 1e-4;

fprintf('--- طريقة الفروق المنتهية + نيوتن ---\n');
fprintf('القيم الابتدائية:\n');
disp(Y);

for k = 1:max_iter
    F = zeros(n,1);
    J = zeros(n,n);

    % شرط نيومن باستخدام نقطة شبكية x = 0 المعادلة عند
    y_m1 = Y(2) - 2*h*dy0; % y_{-1}
    dy = (Y(2) - y_m1)/(2*h); % dy0 يساوي
    F(1) = (Y(2) - 2*Y(1) + y_m1)/h^2 - (Y(1)^3 - Y(1)*dy);

    % جاكوبيان عند i=1
    J(1,1) = -2/h^2 - 3*Y(1)^2 + dy0;
    J(1,2) = 2/h^2;

    % المعادلات الداخلية
    for i = 2:n-1

```

```

dy = (Y(i+1) - Y(i-1))/(2*h);
F(i) = (Y(i+1) - 2*Y(i) + Y(i-1))/h^2 - (Y(i)^3 - Y(i)*dy);

J(i,i-1) = 1/h^2 + Y(i)/(2*h);
J(i,i) = -2/h^2 - 3*Y(i)^2;
J(i,i+1) = 1/h^2 - Y(i)/(2*h);
end

% شرط دريشليه x = 1 المعادلة عند
F(n) = Y(n) - y_end;
J(n,n) = 1;

% والمتجه A المصفوفة B
A = J;
B = -F;

fprintf('\n== التكرار رقم %d ==\n', k);
disp('A = ');
disp(A);
disp('B = ');
disp(B);

% تحديث نيوتن
delta = A \ B;
Y = Y + delta;

% شرط التقارب
if norm(delta, inf) < tol
    fprintf('تكرارات %d تم التقارب بعد', k);
    break;
end
end

% الحل التحليلي
y_exact = 1 ./ (x + 1);

% عرض النتائج
disp('الحل التقريبي مقابل الحل التحليلي:');
disp(table(x, Y, y_exact, 'VariableNames', {'x', 'y_approx', 'y_exact'}));

% رسم الحل
figure;
plot(x, Y, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
legend('الحل التحليلي', 'الحل التقريبي');
xlabel('x'); ylabel('y');
%title('المقارنة بين الحل التحليلي و الحل التقريبي');
grid on;

```

طريقة نيوتن للمثال (10.2)

clc; clear;

```

% إعداد الشبكة
h = 0.25;
x = 0:h:1;
n = length(x);

% الشروط الحدية
y0 = 4; % y(0) = 4
dy1 = -1; % y'(1) = -1

% القيم الابتدائية (نبدأ من صفر داخلياً)
Y = zeros(n,1);
Y(1) = y0;

% إعداد التكرار
max_iter = 100;
tol = 1e-6;

fprintf('--- طريقة الفروق المنتهية + نيوتن ---\n');

for k = 1:max_iter
    F = zeros(n,1); J = zeros(n,n);

    % شرط دريشلييه عند x=0
    F(1) = Y(1) - y0;
    J(1,1) = 1;

    % النقاط الداخلية
    for i = 2:n-1
        F(i) = (Y(i+1) - 2*Y(i) + Y(i-1))/h^2 - 1.5*Y(i)^2;
        J(i,i-1) = 1/h^2;
        J(i,i) = -2/h^2 - 3*Y(i);
        J(i,i+1) = 1/h^2;
    end

    % شرط نيومن باستخدام الفرق المركزي عند x=1
    F(n) = (Y(n) - Y(n-2))/(2*h) - dy1;
    J(n,n) = 1/(2*h);
    J(n,n-2) = -1/(2*h);

    % حل نظام نيوتن: J * delta = -F
    delta = J \ (-F);
    Y = Y + delta;

    % شرط التقارب
    if norm(delta,inf) < tol
        fprintf('تكرارات %d تم التقارب بعد', k);
        break;
    end
end

% الحل التحليلي
y_exact = 4 ./ (x+1).^2;

% الفرق
error = Y - y_exact;

```

```

% عرض النتائج النهائية
disp('الحل التقريبي مقابل الحل التحليلي');
disp(table(x, Y, y_exact, error, ...
    'VariableNames', {'x','y_approx','y_exact','error'}));

% رسم الحل
figure;
plot(x, Y, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, y_exact, 'b--', 'LineWidth', 2);
legend('الحل العددي (نيوتن)', 'الحل التحليلي');
xlabel('x'); ylabel('y');
%title('بين الحل العددي بطريقة نيوتن والحل التحليلي مقارنة');
grid on;

% رسم الفرق
figure;
plot(x, error, 'k*-', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('الفرق (y_{approx} - y_{exact})');
title('الفرق بين الحل العددي والتحليلي');
grid on;

```

طريقة نيوتن للمثال (11.2)

```

clc; clear; close all;

h = 0.25;
x = 0:h:1; % نقاط الشبكة
N = length(x);

% الحل التحليلي للمقارنة
y_exact = @(x) 4./(x - 5);

% قيمة ابتدائية (مثلاً -1 لكل النقاط)
y = -0.99*ones(N,1);

maxIter = 50;
tol = 1e-4;

for k = 1:maxIter
    % تعريف F(y) (5)-(1)
    F = zeros(N,1);
    F(1) = y(1) - (2*y(2)+0.08)/2.005;
    F(2) = y(2) - (y(3)+y(1))/(2 - 0.0625*(y(3)-y(1)));
    F(3) = y(3) - (y(4)+y(2))/(2 - 0.0625*(y(4)-y(2)));
    F(4) = y(4) - (y(5)+y(3))/(2 - 0.0625*(y(5)-y(3)));
    F(5) = y(5) - (2*y(4)-0.125)/(2+0.0078125);

    % تقريباً باستخدام الفروق المحدودة J بناء جاكوبي
    J = zeros(N,N);
    eps = 1e-4;
    for j = 1:N
        y_pert = y;

```

```

y_pert(j) = y_pert(j) + eps;
F_pert = zeros(N,1);
F_pert(1) = y_pert(1) - (2*y_pert(2)+0.08)/2.005;
F_pert(2) = y_pert(2) - (y_pert(3)+y_pert(1))/(2 - 0.0625*(y_pert(3)-y_pert(1)));
F_pert(3) = y_pert(3) - (y_pert(4)+y_pert(2))/(2 - 0.0625*(y_pert(4)-y_pert(2)));
F_pert(4) = y_pert(4) - (y_pert(5)+y_pert(3))/(2 - 0.0625*(y_pert(5)-y_pert(3)));
F_pert(5) = y_pert(5) - (2*y_pert(4)-0.125)/(2+0.0078125);
J(:,j) = (F_pert - F)/eps;
end

% تحديث نيوتن
delta = -J\F;
y = y + delta;

% طباعة القيم في كل تكرار
fprintf('%3d %10.6f %10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n', ...
    k, y(1), y(2), y(3), y(4), y(5));

% شرط التوقف
if norm(delta,inf) < tol
    fprintf('تكرار %d تم الوصول للتقارب بعد', k);
    break;
end
end

% مقارنة مع الحل التحليلي
y_true = y_exact(x);
disp(' ');
disp('Final comparison:');
T = table(x, y_true, y, abs(y_true - y), ...
    'VariableNames', {'x','y_exact','y_numeric','abs_error'});
disp(T);

% مقارنة مع الحل التحليلي
y_true = y_exact(x);
disp(' ');
disp('Final comparison:');
T = table(x, y_true, y, abs(y_true - y), ...
    'VariableNames', {'x','y_exact','y_numeric','abs_error'});
disp(T);

% ===== رسم المقارنة =====
figure;
plot(x, y, 'ro-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x, y_true, 'b*-', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('y');
legend('الحل العددي (Newton)', 'الحل التحليلي', 'Location', 'best');
%title('مقارنة الحل العددي بطريقة نيوتن مع الحل التحليلي');
grid on;

```

طريقة نيوتن للمثال (12.2)

```
clc; clear;
```

```
% إعداد المعطيات
h = 0.05;
```

```

x = h: h : 1-h;    % النقاط الداخلية: 0.25 و 0.5 و 0.75
n = length(x);    % عدد النقاط الداخلية
y0 = 0.5;         % الشرط الحدي عند x=0
yN = 1.2;         % الشرط الحدي عند x=1

% جميع القيم الداخلية = صفر: نقطة البداية
y = zeros(n,1);

% إعداد التكرار
tol = 1e-4;
max_iter = 100;
iter_count = 0;
converged = false;

% مصفوفة لتخزين الحلول في كل تكرار
Y_all = [];

% طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي
while iter_count < max_iter
    F = zeros(n,1);    % المتجه F(y)
    J = zeros(n,n);    % المصفوفة Jacobian

    for i = 1:n
        % القيم المجاورة
        if i == 1
            yi_minus = y0;
            yi_plus = y(i+1);
        elseif i == n
            yi_minus = y(i-1);
            yi_plus = yN;
        else
            yi_minus = y(i-1);
            yi_plus = y(i+1);
        end

        % تقريب المشتقة الثانية
        ypp = (yi_plus - 2*y(i) + yi_minus)/h^2;

        % المعادلة الأصلية:  $y'' + y^2 = 0$ 
        F(i) = ypp + y(i)^2;

        % Jacobian حساب عناصر
        J(i,i) = -2/h^2 + 2*y(i);    % مشتقة F بالنسبة لـ y(i)
        if i > 1
            J(i,i-1) = 1/h^2;    % مشتقة F بالنسبة لـ y(i-1)
        end
        if i < n
            J(i,i+1) = 1/h^2;    % مشتقة F بالنسبة لـ y(i+1)
        end
    end

    % حل النظام الخطي: J * delta = -F
    delta = J \ (-F);
    y_new = y + delta;

```

```

% تخزين الحل الحالي
Y_all = [Y_all, y_new];

% شرط التقارب
if norm(delta, inf) < tol
    converged = true;
    break;
end

y = y_new;
iter_count = iter_count + 1;
end

% بناء الحل الكامل
x_full = [0, x, 1];
y_full = [y0; y_new; yN];

% عرض عدد التكرارات
if converged
    fprintf('\n? تكرار %d تم الوصول إلى الحل باستخدام نيوتن بعد ', iter_count);
else
    fprintf('\n? تكرار %d لم يتم الوصول إلى التقارب بعد ', max_iter);
end

% كل تكرار عرض القيم في
fprintf('\n:تطور الحلول التقريبية في كل تكرار\n');
for k = 1:size(Y_all, 2)
    fprintf('--- التكرار %d ---\n', k);
    disp(Y_all(:,k));
end

% عرض الحل النهائي
fprintf('\nالحل التقريبي النهائي:\n');
disp(table(x_full, y_full, 'VariableNames', {'x', 'y_approx'}));

% رسم الحل التقريبي
figure;
plot(x_full, y_full, 'ro-', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('y(x)');
legend('الحل التقريبي');%
%title('الحل العددي');%
grid on;

```

Abstract

This study focuses on addressing Boundary Value Problems (BVPs) associated with second-order nonlinear ordinary differential equations. The methodology employed involves transforming these problems into systems of nonlinear algebraic equations using the Finite Difference Method (FDM).

We have studied two methods to solve the nonlinear algebraic systems, Fixed Point's Method (FPM) and Newton's Method (NM). Furthermore, the research aims to conduct a comparative analysis between the obtained numerical results and the exact analytical solutions, while evaluating the efficiency of the two iterative algorithms based on criteria such as accuracy and convergence

.



Al-Asmarya Islamic University

Faculty of Science

Department of Mathematics

A Study of Some Numerical Methods for Second-Order Nonlinear Ordinary Differential Equations

Fatima Ahmed Miftah Abu Isnaynah

Supervised by:

Prof. Omar Ali Aleyan

**Thesis Was Submitted in Partial Fulfillment of The
Requirements for The Degree of Master in Mathematics**

Date (2026 -2025)

